Kombinatoriskā optimizācija

Ilmārs Štolcers

1 Ievads

Šajā materiālā aplūkosim specifisku kombinatorikas uzdevumu klasi, kas savā būtībā ir saistāma ar optimizāciju – atrast mazāko/lielāko iespējamo vērtību kādam lielumam. Šiem uzdevumiem ideju ziņā ir ļoti liela dažādība un tos iemācīties rēķināt var tikai treniņu rezultātā, taču visiem šādiem uzdevumiem ir ļoti līdzīga risinājumu struktūra, kas bieži vien ļauj uzminēt vēlamo risināšanas gaitu.

2 Pamatlietas

Kombinatoriskās optimizācijas uzdevumos, kur ir jāatrod mazākā/lielākā iespējamā vērtība, ir svarīgi atcerēties, ka risinājumam jāsastāv no 2 daļām. Pirmkārt, ir jāuzrāda, ka minēto vērtību ir iespējams sasniegt, ko parasti dara ar **konstrukciju**. Otrkārt, ir jāpierāda, ka labāku vērtību nav iespējams sasniegt, ko ierasti dara ar **novērtējumu**. Vieglāk šo konceptu būs saprast, aplūkojot tālākos piemērus.

Pieņemsim, ka mums ir dots uzdevums, kurā ir jāatrod lielākais iespējamais rūtiņu skaits x, ko var iekrāsot rūtiņu laukumā, lai izpildītos kāds nosacījums. Ierasti šādā uzdevumā iesakāms kā pirmo lietu izmēģināt mazos gadījumus (maziem rūtiņu laukumiem) un potenciāli izvirzīt hipotēzi par atbildes vērtību $x = C$. Tālāk ir nepieciešams pierādīt, ka $C \leq x \leq C$, jo no tā matemātiski korekti varēs secināt, ka $x = C$. Pirmo novērtējumu, kas ir $C \leq x$, panāk ar konstrukciju – ja mēs varam izdomāt derīgu krāsojumu ar C rūtiņām, tad atbilde noteikti nebūs mazāka. Otro novērtējumu, kas ir $x \leq C$, panāk ar matemātisku pierādījumu, kas var būt balstīts uz skaitīšanu, pretējā pieņemšanu utt. Gadījumā, ja izvirzītā hipotēze izrādīsies nepatiesa, to, visticamāk, izdosies noteikt šajā otrajā novērtējuma daļā, kurā nepieciešams pierādīt – vai nu būs grūtības atrast reāli ierobežojošu lielumu, uz kā balstīt pierādījumu, vai arī pierādīšanas gaitā radīsies kāda pretruna.

Ierasti olimpiādēs šāda tipa uzdevumiem viena no risinājuma daļām ir ievērojami grūtāka par otru – vai nu konstrukcija ir viegli atrodama, taču grūti ir formāli korekti pierādīt novērtējumu, vai arī novērtējums ir triviāls, taču konstrukciju nepieciešams veidot ļoti specifiskā un sarežģītā veidā. Diemžēl parasti no uzdevuma teksta vai tā ātras risināšanas ir grūti noteikt, kura no daļām būs sarežģītāka. Olimpiādēs ierasti žūrija uzdevumu izvēles laikā vienojas, kura no daļām ir sarežģītāka un attiecīgi no tā pielāgo punktu sadalījumu uzdevumā. Svarīgi atzīmēt, ka šajos uzdevumos punktus var saņemt arī tad, ja būtībā atrisināta ir tikai viena no daļām.

3 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs Sākumā uz tāfeles uzrakstītas astoņas nulles. Vienā gājienā iespējams izvēlēties 4 uzrakstītos skaitļus a, b, c un d, tos nodzēst un vietā uzrakstīt skaitļus $a+3, b+3, c+2$ un $d+1$. Ar kādu mazāko gājienu skaitu iespējams panākt, ka uz tāfeles uzrakstīti 8 pēc kārtas sekojoši skaitļi?

