Invarianti - 1.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums. Septiņās kuba virsotnēs ir ierakstīts skaitlis 0, bet astotajā – skaitlis 1. *Gājiena* laikā ir atļauts izvēlēties kādu kuba šķautni un abiem skaitļiem šīs šķautnes virsotnēs pieskaitīt 1. Vai ir iespējams, ka pēc galīga gājienu skaita tiek iegūts kubs, kura virsotnēs ir ierakstīti

a) astoņi vienādi skaitļi?

b) astoņi skaitļi, kur katrs no tiem dalās ar 3?

Atrisinājums. a) un b) gadījumos tas nav iespējams.

Sadalām kuba virsotnes divās grupās, lai nekādas divas virsotnes no vienas grupas nebūtu savienotas (attiecīgi katrā grupā tad ir 4 virsotnes, kas ir viena otrai pretī pa diagonālēm). Apzīmēsim skaitļu summas grupās ar S_1 un S_2. Varam ievērot, ka ikvienā gājienā tiek izvēlēta šķautne ar virsotnēm pretējās grupās, līdz ar to gājiena ietvaros gan S_1, gan S_2 palielinās par 1, tātad lielums $S_1 - S_2$ procesa gaitā ir invariants. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka sākumā $S_1 = 1$ un $S_2 = 0$, kā arī $S_1 - S_2 = 1$.

a) Ja visi skaitļi virsotnēs būtu vienādi, pieņemsim, to vērtība būtu a, tad šajā situācijā $S_1 = 4a$ un $S_2 = 4a$, kas nozīmē $S_1 - S_2 = 0 \neq 1$, kas ir pretrunā ar iegūto invariantu. Tātad šāda situācija nav iespējama.

b) Ja visi skaitļi virsotnēs dalītos ar 3, tad attiecīgi arī katras grupas summai būtu jādalās ar 3 jeb $3 \mid S_1$ un $3 \mid S_2$. Šādā situācijā arī jāizpildās $3 \mid S_1 - S_2 = 1$, kas acīmredzami nav iespējams, tātad arī šāda situācija nav sasniedzama.

2.uzdevums. Apaļa pica sastāv no $n \geq 3$ šķēlēm. Sākumā viena no šķēlēm ir apmesta ar sieru uz leju. Vienā gājienā atļauts izvēlēties vienu šķēli, kas ir ar sieru uz leju, apmest to ar sieru uz augšu un divas blakus stāvošās šķēles apmest otrādi. Kādām n vērtībām iespējams sasniegt stāvokli, kurā visas picas šķēles ir ar sieru uz augšu?

Atrisinājums. Prasīto var izdarīt visiem n, kur $n = 3k + 1$ vai $n = 3k + 2$ (k – naturāls skaitlis).

Pierādīsim, ka gadījumā $n = 3k$, kur k ir naturāls, prasīto sasniegt nevar. Sadalām picas šķēles pēc kārtas trijās grupās $A, B, C, A, B, C, \ldots, A, B, C$. Tā kā $n = 3k$, šīs grupas sadalīsies vienmērīgi, tātad katrā gājienā tiks apgriezta viena šķēle no katras grupas. Katrai no grupām aplūkosim šķēļu skaitu, kas ir pagrieztas ar sieru uz leju, apzīmējam tos ar S_A, S_B, S_C. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka sākumā viena pagrieztā šķēle ir grupā A. Tad $S_A = 1$ un $S_B = 0, S_C = 0$. Ievērosim, ka ikvienā gājienā katrai grupai tiek apgriezta viena šķēle, tātad mainās katras grupas S paritāte. Tā kā sākumā $S_A \not\equiv S_B \pmod 2$, tad šī paritāšu atšķirība būs invarianta visu procesa laiku. Taču, ja tiktu sasniegta situācija, kurā visas šķēles ir ar sieru uz augšu, tad izpildītos $S_A = S_B = S_C = 0$ un attiecīgi $S_A \equiv S_B \pmod 2$, ko nav iespējams sasniegt pēc iepriekš izsecinātā.

