Invarianti

Ilmārs Štolcers

1 Ievads

Šajā materiālā aplūkosim tēmu par invariantiem (un tiem līdzīgajiem monovariantiem), ar kuriem noteikti katram ir sanācis saskarties jau kādā no Latvijas olimpiādēm. Koncepts par fiksētiem lielumiem ir ļoti vispārīgs un dažādās formās parādās visās matemātikas nozarēs, jo spēj dot paredzamību kāda procesa ietvaros, kas ir ļoti svarīga matemātiķiem, kuri parasti grib redzēt precīzu rezultātu.

2 Teorija

2.1 Invarianti un monovarianti

Bieži uzdevumos procesa gaitā var atrast tādus lielumus, kuri nemainās procesa gājienu/notikumu laikā. Šie lielumi ir ļoti svarīgi, jo tie var palīdzēt iegūt pretrunīgus nosacījumus procesa sākuma un beigu stāvokļiem. Biežākais šāda veida piemērs Latvijas olimpiādēs ir saistībā ar paritāti – piemēram, krāsošanas uzdevumos beigās būtu jānoklāj nepāra skaits iekrāsotu rūtiņu, taču sākumā ir noklāts pāra skaits iekrāsotu rūtiņu, un katra jaunā figūra arī noklāj pāra skaitu rūtiņu. No tā var secināt, ka procesa gaitā vienmēr būs noklāts pāra skaits rūtiņu, kas ir pretrunā ar prasīto gala stāvokli, tādēļ to nav iespējams sasniegt.

Definīcija. Par **invariantu** sauc tādu lielumu, kas procesa gaitā paliek nemainīgs, t.i., pēc katra veiktā procesa gājiena tas saglabā savu vērtību/īpašību.

Ne visi invarianti, ko var atrast uzdevumā, palīdz risināt uzdevumu. Piemēram, kauliņu kopējā skaita nemainība nenosaka to, cik un kāda veida kaudzēs tos ir iespējams sadalīt. Tādēļ ir svarīgi mācēt atrast invariantus, kuri tiešā veidā ietekmē procesā notiekošo.

Definīcija. Par **monovariantu** sauc tādu lielumu, kas procesa gaitā mainās monotoni jeb vienā veidā – piemēram, ja katrā gājienā tā vērtība pieaug.

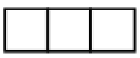
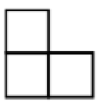
Pēc būtības monovarianti vispārina invariantus. Bieži monovariantus ir vērts saistīt ar lielākajiem vai mazākajiem elementiem, lai parādītu, ka tie izmainās pretējā virzienā uzdevumā prasītajam.

3 Uzdevumu risināšanas piemēri

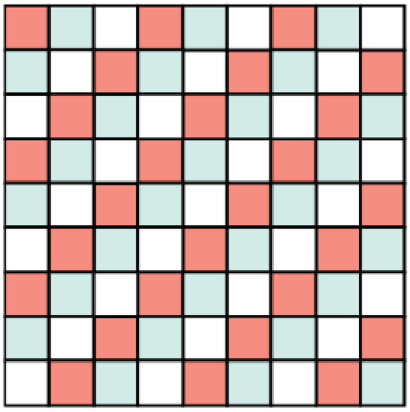
3.1 Krāsošanas uzdevumu invarianti

Ar šo invariantu klasi noteikti katram lasītājam ir sanācis daudz saskarties Latvijas līmeņa olimpiādēs. Domājot par krāsojumiem, svarīgi ir izvēlēties krāsojumu, kurš kontrolēti iekļaujas apskatāmajās figūrās. Vieglāk to redzēt ar dažiem piemēriem.

1.piemērs Vai kvadrātu ar izmēriem 9×9 rūtiņas var noklāt ar 26 garajām figūrām, kādas dotas attēlā pa kreisi, un vienu attēlā pa labi doto L-veida figūru? Kvadrātam jābūt pilnībā noklātam. Figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt.

Atrisinājums. Nē, to nav iespējams izdarīt. Pieņemsim pretējo, ka prasītais klājums eksistē. Izkrāsojam laukumu trīs krāsās diagonālveidā kā zemāk attēlā, pie tam izvēlamies diagonāļu virzienu tā, lai L-veida figūra saturētu divas rūtiņas no vienas krāsas.

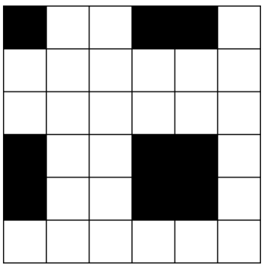


Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka L-veida figūra satur divas zilas un vienu sarkanu rūtiņu. Tādā gadījumā nenoklātas paliek 25 zilas, 26 sarkanas un 27 baltas rūtiņas, jo kvadrātā katras krāsas rūtiņu skaits ir 27. Katra garā figūra noklāj vienu sarkanu, vienu zilu un vienu baltu rūtiņu neatkarīgi no tā, kā to pagriež. Tā kā atlikušajā daļā dažādo krāsu rūtiņu skaits nav vienāds, tad ar garajām figūrām to noklāt nav iespējams, kas ir pretrunā ar pieņēmumu.

Komentārs. Šajā uzdevumā invariants ir krāsu rūtiņu sadalījums garajās figūrās - t.i., lai kā mēs šo figūru novietotu laukumā, tā vienmēr būs nokrāsota paredzamā veidā. Krāsošanas uzdevumu galvenā ideja ir izdomāt krāsojumu, kurā tiek kontrolēts iekrāsoto rūtiņu daudzums neatkarīgi no figūru novietojuma.