Atrisinājums. Ievērosim, ka pēc katra gājiena uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa summa palielinās par $\Delta = a+3+b+3+c+2+d+1-(a+b+c+d) = 9$. Tā kā sākotnēji uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir $S = 0$, tad viegli ievērot, ka pēc katra gājiena uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa S dalās ar 9.
Ja uz tāfeles būtu uzrakstīti pēc kārtas sekojoši skaitļi no $0-7$, tad to summa būtu vienāda ar $S = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$, kas nedalās ar 9, tāpēc šādus pēc kārtas sekojošus skaitļus iegūt nevar. Pierādīsim, ka var iegūt pēc kārtas esošus skaitļus no 1 līdz 8. To summa ir $S = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$, kas dalās ar 9. Tā kā katrā gājienā skaitļu summa palielinās par 9, tad vajadzēs vismaz $\frac{36}{9} = 4$ gājienus. Tik lielā gājienu skaitā

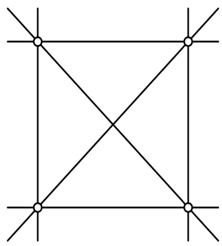
attiecīgos skaitļus var iegūt sekojoši:

$$\begin{matrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&2&3&3 \\ 0&0&0&1&2&3&6&6 \\ 0&0&0&4&5&3&7&8 \\ 1&2&3&4&5&6&7&8 \end{matrix}$$

Komentārs. Šis piemērs ilustrē pirmo optimizācijas uzdevumu ideju – aplūkot visus iespējamos mazākos gadījumus, pēc kāda kritērija (šeit tā ir dalāmība ar 9) atmest pašus mazākos, kuri neder, un tad parādīt konstrukciju pirmajam sasniedzamajam gadījumam.

2.piemērs Telpā novilktas sešas taisnes. Noskaidrot, kāds ir lielākais iespējamais punktu skaits, kurās krustojas vismaz trīs no tām.

Atrisinājums. Maksimālais punktu skaits, caur kuriem iet vismaz 3 taisnes, ir 4. To var sasniegt, kā parādīts attēlā.



Pierādīsim, ka šis ir lielākais šādu punktu skaits. Punktu sauksim par *skaistu*, ja caur to iet vismaz 3 taisnes. Apskatīsim, cik ir tādu pāru $(P; l)$, kur P ir *skaists* punkts, bet l taisne, kas iet caur to. Pieņemsim, ka *skaisto* punktu skaits ir vismaz n. Tā kā caur katru *skaisto* punktu iet vismaz 3 taisnes, tad $(P; l) \geq 3n$.

Pierādīsim, ka uz katras taisnes atrodas ne vairāk kā 2 *skaistie* punkti. Patiešām, ja uz kādas taisnes atrastos vismaz 3 *skaistie* punkti, caur katru no tiem ietu vismaz 2 taisnes, kas visas savā starpā būtu dažādas, jo divas nesakrītošas taisnes krustojas ne vairāk kā 1 punktā. Tad būtu nepieciešamas vēl vismaz $2 \cdot 3 = 6$ taisnes, lai tas izpildītos, bet tādā gadījumā kopējais taišņu skaits pārsniegtu $1 + 3 \cdot 2 = 7$ - pretruna. Tas nozīmē, ka uz katras no 6 taisnēm ir ne vairāk kā 2 *skaistie* punkti. Šī iemesla dēļ $(P; s) \leq 2 \cdot 6 = 12$. Esam ieguvuši, ka:

$$12 \geq (P; s) \geq 3n \Longrightarrow 4 \geq n$$

Prasītais ir pierādīts.

Komentārs. Šis uzdevums skaisti ilustrē jau iepriekšējos materiālos redzēto ideju par **divkāršo skaitīšanu**, kas šeit izmantota, lai iegūtu novērtējuma daļu. Optimizācijas uzdevumos šāda ieviestu lielumu (piemēram, pāru $(P; l)$) globāla skaitīšana ir diezgan bieža ideja, jo ļauj tiešā veidā iegūt nevienādības tipa novērtējumus.

3.piemērs Futbola treniņā piedalījās 22 futbolisti, uz katru spēli tos sadalīja vienāda izmēra komandās (11 : 11). Zināms, ka katrs futbolists ar katru vismaz reizi spēlēja pretējās komandās. Kāds ir mazākais iespējamais skaits spēļu, ko viņi izspēlēja šajā treniņā?

Atrisinājums. Mazākais iespējamais treniņā izspēlēto spēļu skaits ir 5.