Tālāk parādīsim, kā prasīto sasniegt gadījumos $n = 3k + 1$ un $n = 3k + 2$, kur k ir naturāls. Apzīmējam šķēles ar sieru uz augšu ar 1, bet ar sieru uz leju – ar 0. Veicam šādu algoritmu:

1. Pirmajā gājienā pārveidojam $(1, 1, \ldots, 1, 0, 1, 1, \ldots)$ uz $(1, 1, \ldots, 0, 1, 0, 1, \ldots, 1)$.

2. Tālāk ar vienu gājienu var pagarināt virkni ar 0 šādā veidā:

$$(\underbrace{0, \ldots, 0, 0}_{m}, \overbrace{1, 0, 1}^{\text{gājiens}}, 1, 1, \ldots) \to (\underbrace{0, \ldots, 0, 0, 0}_{m+1}, \overbrace{0, 1, 0}, 1, 1, \ldots).$$

3. Izmantojam 2.soli $3k$ reizes, lai panāktu situāciju $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Ja $n = 3k + 1$, tad pāriet uz 5.soli.

4. Ja $n = 3k + 2$, veicam papildus vienu šādu gājienu:

$$(0, \ldots, 0, 0, \overbrace{1, 0, 0}^{\text{gājiens}}, 0, 0, \ldots) \to (0, \ldots, 0, 0, \overbrace{0, 1, 1}, 0, 0, \ldots).$$

5. Šajā brīdī ir palikuši 1 vai 2 secīgi vieninieki un $3k$ secīgas nulles. Tās var pārveidot uz vieniniekiem, veicot k šādus secīgus gājienus no vieniniekiem uz priekšu: $(\ldots, \overbrace{0, 0, 0}, \ldots) \to (\ldots, \overbrace{1, 1, 1}, \ldots)$.

Abos gadījumos prasītais tiek sasniegts.

3.uzdevums. Rūtiņu laukums 5×7 ir noklāts ar 3 rūtiņu L-veida figūrām (šādu figūru var izveidot, no 2×2 kvadrāta izgriežot 1 rūtiņu). Figūras drīkst pārklāties, bet tās neiziet ārpus laukuma robežām. Vai ir iespējams, ka ikvienu laukuma rūtiņu noklāj viens un tas pats skaits L-veida figūru?

Atrisinājums. Nē, tas nav iespējams.

Aizpildām rūtiņu laukumu, kā parādīts zīmējumā zemāk.

2	-1	2	-1	2	-1	2
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	2	-1	2	-1	2
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	2	-1	2	-1	2

Saskaitīsim lielumu S, kurš ir summa no katras figūras pārklāto rūtiņu skaitļiem (summējam pa visām L-veida figūrām). Ievērosim, ka ikviena figūra var vai nu pārklāt vienu rūtiņu ar 2 un divas rūtiņas ar -1, vai arī trīs rūtiņas ar -1. Šajos gadījumos attiecīgi figūras rūtiņu skaitļu summa ir 0 vai -3. Redzams, ja skaitām S secīgi pa figūrām, tad iegūsim, ka $S \leq 0$.

Tagad skaitām S pa laukuma rūtiņām. Ievērosim, ka visu laukumā ierakstīto skaitļu summa ir $12 \cdot 2 + 23 \cdot (-1) = 1$. Ja katru laukuma rūtiņu pārklāj k figūras, kur k – naturāls, tad kopējā laukumā esošo pārklājumu summa ir $S = 1 \cdot k > 0$. Tātad jāizpildās $0 < S \leq 0$, kas ir acīmredzama pretruna, un prasītais nav iespējams.