2.piemērs Katrā $n \times n$ laukuma rūtiņā atrodas lampa. Sākumā visas lampas ir izslēgtas. Gājienā drīkst izvēlēties m secīgas lampas kādā rindā vai kolonnā un visām tām nomainīt stāvokli uz pretējo (izslēgts/ieslēgts). Pierādīt, ka galīgā gājienu skaitā visas lampas var ieslēgt tikai tad, ja n dalās ar m.

Atrisinājums. Sanumurējam laukuma rindas un kolonnas no 1 līdz n. Iekrāsojam tās rūtiņas, kurām abas koordinātas dod atlikumu 0 vai 1, dalot ar m. Zemāk redzams piemērs krāsojumam, kurā $n = 6$ un $m = 4$.



Viegli pārliecināties, ka starp jebkurām m secīgām rūtiņām būs vai nu 0, vai 2 iekrāsotas rūtiņas. Tas nozīmē, ka m secīgu lampu pārslēgšana nemainīs paritāti ieslēgto lampu skaitam iekrāsotajās rūtiņās (ieslēgto lampu skaits mainās par $-2, 0$ vai $+2$). Tā kā sākumā visas lampas ir izslēgtas, tad visu procesu laiku iekrāsotajās rūtiņās būs pāra skaits ieslēgto lampu.

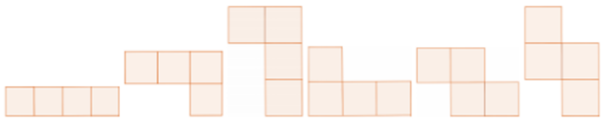
Taču varam pierādīt, ka iekrāsoto rūtiņu skaits ir nepāra, ja n nedalās ar m. Tas ir viegli redzams no fakta, ka $n = qm + r$, kur $1 \leq r \leq m - 1$, katrai vērtībai $2 \leq i \leq q$ ir atrodams skaitļu pāris im un $im + 1$, izņemot skaitli 1. Tādēļ visas rūtiņas (gan rindās, gan kolonnās) krāsosies pa pāriem vai četriniekiem, izņemot rūtiņu ar koordinātām $(1, 1)$. Tātad šajā gadījumā nevar būt, ka visas iekrāsoto rūtiņu lampas kādā brīdī būs ieslēgtas.

Situācijā, kad n dalās ar m, acīmredzami var sadalīt laukumu $1 \times m$ sloksnēs un ieslēgt visas lampas, tādēļ šajā gadījumā prasītais ir sasniedzams.

Komentārs. Sākotnēji šis krāsojums varētu likties nemotivēts. Taču to var loģiski izdomāt, uzliekot noteikta veida ierobežojumus - mēs vēlamies, lai katrā $1 \times m$ sloksnē būtu 2 iekrāsotas rūtiņas. Šādu krāsojumu var izveidot, iekrāsojot kaut kādas 2 rūtiņas pirmajā sloksnē, un tad to secīgi bīdot uz priekšu. Ja kādā brīdī samazinās sloksnē iekrāsoto rūtiņu skaits, tas nozīmē, ka ir sasniegts punkts, kurā atkal vajag iekrāsot rūtiņas.

Papildus tam šajā uzdevumā galvenais stāsts ir par paritāti, kas ierasti atrisina lielāko daļu krāsošanas uzdevumu.

3.piemērs Vai ir iespējams noklāt 6×6 rūtiņu kvadrātu, izmantojot zīmējumā zemāk redzamās figūras? Figūras drīkst atkārtoties, taču tās nedrīkst rotēt vai simetriski atspoguļot.



Atrisinājums. Nē, tas nav iespējams. Izkrāsojam laukumu zemāk redzamajā diagonāļu veidā, šoreiz krāsu vietā izmantojot skaitliskus svarus.

2^10	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5
2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4
2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Varam viegli pārbaudīt, ka ikviena no dotajām figūrām satur svarus no 4 secīgām diagonālēm. Ņemot vērā izveidoto svaru sadalījumu, katras figūras noklāto rūtiņu summa būs $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 2^x \cdot (1 + 2 + 4 + 8) = 2^x \cdot 15$. Varam secināt, ka derīga klājuma gadījumā visu figūru kopējā noklātā summa dalās ar 15.

Saskaitīsim kopējo summu visiem laukuma svariem. Skaitot pa rindām, kopējā summa ir

$$1 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + \ldots + 2^5 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) =$$
$$= (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)^2 = (2^6 - 1)^2 = 63^2.$$

Taču 63^2 nedalās ar 5, un attiecīgi ar 15. Tas nozīmē, ka laukums nevar būt noklāts ar aplūkotajām figūrām.

Komentārs. Krāsojumi pēc būtības sevī ietver matemātisku sakarību, ko ir iespējams arī pierakstīt skaitliskā veidā kā algebrisku sakarību (piemēram, iekrāsota rūtiņa ir 1, neiekrāsota - 0). Izmantojot svarus, mēs paplašinām krāsojuma jēdzienu un varam sameklēt vēl sarežģītākas sakarības starp rūtiņu novietojumu. Interesentiem ieteicams palasīt tālāk par komplekso skaitļu svariem un to saistību ar polinomu atrisinājumiem, kā arī analītiskās ģeometrijas metodēm un to lietojumu šāda tipa uzdevumos.