Pierādīsim, ka ar maksimums 4 spēlēm nepietiek. Pieņemsim, ka notika 4 spēles. Pieņemsim arī, ka pēc katra mača spēlētāji saglabā savus kreklus, un katram mačam bija krekli divās krāsās - vienā krāsā vienai komandai, otrā krāsā otrai komandai - pie tam krāsas neatkārtojas vēlākos mačos (attiecīgi treniņā bija 11 krekli pa 8 krāsām).

Tad ir iespējami $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ varianti, kādi 4 krekli spēlētājam būs pēc rokās pēc treniņa, bet, tā kā ir 22 spēlētāji, tad pēc Dirihlē principa noteikti būs 2 spēlētāji, kam pēc treniņa savstarpēji sakrīt visi krekli, tas ir, tie visos 4 mačos bija viena komandā, kas ir pretruna. Minētā pretruna acīmredzami arī darbojas pie mazāka spēļu skaita.

Pierādīsim, ka ar 5 spēlēm pietiek. Spēlētājus apzīmēsim attiecīgi ar skaitļiem $1; 2; 3; \ldots; 22$. Der, piemēram, šādas spēles:

- Pirmajā spēlē $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11$ spēlē pret $12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22$
- Otrajā spēlē $1; 2; 3; 4; 5; 12; 13; 14; 15; 16; 17$ spēlē pret $6; 7; 8; 9; 10; 11; 18; 19; 20; 21; 22$
- Trešajā spēlē $1; 2; 3; 12; 13; 14; 6; 7; 8; 18; 19$ spēlē pret $4; 5; 15; 16; 17; 9; 10; 11; 20; 21; 22$
- Ceturtajā spēlē $1; 2; 12; 6; 18; 4; 15; 16; 9; 10; 20$ spēlē pret $3; 13; 14; 7; 8; 19; 5; 17; 11; 21; 22$
- Piektajā spēlē $1; 12; 18; 15; 9; 20; 13; 7; 19; 17; 21$ spēlē pret $2; 5; 7; 16; 10; 3; 14; 8; 5; 11; 22$

Katram spēlētājam uzrakstot virkni no vieniniekiem un divniekiem, atkarībā no komandas katrā spēlē, viegli pārbaudīt, ka šāds sadalījums pa komandām patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

Komentārs. Šādā uzdevumā ir grūti veikt sākotnējos eksperimentus, jo spēlētāju ir daudz, un attiecīgi ir milzīgs skaits sadalījumu pa spēlēm. Lai reducētu šādu uzdevumu uz mazākiem gadījumiem, varētu mēģināt aplūkot 6 spēlētājus komandās 3 : 3 (vai līdzīgu mazu skaitu, saglabājot nosacījumu par vienādu spēlētāju skaitu komandās), un no tā veikt kādus secinājumus.

4.piemērs Kādā Karaļvalstī ir 2021 pilsēta. Visas šīs pilsētas ir izvietotas aplī, piedevām no katras pilsētas uz pulksteņrādītāja virzienā esošajām nākamajām 101 pilsētām iziet vienvirziena ceļš (virzienā no šīs pilsētas uz nākamajām 101). Katram no ceļiem bruģis ir vienā noteiktā krāsā. Zināms, ka ceļiem bruģa krāsa ir izvēlēta tā, ka no jebkuras pilsētas uz jebkuru citu var aiziet pa tādu ceļu maršrutu, kurā nekādiem diviem ceļiem nav vienādas krāsas bruģis. Kāds var būt mazākais iespējamais bruģa krāsu skaits šajā Karaļvalstī?

Atrisinājums. Ieviesīsim virzītu grafu, kurā pilsētas ir virsotnes un vienvirziena ceļi ir virzītas šķautnes, no kurām katra ir nokrāsota kādā krāsā. Pierādīsim, ka mazākais iespējamais krāsu skaits ir 21.

Apzīmēsim virsotnes pulksteņrādītāja secībā kā $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2020}$. Viegli redzams, ka no v_0 īsākā maršruta garums līdz $v_1, v_2, \ldots, v_{101}$ ir 1, līdz $v_{102}, v_{103}, \ldots, v_{202}$ ir 2, utt. Visgarākais īsākā maršruta garums ir no v_0 līdz v_{2020}, kas ir 20.