4.uzdevums. Uz tāfeles uzrakstīti 100 skaitļi, kas visi ir izvēlēti no reālo skaitļu intervāla $(0,1)$. *Gājiena* laikā atļauts izvēlēties divus no uzrakstītajiem skaitļiem a, b, un tos aizstāt ar abām vienādojuma $x^2 - ax + b = 0$ reālajām saknēm, ja tādas eksistē. Ja vienādojumam reālu sakņu nav, tad minēto skaitļu pāri gājienā izvēlēties nedrīkst. Pierādīt, ka nav iespējams veikt bezgalīgu skaitu minēto gājienu.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka var veikt bezgalīgu skaitu gājienu. Ievērosim, ka eksistē reāls skaitlis $N < 1$, kurš ir lielāks par visiem uz tāfeles sākotnēji uzrakstītajiem 100 skaitļiem. Aplūkojam kādā patvaļīgā gājienā iegūtās vienādojuma saknes. Tās ir $\frac{a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$, pie tam zināms, ka $a^2 - 4b \geq 0$, ja eksistē divas reālas saknes (iespējams, sakrītošas). Tā kā $0 < a, b < N$, varam novērtēt

$$0 < \frac{a}{2} \leq \frac{a - \sqrt{a^2-4b}}{2} \leq \frac{a + \sqrt{a^2-4b}}{2} < \frac{a + \sqrt{a^2}}{2} = a < N.$$

Redzams, ka gājiena laikā iegūtie skaitļi joprojām izpilda īpašību, ka tie ir intervālā $(0,1)$ un mazāki par N. Tātad šīs īpašības procesa gaitā paliek invariantas.

Apzīmējam uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summu ar S, bet to reizinājumu – ar P. Ar S_0 un P_0 attiecīgi apzīmējam sākotnējo skaitļu summu un reizinājumu. Ievērojam, ka gājiena laikā skaitļi a, b tiek aizstāti ar $x^2 - ax + b = 0$ saknēm x_1, x_2, kurām pēc Vjeta teorēmas izpildās, ka $x_1 + x_2 = a$ un $x_1 \cdot x_2 = b$. Tātad gājiena rezultātā S paliek par $S - b$, bet P paliek par $\frac{P}{a}$, jo pārējie skaitļi nemainās. Ievērosim, ka $\frac{P}{a} > \frac{P}{N}$.

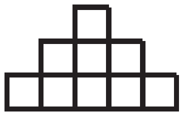
Triviāli ar matemātisko indukciju varam pierādīt, ka pēc M veiktiem gājieniem izpildās $S < S_0$ un $P > \frac{P_0}{N^M}$. Papildus tam, no nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko jāizpildās, ka $\frac{S}{100} \geq \sqrt[100]{P}$. Varam novērtēt šos lielumus pēc M veiktiem gājieniem

$$\frac{S_0}{100} > \frac{S}{100} \geq \sqrt[100]{P} > \sqrt[100]{\frac{P_0}{N^M}} = \frac{\sqrt[100]{P_0}}{N^{\frac{M}{100}}}.$$

Redzams, ka nevienādību kreisajā pusē ir procesa sākumā fiksēts lielums $\frac{S_0}{100}$, savukārt labajā pusē esošais lielums $\frac{\sqrt[100]{P_0}}{N^{\frac{M}{100}}}$ var neierobežoti augt līdz ar M vērtību, jo $N < 1$. Līdz ar to, ja gājienu skaits ir bezgalīgs, acīmredzami tiks sasniegta pietiekami liela M vērtība, kurai izpildīsies $\frac{S_0}{100} < \frac{\sqrt[100]{P_0}}{N^{\frac{M}{100}}}$, kas ir pretrunā ar iegūto novērtējumu, tātad bezgalīgs gājienu skaits nedrīkst notikt.

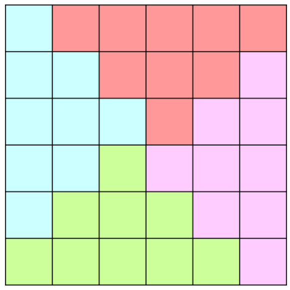
Invarianti - 2.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums. Kādām naturālām n vērtībām ir iespējams pilnībā noklāt $n \times n$ rūtiņu kvadrātu ar attēlā redzamajām figūrām? Klājumā visām rūtiņām jābūt noklātām, figūras savā starpā nedrīkst pārklāties, kā arī tās nedrīkst iziet ārpus kvadrāta robežām.