3.2 Algebriskie invarianti

1.piemērs Skaitļi $1, 2, \ldots, 10$ ir uzrakstīti uz tāfeles. Katru minūti Andrejs izvēlas trīs skaitļus a, b, c, nodzēš tos un to vietā uzraksta skaitli $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Šis process turpinās līdz brīdim, kamēr vairāk nevar nodzēst skaitļus. Noteikt lielāko iespējamo skaitli, kas tajā brīdī var būt uzrakstīts uz tāfeles.

Atrisinājums. Meklēsim lielumu, kas procesa laikā saglabājas invariants. Aplūkojam uz tāfeles uzrakstīto skaitļu kvadrātu summu. Sākotnēji tā ir $1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$. Viena gājiena laikā aizstāto skaitļu kvadrātu summa ir $a^2 + b^2 + c^2$, bet iegūtā skaitļa kvadrāts ir $a^2 + b^2 + c^2$. Līdz ar to varam secināt, ka procesa laikā šis lielums paliek nemainīgs jeb invariants.

Varam arī ievērot, ka procesā katra gājiena laikā uzrakstīto skaitļu daudzums samazinās par 2, tātad beigās būs palikuši divi skaitļi. Acīmredzami, ka jebkurā gājienā jauniegūtais skaitlis būs vismaz tikpat liels, cik mazākais no trim izvēlētajiem skaitļiem (to viegli algebriski pārbaudīt). Tātad uz tāfeles jebkurā brīdī uzrakstītie skaitļi visi būs lielāki vai vienādi ar 1. Tā kā divu beigās palikušo skaitļu kvadrātu summa ir 385, un mazākais iespējamais skaitlis uz tāfeles ir 1, tad lielākais iespējamais skaitlis beigās ir $\sqrt{384} = 8\sqrt{6}$. To var sasniegt, secīgi veicot gājienus ar skaitļiem $2, 3, \ldots, 10$ un to radītajiem jaunajiem skaitļiem.

Komentārs. Šāda veida uzdevumos, kur tiek veikti algebriski pārveidojumi ar skaitļiem, parasti tiek meklēti algebriski invarianti atkarībā no procesa pārveidojuma izteiksmes.

Svarīgi arī atcerēties, ka uzdevumos, kur jāatrod lielākā vai mazākā vērtība, risinājumam ir nepieciešamas divas daļas – pirmkārt, ka lielāka vai mazāka vērtība nav iespējama (novērtējums), un otrkārt, ka optimālo vērtību patiešām var sasniegt. Ja kāda no šīm daļām iztrūkst, tad būtība ir iegūts novērtējums no vienas puses, piemēram, $x \geq 5$, taču tas negarantē, ka mazākā iespējamā x vērtība patiešām ir 5, jo var gadīties, ka reāli mazākā iespējamā vērtība ir $x = 7$, kam iegūtais novērtējums arī izpildās.

2.piemērs Uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi 256, 6561 un 390625. Atkārtoti drīkst veikt gājienu - katram skaitlim izrēķināt pārējo divu skaitļu vidējo ģeometrisko, un visus skaitļus aizstāt ar izrēķinātajiem vidējiem ģeometriskajiem. Vai ir iespējams, ka pēc galīga gājienu skaita uz tāfeles uzrakstītie skaitļi ir 3000, 2012 un 7175?

Atrisinājums. Apzīmēsim uz tāfeles uzrakstītos skaitļus ar a, b, c. Tad gājiena laikā tie tiek aizstāti ar skaitļiem $\sqrt{bc}, \sqrt{ca}, \sqrt{ab}$. Ievērosim, ka gan pirms, gan pēc gājiena skaitļu reizinājums ir abc, kas paliek invariants gājienu laikā. Sākotnēji skaitļu reizinājums ir $256 \cdot 6561 \cdot 390625 = 2^8 \cdot 3^8 \cdot 5^8$, kas procesa gaitā nemainās, taču $3000 \cdot 2012 \cdot 7175 \neq 2^8 \cdot 3^8 \cdot 5^8$, kas nozīmē, ka šos skaitļus nevar sasniegt.

Komentārs. Bieži vien šāda veida uzdevumos ir vērts skatīties uz visu skaitļu summu vai reizinājumu. To, kurš no lielumiem ir piemērotāks, nosaka konkrētā operācija un algebriska intuīcija. Piemēram, kvadrātsakņu summu ir grūti pārveidot uz parastām izteiksmēm, tādēļ noder celšana kvadrātā (iepriekšējais uzdevums) vai reizināšana (šeit).

3.piemērs Uz galda ir noliktas 2^m papīra lapiņas, uz katras no kurām ir uzrakstīts skaitlis 1. Ir atļauts veikt gājienus, kur gājiena laikā izvēlas divas lapiņas, uz kurām ir rakstīti skaitļi a un b, šos skaitļus izdzēš un uz abām lapiņām uzraksta skaitli $a+b$. Pierādīt, ka pēc $m2^{m-1}$ gājieniem uz visām lapiņām uzrakstīto skaitļu summa ir vismaz 4^m.

Atrisinājums. Ar S un P attiecīgi apzīmēsim visu lapiņu skaitļu summu un reizinājumu. Aplūkojam, kā mainās skaitļu reizinājums viena gājiena ietvaros. Tā kā skaitļi mainās tikai uz divām lapiņām, tad mūs interesē to izmaiņa. Pirms gājiena šo skaitļu reizinājums ir ab, bet pēc gājiena reizinājums ir $(a+b)^2$. Ir zināms, ka izpildās nevienādība

$$(a+b)^2 \geq 4ab \iff (a-b)^2 \geq 0.$$

Tas nozīmē, ka $\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$, tātad P palielinās vismaz 4 reizes gājiena laikā. Sākotnējais skaitļu reizinājums ir 1, tātad pēc $m2^{m-1}$ gājieniem $P \geq 4^{m2^{m-1}}$. Izmantojam sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko (AM-GM), lai iegūtu

$$\frac{S}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{P}$$

$$S \geq 2^m \cdot \sqrt[2^m]{P} \geq 2^m \cdot \sqrt[2^m]{4^{m2^{m-1}}} = 2^m \cdot \sqrt[2^m]{2^{m \cdot 2^m}} = 2^m \cdot 2^m = 4^m,$$

kas pierāda prasīto.