Vispirms pierādīsim, ka ar 21 krāsu pietiek, lai izpildītu uzdevuma nosacījumus. Katram i, kur $1 \le i \le 20$, izveidojam kopu

$$V_i = \{v_{101(i-1)+1}, v_{101(i-1)+2}, \ldots, v_{101i}\}$$

un nokrāsojam visas šķautnes, kuras iziet virzienā ārā no šīs kopas virsotnēm, i-tajā krāsā. Visas tās šķautnes, kuras sākas virsotnē v_0, nokrāsojam 21. krāsā. Tā kā starp jebkurām divām virsotnēm eksistē maršruts, kura garums nepārsniedz 20, un šo maršrutu var pielāgot tā, lai visas šķautnes, izņemot pēdējo, būtu 101 vienību garas, tad jebkura šāda maršruta šķautne sāksies V_i, kurā vēl neviena šķautne nebija sākusies, kas acīmredzami dod to, ka visām šķautnēm būs dažādas krāsas.

Pierādīsim, ka ar 20 krāsām nav iespējams sasniegt prasīto (mazāka krāsu skaita pierādījums ir analoģisks). Pieņemsim pretējo, ka uzdevumā prasītais ir sasniegts ar 20 krāsām. Aplūkosim šķautnes, kuras ir 101 vienību garas, t.i., savieno v_i ar v_{i+101}. Ievērosim, ka īsākais maršruts starp v_i un v_{i+2020} ir 20 šķautņu garumā. Tā kā visām šķautnēm ir jābūt dažādās krāsās, varam secināt, ka tās ir visās pieejamajās 20 krāsās.

Ja aplūko maršrutu starp v_i un $v_{i+2020} = v_{i-1}$, kā arī starp v_{i+101} un v_{i+100}, tad redzams, ka šiem maršrutiem pārklājas 19 šķautnes, izņemot šķautnes starp v_i un v_{i+101}, kā arī v_{i-1} un v_{i+100}. Tā kā pārējām 19 šķautnēm ir zināma krāsa un ir tikai 20 krāsas, var secināt, ka šīm šķautnēm ir vienāda krāsa. Atkārtojot šo spriedumu, ir iespējams iegūt, ka visām šķautnēm ar garumu 101 ir viena un tā pati krāsa, kas ir pretruna ar to, ka tās bija nokrāsotas 20 dažādās krāsās.

Komentārs. Šī uzdevuma ideja ir līdzīga 1.piemēram – visām mazākām iespējamām atbildēm (mazākām par 21) tiek atrasta pretruna. Šeit gan lielākā uzdevuma grūtība saistās ar atbildes hipotēzes atrašanu sākotnēji, jo šo uzdevumu ir grūti reducēt uz kaut ko mazāku, nesaprotot paslēpto saistību starp 101 un 2021.

5.piemērs Dots nepāra naturāls skaitlis $N \geqslant 3$. Badmintona turnīrā piedalās N spēlētāji. Pirms turnīra sākuma līdzjutēji sastāda spēlētājus rindā secīgi pēc tā, cik viņiem labi šķiet spēlētāji, sākot ar vislabāko un beidzot ar visvājāko (spēlētāju ar vienādiem vērtējumiem nav). Turnīra laikā katrs spēlētājs izspēlē vienu spēli pret ikkatru citu spēlētāju, un katrā spēlē viens no spēlētājiem uzvar. Sauksim spēli par *pārsteidzošu*, ja tajā uzvar spēlētājs, kurš līdzjutēju vērtējumā bija novērtēts sliktāk par savu pretinieku. Pēc turnīra beigām spēlētāji tiek sastādīti rindā pēc gūto uzvaru skaita, sākot ar spēlētāju, kurš uzvarēja visvairāk spēlēs. Gadījumā, ja vairākiem spēlētājiem ir vienāds uzvaru skaits, viņi savā starpā tiek sakārtoti pēc līdzjutēju vērtējuma, sākot ar vislabāk novērtēto.
Izrādījās, ka pēc turnīra iegūtā spēlētāju rinda sakrīt ar pirms turnīra izveidoto rindu. Kāds ir lielākais pārsteidzošu spēļu skaits, kas varēja notikt turnīrā?

Atrisinājums. Atbilde ir $\frac{(N-1)(3N-1)}{8}$ spēles.

