

Invarianti - 2.mājasdarbs

Ievads. Šajā mājasdarbā Jums tiek piedāvāti 7 uzdevumi, kuri ir sakārtoti grūtību pieaugošā secībā. Katrs uzdevums tiek novērtēts ar 0–7 punktiem. Punkti tiek piešķirti arī par ne līdz galam atrisinātiem uzdevumiem, ja ir iegūti noderīgi rezultāti. Risinājumu iesniegšanai izmantot NMS mājaslapā esošo formu.

1.uzdevums Kādām naturālām n vērtībām ir iespējams pilnībā noklāt $n \times n$ rūtiņu kvadrātu ar attēlā redzamajām figūrām? Klājumā visām rūtiņām jābūt noklātām, figūras savā starpā nedrīkst pārklāties, kā arī tās nedrīkst iziet ārpus kvadrāta robežām.



2.uzdevums Uz tāfeles uzrakstīti $2m$ skaitļi

$$1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots, 2m(2m + 1),$$

kur $m \geq 2$ ir naturāls. *Gājiena* laikā atļauts izvēlēties trīs uz tāfeles uzrakstītus skaitļus a, b, c , tos nodzēst un vietā uzrakstīt skaitli

$$\frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

Pēc $m - 1$ šādiem gājieniem uz tāfeles paliek divi skaitļi. Pieņemsim, ka viens no tiem ir $\frac{4}{3}$. Pierādīt, ka otrs uz tāfeles palikušais skaitlis ir lielāks par 4.

3.uzdevums Uz galda gareniski saliktas 2009 kārtis, katrai viena puse ir melnā, bet otra - zelta krāsā. Sākotnēji visas kārtis pagrieztas ar zelta pusi uz augšu. Divi spēlētāji, stāvot vienā galda malā, spēlē spēli, pamīšus veicot gājienu. Katrs gājien sastāv no 50 secīgu kāršu izvēles, ar nosacījumu, ka pirmā kārts no kreisās malas ir pagriezta ar zelta pusi uz augšu, un tad visu šo izvēlēto kāršu apgriešanu otrādi, tā, ka, ja kārts bija ar zelta pusi uz augšu, tad tagad tā ir ar melnu pusi uz augšu un otrādi. Tas spēlētājs, kurš nespēj veikt derīgu gājienu, zaudē.

- Vai šī spēle garantēti beidzas?
- Vai pirmajam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija?

4.uzdevums Rindā ir nolikti n marķieri, katram no kuriem ir viens gals balts, bet otrs gals melns. Sākumā visi marķieri rindā ir nolikti ar balto galu uz augšu. *Gājienā* ir atļauts izvēlēties marķieri ar balto galu uz augšu (šis marķieris nedrīkst būt rindas galā), izņemt marķieri no rindas un apgriezt otrādi tuvāko marķieri kreisajā pusē, kā arī tuvāko marķieri labajā pusē. Pierādīt, ka pēc galīga gājienu skaita rindā var palikt tieši divi marķieri tad un tikai tad, ja $n - 1$ nedalās ar 3.