Komentārs. Summa un reizinājums ir labi invariantu lielumi no arī šāda skatpunkta, ka tos savstarpēji var novērtēt, izmantojot AM-GM nevienādību.

3.3 Procesu uzdevumu invarianti

1.piemērs Trijās konfekšu kaudzēs uz galda ir attiecīgi 5, 49 un 51 konfekte. Māris drīkst jebkuras divas uz galda esošas kaudzes apvienot vienā kaudzē, vai arī jebkuru kaudzi, kura satur pāra skaitu konfekšu, sadalīt divās kaudzēs ar vienādu konfekšu skaitu. Vai, veicot atļautās darbības, Māris no sākotnējām 3 kaudzēm var iegūt 105 konfekšu kaudzes, kur katrā no tām ir tieši 1 konfekte?

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim šādu apgalvojumu.

Apgalvojums. Ja konfekšu skaits visās kaudzēs dalās ar p, kur p ir nepāra pirmskaitlis, tad pēc operāciju veikšanas visās kaudzēs konfekšu skaits joprojām dalās ar p.
Pierādījums. Apvienojot 2 kaudzes, kurās ir attiecīgi ap un bp konfektes (a, b – naturāli skaitļi), tiks iegūta kaudze ar $(a+b)p$ konfektēm. Savukārt, sadalot kaudzi ar $2ap$ konfektēm, tiks iegūtas 2 kaudzes ar ap konfektēm. Ievērosim, ka neatkarīgi no veiktajām operācijām konfekšu skaits katrā kaudzē joprojām dalās ar p.

Tā kā visās kaudzes sākotnēji ir nepāra skaits konfekšu, tad nevienu no tām nav iespējams sadalīt divās vienādās daļās. Tādēļ iespējamas ir tikai trīs operācijas:

- apvienot kaudzes ar 5 un 49 konfektēm. Tādā gadījumā iegūstam kaudzes ar 54 un 51 konfekti. Abās kaudzēs konfekšu skaits dalās ar 3. No apgalvojuma izriet, ka neatkarīgi no veiktajām operācijām konfekšu skaits katrā kaudzē vienmēr dalīsies ar 3. Līdz ar to nevarēs panākt to, ka katrā kaudzē ir tieši 1 konfekte.

- apvienot kaudzes ar 5 un 51 konfekti. Tādā gadījumā iegūstam kaudzes ar 56 un 49 konfektēm. Abās kaudzēs konfekšu skaits dalās ar 7. No apgalvojuma izriet, ka neatkarīgi no veiktajām operācijām konfekšu skaits katrā kaudzē vienmēr dalīsies ar 7. Līdz ar to nevarēs panākt to, ka katrā kaudzē ir tieši 1 konfekte.

- apvienot kaudzes ar 49 un 51 konfekti. Tādā gadījumā iegūstam kaudzes ar 100 un 5 konfektēm. Abās kaudzēs konfekšu skaits dalās ar 5. No apgalvojuma izriet, ka neatkarīgi no veiktajām operācijām konfekšu skaits katrā kaudzē vienmēr dalīsies ar 5. Līdz ar to nevarēs panākt to, ka katrā kaudzē ir tieši 1 konfekte.

Secinām, ka prasīto panākt nevarēs.

2.piemērs Uz tāfeles ir uzrakstīti 2020 pozitīvi reāli skaitļi. Katru minūti Ramona nodzēš divus skaitļus un to vietā uzraksta vai nu to summu, vai starpību, vai reizinājumu, vai dalījumu. Piemēram, ja Ramona izdzēš skaitļus 6 un 3, tad viņa var aizvietot tos ar vienu skaitli no kopas $\{6+3, 6-3, 3-6, 6\times 3, 6\div 3, 3\div 6\} = \{9, 3, -3, 18, 2, 0.5\}$. Pēc 2019 minūtēm uz tāfeles ir palicis tikai viens skaitlis, kas ir -2020. Pierādīt, ka Ramona varēja dzēst skaitļus un veikt aritmētiskas operācijas tā, lai uz tāfeles būtu palicis skaitlis 2020 (sākotnējie skaitļi paliek nemainīgi).

Atrisinājums. Ievērosim, ka vismaz vienu reizi Ramona veica atņemšanas operāciju, jo visas pārējās operācijas pozitīviem skaitļiem vienmēr dod pozitīvu skaitli. Izmantojot tikai tās sākotnējiem skaitļiem, gala rezultāts arī būtu pozitīvs, taču tika iegūts skaitlis -2020.