Sākotnēji pierādīsim, ka lielāks pārsteidzošu spēļu skaits nevar notikt. Apzīmēsim $N = 2k+1$, kur k ir naturāls, kā arī spēlētājus ar $a_1, a_2, \ldots, a_N$, kur a_1 apzīmē vislabāko spēlētāju rindā pirms turnīra, a_2 — otro labāko spēlētāju rindā pirms turnīra utt. Ar W_i apzīmēsim a_i turnīrā gūto uzvaru skaitu.

Novērtēsim to spēļu skaitu, kas nebija pārsteidzošas. Ievērosim, ka visas uzvaras, ko guva a_1, ir spēlēs, kas nav pārsteidzošas. Tātad ir vismaz W_1 nepārsteidzošu spēļu. Savās spēlēs a_2 varēja uzvarēt tikai vienā pārsteidzošā spēlē, kas būtu pret a_1, tādēļ ir vēl vismaz $W_2 - 1$ nepārsteidzošu spēļu. Šādu secinājumu var pielietot spēlētājiem līdz pat a_k, kurš uzvarēja vismaz $W_k - (k-1)$ nepārsteidzošās spēlēs. Tādēļ turnīrā notika vismaz

$$W_1 + (W_2 - 1) + \ldots + (W_k - (k-1)) = (W_1 + W_2 + \ldots + W_k) - \frac{(k-1)k}{2}$$

nepārsteidzošu spēļu.

Kopumā turnīrā gūto uzvaru skaits sakrīt ar spēļu skaitu, t.i., $\frac{N(N-1)}{2} = k(2k+1)$. Ievērosim, ka labākie k spēlētāji guva vismaz $\frac{k}{2k+1}$ no visām uzvarām. Pretējā gadījumā a_k kā sliktākais no *labo* grupas gūtu mazāk nekā $\frac{1}{2k+1}$ no uzvarām, kamēr sliktākie $k+1$ spēlētāji kopā gūtu vairāk nekā $\frac{k+1}{2k+1}$ no visām uzvarām, tātad a_{k+1} kā labākais no *slikto* grupas gūtu vairāk nekā $\frac{1}{2k+1}$ no uzvarām. Tas nozīmētu $W_k < W_{k+1}$, kas ir pretruna. Secinām, ka labāko k spēlētāju kopējais uzvaru skaits ir vismaz

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_k \geq k(2k+1) \cdot \frac{k}{2k+1} = k^2.$$

Tātad turnīrā notika vismaz $k^2 - \frac{(k-1)k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$ nepārsteidzošu spēļu. Līdz ar to pārsteidzošu spēļu skaits nevar pārsniegt

$$k(2k+1) - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(3k+1)}{2} = \frac{\frac{(2k+1)-1}{2} \cdot \frac{(6k+3)-1}{2}}{2} = \frac{(N-1)(3N-1)}{8}.$$

Atliek pierādīt, ka šādu pārsteidzošu spēļu skaitu var sasniegt. Skaidrs, ka visām iepriekšējām nevienādībām jābūt vienādībām, kas dod konstrukciju: a_i uzvar spēlēs pret $a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots, a_{i-k}$, kur $a_0 = a_N$, $a_{-1} = a_{N-1}$ utt. Visiem spēlētājiem tad ir vienāds uzvaru skaits, tāpēc tie būs nostādīti sākotnējā secībā. Tādā gadījumā $k+1$ sliktākie spēlētāji kopumā dos $k(k+1)$ pārsteidzošas uzvaras, kamēr labākie k spēlētāji dos kopumā $0 + 1 + \ldots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$ pārsteidzošas uzvaras. Viegli pārbaudīt, ka šie skaitļi summā dod uzdevuma atbildi.

Komentārs. Optimizācijas uzdevumos vērts atcerēties idejas no algebriskās optimizācijas, ka ekstrēmu vērtības bieži vien atrodas intervāla galapunktos jeb pie kaut kādām robežvērtībām. Šajā piemērā par ekstremālajiem gadījumiem varētu uzskatīt divus – pirmais, kas ir aplūkots risinājumā, ir vienāds uzvaru skaits visiem spēlētājiem, savukārt otrais būtu uzvaru skaita maksimizācija stiprākajam spēlētājam, otram stiprākajam utt. Aplūkojot abus šos gadījumus, viegli noteikt, kurš no tiem ir lielāks un virzīt risinājumu uz tā pusi.

