

## Grafi - 2.mājasdarbs

**Ievads.** Šajā mājasdarbā Jums tiek piedāvāti 7 uzdevumi, kuri ir sakārtoti grūtību pieaugošā secībā. Katrs uzdevums tiek novērtēts ar 0–7 punktiem. Punkti tiek piešķirti arī par ne līdz galam atrisinātiem uzdevumiem, ja ir iegūti noderīgi rezultāti. Risinājumu iesniegšanai izmantot NMS mājaslapā esošo formu.

**1.uzdevums** Muzejs sastāv no 4004001 istabām, kas izvietotas  $2001 \times 2001$  rūtiņu kvadrātā. Par blakusesošām istabām saucim tās, kurām attiecīgi rūtiņu kvadrātā ir kopīga mala. Vai ir iespējams, ka ikvienā istabā ir tieši 2 durvis, kas ved uz blakusesošām istabām?

**2.uzdevums** Ziemeļzemē atrodas vairākas pilsētas, un katrs pilsētu pāris ir savienots ar vienu no trim pieejamajiem transporta veidiem: autobusu, vilcienu vai lidmašīnu. Zināms, ka Ziemeļzemē vismaz reizi tiek izmantots katrs no trim transporta veidiem, kā arī nav tādas pilsētas, kura izmanto visus trīs transporta veidus. Pie tam, nav tādu trīs pilsētu, kuras visas ir savstarpēji savienotas tikai ar vienu transporta veidu. Kāds ir lielākais iespējamais pilsētu skaits Ziemeļzemē?

**3.uzdevums** Ceļotājzemē ir vairākas pilsētas, un viena no tām ir galvaspilsēta. Katrām divām pilsētām  $A$  un  $B$  ir tiešs avioreiss no  $A$  uz  $B$  un tiešs avioreiss no  $B$  uz  $A$ , pie tam ir zināms, ka abu virzienu cenas sakrīt. Papildus zināms, ka visi maršruti, kas apceļo katru pilsētu vienu reizi un atgriežas sākumpunktā, maksā vienādu summu. Pierādīt, ka visi ceļojumi, kas tieši vienu reizi apmeklē katru pilsētu, izņemot galvaspilsētu, un atgriežas sākumpunktā, arī maksā vienādu summu.

**4.uzdevums** Dots naturāls skaitlis  $n \geq 3$ . Portālā *draugiem.lv* ir  $n^3$  lietotāju, un daži no šiem lietotājiem ir *draugi*. Kopa no vismaz trim lietotājiem tiek saukta par *domubiedru grupu*, ja katrs lietotāju pāris šajā kopā ir draugi. Ir zināms, ka starp jebkuriem  $n$  lietotājiem eksistē 3, kas veido domubiedru grupu. Pierādīt, ka portālā eksistē domubiedru grupa ar 5 lietotājiem.