Secīgi pēc gājieniem aplūkosim pēdējo atņemšanu, apzīmējot to ar $a-b$. Tās vietā Ramona veic operāciju $b-a$, iegūtajam skaitlim piešķirot sarkanu krāsu. Tālākajiem gājieniem, starp kuriem vairs nevar būt atņemšana, Ramona izpilda šādu algoritmu:

- Ja operācijā nav iesaistīts sarkans skaitlis, tad Ramona atstāj operāciju nemainītu.
- Ja operācijā ir iesaistīts sarkans skaitlis un tā ir reizināšana vai dalīšana, tad Ramona atstāj operāciju nemainītu un rezultātu atzīmē sarkanu. Skaidrs, ka rezultātā tiks iegūts skaitlis ar tādu pašu absolūto vērtību, kā oriģinālajā operāciju secībā, tikai ar pretēju zīmi.
- Ja operācijā ir iesaistīts sarkans skaitlis un tā ir saskaitīšana, tad Ramona aizstāj to ar ne-sarkanā skaitļa atņemšanu no sarkanā skaitļa un rezultātu atzīmē sarkanu. Skaidrs, ka rezultātā tiks iegūts skaitlis ar tādu pašu absolūto vērtību, kā oriģinālajā operāciju secībā, tikai ar pretēju zīmi.

Tā kā pēc pēdējās atņemšanas uz tāfeles vienmēr ir viens sarkans skaitlis (to skaits nesamazinās un nepalielinās procesa gaitā), tad pēdējais skaitlis arī būs sarkans. No iegūtā algoritma ir skaidrs, ka pēdējam skaitlim būs pretēja zīme un tāda pati absolūtā vērtība kā sākotnējam beigu rezultātam, tātad tas būs 2020.

Komentārs. Šī uzdevuma esence ir atrast lielumu, kas noteikti būs atrodams (invariants) uzdevumā dotajā situācijā – šinī gadījumā tā ir obligātā atņemšana, lai iegūtu negatīvu skaitli. Kā jau minēts, šādu obligāto nosacījumu atrašana var ievērojami palīdzēt risināšanā.

3.piemērs Rindā ir sakārtotas $a+b$ bļodas, kuras ir arī sanumurētas no 1 līdz $a+b$, kur a un b ir naturāli skaitļi. Sākotnēji pirmajās a bļodās ir ābols, bet pēdējās b bļodās ir Big-Mac komplekts. Vienā gājienā Petr var pārvietot ābolu no i-tās bļodas uz $(i+1)$-to bļodu un Big-Mac komplektu no j-tās bļodas uz $(j-1)$-to bļodu, ja starpība $i-j$ ir pāra skaitlis. Vienā bļodā var atrasties vairāki ēdieni. Petr mērķis ir panākt to, lai pirmajās b bļodās katrā ir Big-Mac komplekts un pēdējās a bļodās katrā ir ābols. Pierādīt, ka viņš to var izdarīt tad un tikai tad, ja skaitlis ab ir pāra.

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim, ka prasīto nevar sasniegt, kad ab ir nepāra skaitlis. Ievērosim, ka tādā gadījumā gan a, gan b ir nepāra.

Ar X apzīmēsim ābolu skaitu bļodās ar nepāra numuru, bet savukārt ar Y - Big-Mac skaitu nepāra bļodās. Lasītājs var viegli pārliecināties, ka lielums $X-Y$ nemainās, veicot atļautās operācijas, jo vienmēr tiek izvēlēti ēdieni, kas atrodas vienādas paritātes numuru bļodās. Ievērosim, ka sākotnēji

$X = \frac{1}{2}(a+1)$ un $Y = \frac{1}{2}(b-1)$, kas nozīmē, ka $X - Y = \frac{1}{2}(a-b+2)$. No otras puses, gala situācijā mēs vēlētos panākt, ka $X = \frac{1}{2}(a-1)$ un $Y = \frac{1}{2}(b+1)$, bet tādā gadījumā $X - Y = \frac{1}{2}(a-b-2)$ - pretruna ar to, ka $X - Y$ nemainās.

Tagad pierādīsim, ka prasīto var sasniegt, kad ab ir pāra skaitlis. Pierādīsim prasīto ar matemātiskās indukcijas metodi uz $a+b$, kur bāzes gadījumus var viegli pārbaudīt. Šķirosim gadījumus:

- Pieņemsim, ka $a+b$ ir nepāra skaitlis. Tad mēs varam pārvietot pirmo ābolu uz bļodu, kur atradās pēdējais Big-Mac un otrādi. To var izdarīt, secīgi izvēloties tikai šos divus minētos ēdienus, jo $(a+b)-1, (a+b)-3, \ldots$ ir pāra skaitļi. Tas reducē uzdevumu uz gadījumu $(a-1, b-1)$ (viens no skaitļiem a, b ir nepāra, līdz ar to viens no skaitļiem $a-1, b-1$ ir nepāra), kur mēs varam pielietot induktīvo pieņēmumu.

- Pieņemsim, ka $a+b$ ir pāra skaitlis (abi skaitļi ir pāra). Tādā gadījumā mēs varam samainīt vietām ābolu 1-jā pozīcijā ar Big-Mac $a+b-1$-jā pozīcijā, kā arī ābolu 2-jā pozīcijā ar Big-Mac $a+b$-tajā pozīcijā. Tas reducē uzdevumu uz gadījumu $(a-2, b-2)$, kur mēs varam pielietot induktīvo pieņēmumu.

Tā kā visi iespējamie gadījumi ir aplūkoti, uzdevums ir atrisināts

4.piemērs Galerijā "Ekspresionists" ir izstādītas 100 gleznas, apzīmēsim tās ar $G_1, G_2, \ldots, G_{100}$. Mākslinieks un kritiķis spēlē šādu spēli. No sākuma mākslinieks katrai no gleznām izdomā cenu, kas ir naturāls skaitlis, apzīmēsim cenas attiecīgi ar $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{100}$. Pēc tam katrā gājienā:

- mākslinieks nosauc kādu naturālu skaitli x;

- kritiķis izvēlas gleznu G_i un nomaina tās cenu uz x (t.i., tagad $c_i = x$, pārējās c_j vērtības, kurām $j \neq i$, nemainās).