Šajā uzdevumā arī vērts atzīmēt, ka optimizācija ne vienmēr notiek, meklējot kādu konstanti, bet var būt nepieciešams katrai pieļaujamai mainīgā vērtībai atrast lielāko/mazāko atbildi. Tas ne vienmēr tiek skaidri norādīts uzdevumā, taču, ja uzdevumā ir **dots naturāls skaitlis** N vai līdzīgi fiksēts kāds mainīgais, tas parasti nozīmē, ka uzdevums ir jāatrisina visām pieļaujamajām mainīgā vērtībām un attiecīgi atbilde būs atkarīga no šī mainīgā.

6.piemērs Rindā ir novietoti 2022 spaiņi ar ūdeni, katrs no tiem nokrāsots zils vai sarkans. Zivtiņa Dora spēlē spēli. Vispirms viņa izvēlas spaini, kurā viņa sāks spēli. Katrā gājienā Dora var aizlēkt uz nākamo vai aiznākamo spaini pa labi. Jebkurā brīdī viņa var izvēlēties apstāties un beigt veikt gājienus. Spēle beidzas, kad Dora ir nonākusi pēdējā spainī rindas labajā malā vai arī viņa ir izvēlējusies pārstāt veikt gājienus. Doras spēlē iegūto punktu skaits ir modulis no starpības starp sarkano un zilo spaiņu skaitu, kuros viņa ir bijusi spēles laikā. Noteikt lielāko naturālo skaitli C, ka neatkarīgi no tā, kā spaiņi ir nokrāsoti, Dora var iegūt vismaz C punktus.

Piezīme. Zivtiņa vienmēr zina visu spaiņu krāsojumu, tostarp kādā krāsā ir spainis, kurā viņa šobrīd atrodas, kā arī kādā krāsā ir spaiņi, uz kuriem viņa var aizlēkt.

Atrisinājums. Atbilde ir $C = 506$.

Vispirms pierādīsim, ka Dora vienmēr var iegūt vismaz C punktus. Vienā no krāsām rindā ir vismaz $\frac{2022}{2} = 1011$ spaiņi; pieņemsim, ka tie ir sarkani. Dora spēlē šādi - viņa atrod pirmo sarkano spaini rindā no kreisās puses un sāk tajā spēli. Tālāk jebkurā spainī,kurā Dora atrodas, viņa aplūko nākamo spaini. Ja nākamais spainis pa labi ir sarkans, viņa lec uz to. Ja nākamais spainis pa labi ir zils, viņa lec uz aiznākamo spaini. Gadījumā, ja visi spaiņi rindā pa labi no Doras ir zili, tad viņa noslēdz spēli.

Skaidrs, ka ar šādu stratēģiju Dora spēles laikā nonāks katrā sarkanajā spainī, kuru ir vismaz 1011. Papildus tam redzams, ka Dora var nonākt zilā spainī tikai tad, ja viņa pārlēca vienam zilam spainim pāri. Tātad spēles laikā Dora paviesosies ne vairāk kā $\left\lfloor \frac{1011}{2} \right\rfloor = 505$ zilos spaiņos. Līdz ar to iegūtais punktu skaits būs vismaz $1011 - 505 = 506$ punkti, kas dod prasīto.

Tālāk aplūkojam šādu spaiņu krāsojumu:

$$(\{Z\}, \{S, S\}, \{Z, Z\}, \{S, S\}, \dots, \{S, S\}, \{Z, Z\}, \{S\}).$$

Pierādīsim, ka pie šāda krāsojuma Dora nevar iegūt vairāk par 506 punktiem. Spaiņus, kas ierakstīti vienās figūriekavās, sauksim par *bloku*. Kopumā ir 1012 bloki - 506 no tiem ir sarkani spaiņi un 506 ir zili spaiņi (ir 2 bloki, kuriem katrā ir tieši viens spainis, bet visos pārējos ir divi spaiņi).

Pieņemsim, ka Dora spēles laikā pabija vairāk sarkanos spaiņos nekā zilos un attiecīgi paviesojās k blokos ar sarkaniem spaiņiem. Tā kā starp diviem secīgiem sarkanu spaiņu blokiem atrodas bloks ar diviem ziliem spaiņiem, lai nokļūtu no viena sarkanu spaiņu bloka uz nākamo pa labi, Dorai ir jāielec vismaz vienā zilā spainī. Katrā sarkanu spaiņu blokā Dora var paviesoties ne vairāk kā divos sarkanos spaiņos. Līdz ar to Dora kopumā varēja iegūt ne vairāk kā $2k - (k-1) = k+1$ punktus.