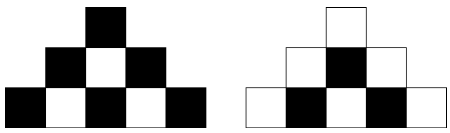
Atrisinājums. Prasīto var izdarīt visiem $n = 6k$, kur k – naturāls skaitlis.

Ja $n = 6k$, kur k ir naturāls, tad $n \times n$ kvadrātu var acīmredzami sadalīt k^2 kvadrātos ar izmēriem 6×6, kuri noklāj visu laukumu un savā starpā nepārklājas. Katru šādu 6×6 kvadrātu var noklāt ar prasītājām figūrām, kā redzams zīmējumā zemāk. Tas pierāda, ka šīs vērtības der.



Tālāk aplūkosim pārējos gadījumus, kad $6 \nmid n$. Katra figūra veidojas no 9 figūrām, tāpēc, ja viss laukums ir noklāts ar šīm figūrām, rūtiņu skaitam ir jādalās ar 9 jeb $9 \mid n^2 \implies 3 \mid n$. Tātad neder gadījumi, kuros $3 \nmid n$. Tā kā $6 \nmid n$ un $3 \mid n$, tad $2 \nmid n$ jeb laukuma malas garums n ir nepāra. Izkrāsojam laukumu šahveidā. Tā kā malas garums nepāra, tad melno rūtiņu būs par vienu vairāk nekā balto. Apzīmējam S_M kā melno rūtiņu skaitu un S_B kā balto. Tad $S_M - S_B = 1$.

Ievērosim, ka ikviena no dotajām figūrām šahveida rūtiņas pārklāj vienā no diviem zemāk redzamajiem veidiem.



Katrā no gadījumiem gan melno, gan balto rūtiņu skaits figūrā dalās ar 3. Saskaitīsim visu šo figūru pārklāto rūtiņu kopskaitu pa krāsām. Tā kā jābūt pārklātam visam laukumam (katra rūtiņa vienu reizi), tad šiem skaitiem jāsakrīt ar S_M un S_B. Pie tam, tikko ieguvām, ka $3 \mid S_M$ un $3 \mid S_B$. Tad būtu jāizpildās $3 \mid S_M - S_B = 1$, kas ir acīmredzama pretruna, tādēļ šāds pārklājums neeksistē un šajā gadījumā prasīto nav iespējams sasniegt. Esam aplūkojuši visus iespējamos gadījumus un uzdevums ir atrisināts.

2.uzdevums. Uz tāfeles uzrakstīti $2m$ skaitļi

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ 2m(2m+1),$$

kur $m \geq 2$ ir naturāls. *Gājiena* laikā atļauts izvēlēties trīs uz tāfeles uzrakstītus skaitļus a, b, c, tos nodzēst un vietā uzrakstīt skaitli

$$\frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

Pēc $m-1$ šādiem gājieniem uz tāfeles paliek divi skaitļi. Pieņemsim, ka viens no tiem ir $\frac{4}{3}$. Pierādīt, ka otrs uz tāfeles palikušais skaitlis ir lielāks par 4.

Atrisinājums. Aplūkojam visu uzrakstīto skaitļu apgriezto lielumu summu. Pierādīsim, ka gājiena laikā tā paliek invarianta. Ja tiek izvēlēti skaitļi a, b, c, to apgriezto lielumu summa ir $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Vietā uzrakstītā skaitļa $\frac{abc}{ab+bc+ca}$ apgrieztais lielums ir $\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, kas ir vienāds ar iepriekš iegūto. Pārējiem skaitļiem apgrieztie lielumi gājiena laikā nemainās, tādēļ kopējā summa saglabājas.

Izmantojot sakarību $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, varam pārveidot sākotnēji uzrakstīto skaitļu apgriezto lielumu summu, kas procesa gaitā nemainās.