Ja pēc kāda gājiena cenas ir sakārtotas nedilstošā secībā $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{100}$, tad kritiķis ir uzvarējis un spēle beidzas. Pretējā gadījumā spēle turpinās. Vai kritiķis vienmēr var uzvarēt galīgā skaitā gājienu neatkarīgi no tā, kā spēlē mākslinieks?

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu, lai pierādītu, ka kritiķis var uzvarēt jebkuram naturālam gleznu skaitam n.

Indukcijas bāze: Ja $n = 1$, tad acīmredzami pēc pirmā gājiena kritiķis būs uzvarējis.

Induktīvais pieņēmums: Pieņemsim, ka naturālam k kritiķis var sakārtot k gleznas nedilstošā cenu secībā.

Induktīvā pāreja: Aplūkosim situāciju, kad ir $k+1$ glezna. No induktīvā pieņēmuma kritiķis var pirmās k gleznas sakārtot nedilstošā cenu secībā. Ja $c_{k+1} \geq c_k$, tad prasītais izpildās; aplūkosim pretējo situāciju. Veidosim kritiķa darbības algoritmu atkarībā no mākslinieka izvēlētā skaitļa x katrā gājienā:

- Ja $x \geq c_k$. Šajā gadījumā kritiķis aizstāj c_{k+1} ar x. Tā kā pirmās k gleznas jau ir sakārtotas nedilstošā cenu secībā, tad acīmredzami visas $k+1$ gleznas ir sakārtotas nedilstošā cenu secībā un kritiķis ir uzvarējis.

- Ja $x < c_k$. Tad kritiķis pēc kārtas salīdzina gleznu cenas ar x, sākot ar c_1, tad c_2 utt. līdz c_k. Kad kritiķis atrod pirmo gleznu G_i, ka $x < c_i$, viņš aizstāj c_i ar x. Šāda glezna noteikti eksistēs, jo $x < c_k$.
  Šajā gadījumā varam attiecīgi ievērot, ka pēc c_i aizstāšanas gleznu cenas joprojām ir sakārtotas nedilstošā secībā, jo no algoritma $x \geq c_{i-1}$. Papildus tam var secināt, ka pirmo k gleznu cenu summa samazinās, jo $x < c_i$.

Izmantojot šādu algoritmu, kritiķis var garantēt uzvaru, jo algoritms garantēti kādā brīdī nonāks gadījumā $x \geq c_k$. Tas izriet no tā, ka otrā gadījumā pirmo k gleznu cenu summa katru reizi samazinās, taču tā nevar kļūt mazāka par k (kad $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 1$). Ja tā sasniedz minimumu, tad acīmredzami $x \geq c_k$ un visas gleznas ir sakārtotas nedilstošā cenu secībā. Līdz ar to induktīvā pāreja ir pierādīta.

Tā kā esam pierādījuši, ka kritiķis uzvar visiem naturāliem n, tad viņš uzvar arī gadījumā $n = 100$, kas bija jāpierāda.

Komentārs. Procesos samērā bieži ir iespējams esošo situāciju reducēt uz mazāku ekvivalentu situāciju, un formāliem pierādījumiem tad ļoti piemērota ir matemātiskā indukcija. Šeit arī vērts ievērot monovarianta lietojumu kopā ar īpašību, ka naturālie skaitļi nevar samazināties bezgalīgi – ideja, kas ir pamatā daudziem fundamentāliem rezultātiem gan kombinatorikā, gan skaitļu teorijā.

5.piemērs Uz tāfeles virknē uzrakstīti vairāki naturāli skaitļi. Alise atkārtoti veic šādu gājienu - izvēlas blakus stāvošus skaitļus x un y tā, ka $x > y$ un x atrodas pa kreisi no y, un tad šo pāri (x, y) nodzēš, un tā vietā uzraksta vai nu $(y + 1, x)$, vai $(x - 1, x)$. Pierādīt, ka Alise šo spēli nevar turpināt bezgalīgi.

Atrisinājums. Pirmkārt, ievērosim, ka operācijas nemaina virknes maksimumu, ko apzīmēsim ar M. Apzīmēsim virknē uzrakstītos skaitļus ar $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Aplūkojam lielumu

$$S = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n.$$

Pierādīsim, ka S procesa gaitā monovarianti palielinās. Pieņemsim, ka (x, y) tiek aizstāts ar $(y + 1, x)$. Tad

$$\begin{aligned} cx + (c+1)y &< c(y+1) + (c+1)x \\ \iff y &< c + x, \end{aligned}$$

kas ir patiesi, jo $x > y$. Tātad šajā gadījumā S palielinās.

Pieņemsim, ka (x, y) tiek aizstāts ar $(x - 1, x)$. Tad

$$\begin{aligned} cx + (c+1)y &< c(x-1) + (c+1)x \\ \iff cy + y &< c(x-1) + x, \end{aligned}$$

kas ir patiesi, jo $x - 1 \geq y$ un $x > y$. Arī šajā gadījumā S palielinās.

No otras puses, $S \leq (1 + 2 + \cdots + n)M$, jo $a_i \leq M$ visiem $i = 1, \ldots, n$. Tā kā S palielinās katrā gājienā un nekad nepārsniedz $(1 + 2 + \cdots + n)M$, tad procesam ir jāapstājas pēc galīga gājienu skaita.

Komentārs. Uzdevumā izmantotā monovarianta izteiksme ir zināma kā viens no *klasiskajiem* monovariantiem, kurš sevī ietver informāciju par pozīcijas svarīgumu. Šādas svērtas izteiksmes bieži mēdz realizēt arī ar citām skalām (piemēram, pozīcijām piešķirot svarus, kas ir secīgas divnieka pakāpes) tīri ar mērķi mākslīgi izveidot izteiksmi, kura mainās monovarianti.

6.piemērs Kādā 10×10 rūtiņu laukumā ir inficētas 9 rūtiņas. Katru minūti tās rūtiņas, kurām blakus (ar kopīgu malu) atrodas vismaz 2 inficētas rūtiņas, arī kļūst inficētas. Vai ir iespējams, ka pēc galīga laika viss rūtiņu laukums kļūst inficēts?

Atrisinājums. Nē, tas nav iespējams. Aplūkojam inficēto rūtiņu kopējo perimetru, ko apzīmējam ar P. Sākuma stāvoklī P nepārsniedz $4 \times 9 = 36$ vienības. Aplūkojam iespējamās situācijas, kad tiek inficēta jauna rūtiņa. Tādā gadījumā tai ir $2, 3$ vai 4 inficētas kaimiņu rūtiņas. Aplūkojot visus iespējamos gadījumus, var secināt, ka 2 inficētu kaimiņu gadījumā P nemainās, savukārt, ja ir 3 vai 4 inficēti kaimiņi, tad P samazinās. Tas nozīmē, ka P vērtība procesa gaitā mainās monovarianti un nekad nebūs lielāka par sākotnējo vērtību 36. Taču pilnam 10×10 laukumam perimetrs ir 40, kas nozīmē, ka nav iespējama situācija, kurā viss laukums ir inficēts.

Komentārs. Reizēm uzdevuma invariants var likties ļoti attāls no uzdevuma tekstā sagaidāmajiem invariantiem - galu galā labu kombinatorikas uzdevumu viena no pamattēzēm ir, ka risinājums ir tieši vērsts uz radošumu un nestandarta izmantojumu zināmiem faktiem. Šī uzdevuma monovariantu ir ievērojami vieglāk izdomāt, ja ir izrēķināts liels daudzums uzdevumu, kur kādā varētu būt parādījusies līdzīga tipa ideja par rūtiņu laukumiem un perimetriem.

7.piemērs Rindā ir 2022 secīgi sanumurētas rūtiņas. Alise un Bobs spēlē spēli. Sākotnēji visās rūtiņās ar nepāra numuru tiek ierakstīts burts A, bet rūtiņās ar pāra numuru - burts B. Tad Alise sāk spēli, secīgi mainoties ar gājieniem ar Bobu.
Savā gājienā spēlētājs spēlētājs izvēlas divas rūtiņas, kas neatrodas blakus, kurās ir ierakstīts spēlētājam atbilstošais burts un starp kurām atrodas tikai rūtiņas ar otra spēlētāja burtu. Gājienā laikā visās rūtiņās, kas atrodas starp izvēlētajām, burts tiek nomainīts uz spēlētāja burtu.

Atrisinājums. Alise var garantēt 1011 rūtiņas ar A burtu.

Nosauksim par *ķēdi* secīgu viena veida burtu secību, kurai abās pusēs ir otrs burts vai rindas gals. Ievērosim, ka sākuma stāvoklī ir 1011 burtu A ķēdes (ar garumu 1) un 1011 burtu B ķēdes. Ievērojam, ka gājiena laikā A un B ķēžu skaits katrs samazinās par 1. Tas ir tādēļ, ka viena ķēde tiek pārmainīta uz pretējo burtu, kā arī divas viena burta ķēdes tādā gadījumā saplūst kopā vienā ķēdē (kurai pa vidu vēl tiek pievienoti nomainītie burti). Papildus ievērosim, ka ķēdes, kurām vienā galā ir rindas gals, uzdevuma ietvaros nav iespējams nomainīt uz pretējo burtu, jo tām nevar vienlaicīgi abās pusēs izvēlēties pretējo burtu. Tas nozīmē, ka gala stāvoklī noteikti būs viena A ķēde un viena B ķēde (sākumā pie galiem ir šīs divas ķēdes), kuru skaits attiecīgi arī tad nevarēs izmainīties (rindai ir tikai 2 gali). Tā kā visas pārējās ķēdes vienmēr būs ietvertas starp divām pretēju burtu ķēdēm un katrā gājienā to skaits samazinās par 1 katram veidam, tad tiks veikti precīzi 1010 gājieni, lai no sākotnējā stāvokļa ar 1011 katra veida ķēdēm nonāktu beigu stāvoklī ar 1 ķēdi no katra veida.

Pierādīsim, ka Alise var garantēt gala stāvoklī A ķēdi ar vismaz 1011 rūtiņām. Kopumā Alise veiks pusi no gājieniem, kas ir 505 gājieni. Alises stratēģija ir šāda - katrā gājienā viņa izvēlas pirmo B ķēdi no kreisās puses (kur pie rindas gala ir A burts) un nomaina tās burtus uz A. Šādā gadījumā rindas gala A ķēdei klāt tiks pievienota viena B ķēde, kuras garums ir vismaz 1, un viena A ķēde, kas bija aiz B ķēdes, kuras garums arī ir vismaz 1. Tātad gājiena laikā rindas gala A ķēdes garums palielinās par vismaz 2. Alise veiks 505 gājienus - šīs ķēdes garums spēles beigs būs vismaz 1011, kas dod vēlamo.