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2m(2m+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2m}-\frac{1}{2m+1}=1-\frac{1}{2m+1}<1$$

Aplūkojam procesa beigās pēdējos divus uz tāfeles atlikušos skaitļus. Viens no tiem ir $\frac{4}{3}$, otru apzīmējam ar x. Tad no iegūtā zināms, ka

$$S=\frac{3}{4}+\frac{1}{x}<1 \implies \frac{1}{x}<\frac{1}{4} \implies x>4,$$

kas pierāda prasīto.

3.uzdevums. Uz galda gareniski saliktas 2009 kārtis, katrai viena puse ir melnā, bet otra - zelta krāsā. Sākotnēji visas kārtis pagrieztas ar zelta pusi uz augšu. Divi spēlētāji, stāvot vienā galda malā, spēlē spēli, pamīšus veicot gājienus. Katrs gājiens sastāv no 50 secīgu kāršu izvēles, ar nosacījumu, ka pirmā kārts no kreisās malas ir pagriezta ar zelta pusi uz augšu, un tad visu šo izvēlēto kāršu apgriešanu otrādi, tā, ka, ja kārts bija ar zelta pusi uz augšu, tad tagad tā ir ar melnu pusi uz augšu un otrādi. Tas spēlētājs, kurš nespēj veikt derīgu gājienu, zaudē.

a) Vai šī spēle garantēti beidzas?

b) Vai pirmajam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija?

Atrisinājums. a) Jā, spēle noteikti beigsies; b) Pirmajam spēlētājam nav uzvarošas stratēģijas.

Sanumurējam kārtis no labās puses pēc kārtas $1, 2, \ldots, 2009$. Interpretēsim kārtis binārā valodā – zelta kārtis kā 1, bet melnās kārtis kā 0. Ievērosim, ka ikvienu kāršu stāvokli var interpretēt kā bināru skaitli ar 2009 cipariem, kuram ir atļauts priekšā uzrakstīt nulles. Sākotnējais kāršu stāvoklis ir $\overline{11\ldots1}$. Katrā gājienā kreisākā no izvēlētajām pozīcijām kļūst no 1 par 0. Tā kā $2^{x+49} > 2^{x+48} + 2^{x+47} + \ldots + 2^x$, tad viegli redzams, ka ikvienā gājienā kāršu stāvoklim atbilstošais binārais skaitlis strikti samazinās. Tā kā kārtīm atbilstošais binārais skaitlis nevar kļūt mazāks par $\overline{00\ldots0}$, tad samazināšanās var notikt tikai galīgu skaitu reižu, kas a) pierāda, ka gājienu skaits ir galīgs.

Atceroties kāršu numerāciju, aplūkojam kārtis ar numuriem $50i$, kur $1 \leq i \leq 40$. Apzīmējam šo kāršu kopu ar S. Viegli redzams, ka ikvienā gājienā tiek apgriezta tieši viena no S kārtīm, kā arī katru no S kārtīm var izvēlēties kā kreisāko kārti kādam gājienam (jo sākam ar tieši 50-to kārti no labās malas). Aplūkotajām kārtīm ar g_n apzīmējam skaitu kārtīm ar zelta pusi uz augšu pēc n veiktiem gājieniem. Sākumā $g_0 = 40$. Kā noskaidrojām, $|g_n - g_{n+1}| = 1$. Tātad katrā gājienā mainās g paritāte. Pēc pirmā spēlētāja gājiena vienmēr būs bijis veikts nepāra skaits gājienu, tāpēc arī g būs nepāra. Tādā gadījumā S būs vismaz viena kārts ar zelta pusi uz augšu, ko otrais spēlētājs var izvēlēties un veikt derīgu gājienu, tātad pēc pirmā spēlētāja gājiena otrais vienmēr būs nezaudējošā pozīcijā. Tā kā spēle ir galīga, tad kādam spēlētājam būs jāzaudē, un šīs stratēģijas gadījumā tas var būt tikai pirmais spēlētājs. Tātad b) neeksistē pirmajam spēlētājam uzvaroša stratēģija.