Atliek pierādīt, ka Bobs var neļaut Alisei iegūt ķēdi, kas garāka par 1011 rūtiņām. Viņš seko tādai pašai stratēģijai kā Alise, pagarinot savu gala ķēdi. Veicot 505 gājienus, viņš arī var garantēt, ka B gala ķēdes garums būs vismaz 1011. Tā kā kopumā ir 2022 rūtiņas, tas nozīmē, ka Alise nevarēs nekādā veidā iegūt A ķēdi, kas garāka par $2022 - 1011 = 1011$ rūtiņām. Apvienojot šo ierobežojumu ar iepriekšējā rindkopā pierādīto, ka Alise var panākt A ķēdi ar garumu 1011, secinām, ka tā ir prasītā atbilde.

Komentārs. Šis uzdevums uzsver vairākas svarīgas detaļas:

- Ievērosim, ka šajā uzdevumā ir svarīgs princips par stratēģiju neatkarību – kad runājam par Alises stratēģiju, tad uztveram, ka viņa spēlē pret patvaļīgu spēlētāju, kura nodomi nav zināmi. Līdzīgi arī ar Boba stratēģiju, lai garantētu 1011 rūtiņas – viņš nespēlē pret Alisi ar izvēlētu stratēģiju, bet gan pret patvaļīgu spēlētāju.

- Šajā uzdevumā ir rinda ar divu veidu rūtiņām, kurām aplūkojām *ķēdes*. Šī ideja par ķēdēm ir parādījusies vairākos IMO vai līdzīga līmeņa olimpiāžu uzdevumos, tādēļ ir vērts to atsevišķi uzsvērt. Ķēdēm parasti ir iespējams analizēt to skaita izmaiņu saplūšanas vai sadalīšanas gadījumā, kas nosaka procesa gājienu skaitu vai ķēžu garumu.

- Šajā uzdevumā arī ir svarīgi atrast lielumus, kas nozīmīgi ietekmē procesu visā tā gaitā – ķēdes, kuras atrodas rindas galos un kuras procesā gaitā arī vienmēr tur būs (invariants). Redzam, ka mūsu izveidotā stratēģija pamatā balstās uz to īpašībām.

8.piemērs Divi spēlētāji A un B spēlē spēli. Sākotnēji A izvēlas 1000 nepāra pirmskaitļus (starp kuriem var būt arī vienādi). Pēc tam B izvēlas pusi no tiem un uzraksta uz tāfeles. Tad spēlētāji secīgi veic gājienus, A uzsākot spēli. Katrā gājienā spēlētājs izvēlas $n \geq 1$ uzrakstītus pirmskaitļus $p_1, p_2, \ldots, p_n$, izdzēš tos un vietā uz tāfeles uzraksta visus pirmskaitļu reizinātājus skaitlim $p_1 p_2 \cdots p_n - 2$ (ja kāds pirmskaitlis atkārtojas vairākas reizes, tad tik reižu tas tiek uzrakstīts).
Spēlētājs, pēc kura gājiena tāfele paliek tukša, zaudē. Pierādīt, ka eksistē spēlētājs ar uzvarošu stratēģiju, un noteikt šo spēlētāju.
Piezīme. Tā kā skaitlim 1 nav pirmskaitļu reizinātāju, tad atļauts gājiens ir vienkārši izdzēst vienu skaitli 3.

Atrisinājums. Spēlētājam A eksistē uzvaroša stratēģija. Ar N apzīmējam visu uzrakstīto pirmskaitļu reizinājumu. Ievērojam, ka N ir nepāra. Pierādīsim, ka visas pozīcijas, kurās $N \equiv 1 \pmod 4$, ir uzvarošas, bet pozīcijas, kurās $N \equiv 3 \pmod 4$, ir zaudējošas.

Viena gājiena laikā N samazinās par skaitli $2c$, kur c ir visu to uzrakstīto pirmskaitļu reizinājums, kas netika izvēlēti gājiena laikā (ja tādu nav, tad $c = 1$). Tā kā c ir nepāra, jo procesa laikā acīmredzami tiek rakstīti tikai nepāra skaitļi, tad $2c \equiv 2 \pmod 4$. Tas nozīmē, ka ikvienā gājienā N mainās no $N \equiv 1 \pmod 4$ uz $N \equiv 3 \pmod 4$ vai otrādi. Tātad, ja spēlētājs savā pirmajā gājienā bija situācijā, kurā $N \equiv 1 \pmod 4$, tad visās pārējās spēles situācijās tas joprojām izpildīsies; līdzīgi arī var spriest par gadījumu $N \equiv 3 \pmod 4$.

Tā kā vienīgā situācija, kurā tāfele tiek iztukšota, ir gadījums, ja uz tās ir palicis viens skaitlis 3 (visās pārējās kāds skaitlis tiks uzrakstīts vai paliks uz tāfeles), tad zaudēt var tikai spēlētājs, kurš spēles gaitā vienmēr atradās pozīcijās, kur $N \equiv 3 \pmod 4$, tādēļ tās ir zaudējošas pozīcijas, un attiecīgi pozīcijas ar $N \equiv 1 \pmod 4$ ir uzvarošas. Svarīgi arī pieminēt, ka spēle garantēti kādā brīdī beigsies, jo katrā gājienā N strikti samazinās.

Tādēļ A savā pirmajā gājienā var uzrakstīt 1000 skaitļus 5, kur $5^{1000} \equiv 1 \pmod 4$, un garantēt uzvaru ar jebkādiem atļautiem gājieniem.