4.uzdevums. Rindā ir nolikti n marķieri, katram no kuriem ir viens gals balts, bet otrs gals melns. Sākumā visi marķieri rindā ir nolikti ar balto galu uz augšu. *Gājienā* ir atļauts izvēlēties marķieri ar balto galu uz augšu (šis marķieris nedrīkst būt rindas galā), izņemt marķieri no rindas un apgriezt otrādi tuvāko marķieri kreisajā pusē, kā arī tuvāko marķieri labajā pusē. Pierādīt, ka pēc galīga gājienu skaita rindā var palikt tieši divi marķieri tad un tikai tad, ja $n-1$ nedalās ar 3.

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim, ka prasīto var sasniegt, ja $3 \nmid n-1$. Apzīmēsim marķierus ar balto galu uz augšu ar O, bet marķierus ar melno galu uz augšu ar X. Aplūkojam šādu gājienu virkni pieciem secīgiem O marķieriem.

$$O\underline{O}OOO \to XX\underline{O}O \to X\underline{O}X \to OO$$

Kamēr vien rindas galā ir vismaz 5 secīgi O marķieri, tikmēr rindā esošo marķieru skaitu var samazināt par 3, joprojām atstājot tikai O marķierus. Sākumā rindā ir tikai O marķieri, tādēļ, ja $n \equiv 2 \pmod 3$, ar šādiem secīgiem gājieniem var panākt, ka rindā paliek tikai 2 marķieri ar balto galu uz augšu. Savukārt, ja $n \equiv 0 \pmod 3$, ar šādiem secīgiem gājieniem var panākt, ka rindā paliek tikai 3 marķieri ar balto galu uz augšu. Tad var pielietot gājienu vidējam marķierim un iegūt 2 palikušus marķierus.

Tālāk pierādīsim, ka situācijā $3 \mid n-1$ prasīto sasniegt nevar. Katram marķierim piešķirsim skaitlisku vērtību, kur i-tajam marķierim no rindas kreisās puses ir vērtība

$$f(i) = \begin{cases} 1, & \text{ja marķieris } i \text{ ir balts un pa kreisi no } i \text{ melno marķieru skaits ir pāra;} \\ 0, & \text{ja marķieris } i \text{ ir ar melno galu uz augšu (jeb melns);} \\ -1, & \text{ja marķieris } i \text{ ir balts un pa kreisi no } i \text{ melno marķieru skaits ir nepāra.} \end{cases}$$

Aplūkojam visu marķieru vērtību summu S. Sākotnēji visi marķieri ir balti (ar balto galu uz augšu), tāpēc acīmredzami $S = n$ un $S \equiv 1 \pmod 3$.

Pierādīsim, ka S procesa gaitā ir invarianta pēc moduļa 3. Pieņemsim, ka gājienā izņem marķieri i. Tad iespējamie pārveidojumi ir

$$\begin{gathered} OOO \to XX \\ XOO \to OX \\ OOX \to XO \\ XOX \to OO \end{gathered}$$

Pirmkārt, ievērojam, ka pārējiem marķieriem, kas nav starp $i-1, i, i+1$, funkcijas vērtības nemainās, jo visos gadījumos melno marķieru skaits vidū mainās par pāra skaitli $(-2, 0, +2)$. Otrkārt, katrā no gadījumiem var viegli pārliecināties, ka no S tiek atņemts lielums $3f(i)$, kas S atlikumu pēc moduļa 3 neizmaina. Tātad visā procesa gaitā izpildās $S \equiv 1 \pmod 3$.

Ievērosim, ka procesa gaitā melno marķieru skaits mainās par pāra skaitli. Tā kā sākumā ir 0 melno marķieru, kas ir pāra skaitlis, visā procesa gaitā melno marķieru skaitam arī jābūt pāra skaitlim. Tātad, ja beigās paliek 2 marķieri, tiem vai nu abiem jābūt baltiem, vai arī melniem. Pirmajai situācijai izpildās $S \equiv 2 \pmod 3$, savukārt otrajai situācijai izpildās $S \equiv 0 \pmod 3$. No iepriekš iegūtā secinām, ka abas šīs situācijas nav sasniedzamas, ja $3 \mid n-1$, kas pierāda uzdevumā prasīto.