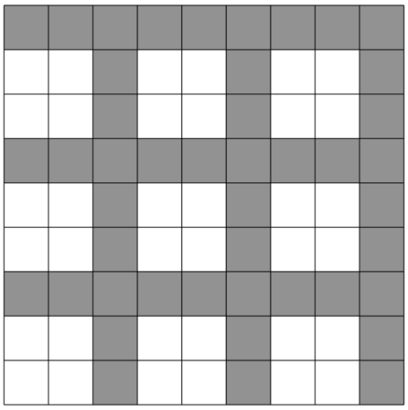
Ja $k < 506$, tad punktu skaits nepārsniedz 506. Ja $k = 506$, tad Dora ir pabijusi visos sarkanu spaiņu blokos. Taču bloks rindas galā satur tikai vienu sarkanu spaini, līdz ar to šajā gadījumā Dora no sarkano spaiņu blokiem varēja iegūt ne vairāk kā $2k - 1$ punktus, līdz ar to kopumā viņa varēja iegūt ne vairāk kā $(2k-1) - (k-1) = k$ punktus, kur $k = 506$. Gadījumā, ja Dora pabija vairāk zilos spaiņos nekā sarkanos, pierādījums ir analoģisks. Tātad pie šāda krāsojuma Dora nevar iegūt vairāk par 506 punktiem, kas pierāda iegūto atbildi.

Komentārs. Šajā uzdevumā vēlos atzīmēt tipisku ideju, kas tika izmantota novērtējuma daļā. Ja ir divi tipu objekti (šeit – divu krāsu spaiņi), mēs varam izmantot, ka viena veida objekti ir vismaz puse, un, ja tā nav, tad otra veida objekti ir vismaz puse, kas reducē uzdevumu uz analoģisku situāciju. Šo principu ir iespējams arī vispārināt uz lielāku veidu skaitu.

7.piemērs Dārzā, kurš iekārtots 2022×2022 rūtiņu laukuma formā, katrā rūtiņā aug koks. Sākotnēji katra koka garums ir 0 metri. Dārznieks un mežcirtējs dārzā spēlē spēli. Dārznieks veic pirmo gājienu, un spēlētāji gājienus veic secīgi.
Dārznieks savā gājienā izvēlas vienu dārza rūtiņu. Visi koki, kas atrodas dārznieka izvēlētajā rūtiņā un kaimiņu rūtiņās, kam ir kopīga mala vai stūris ar izvēlēto rūtiņu (tātad kaimiņu rūtiņu ir ne vairāk kā astoņas), izaug par 1 metru garāki.
Mežcirtējs savā gājienā izvēlas četras dažādas dārza rūtiņas. Katrā no izvēlētajām rūtiņām koka garums ciršanas rezultātā samazinās par 1 metru. Ja kādā no izvēlētajām rūtiņām koka garums pirms mežcirtēja gājiena bija 0 metri, tad šajā rūtiņā koka garums nemainās (nekļūst negatīvs).
Sauksim koku par *iespaidīgu*, ja tā garums ir vismaz 10^6 metri. Noteikt lielāko *iespaidīgu* koku skaitu, ko dārznieks var vienlaicīgi iegūt dārzā pēc galīga gājienu skaita neatkarīgi no tā, kā savus gājienus veic mežcirtējs.

Atrisinājums. Atbilde ir $5 \cdot \left(\frac{2022}{3}\right)^2 = 2271380$ iespaidīgu koku. Pierādīsim, ka vispārīgā gadījumā $3N \times 3N$ dārzā atbilde ir $5N^2$.

Vispirms pierādīsim, ka mežcirtējs var garantēti neļaut dārzā izaudzēt vairāk par $5N^2$ koku. Sanumurējam dārza rindas un kolonnas secīgi un nokrāsojam visas tās rūtiņas, kurām vismaz viena no koordinātām dalās ar 3. Piemērs 9×9 dārzam redzams attēlā.



Viegli pārbaudīt, ka jebkurā 3×3 kvadrātā ir tieši 4 neiekrāsotas rūtiņas. Tā kā ikvienā gājienā dārznieks izvēlas patvaļīgu 3×3 kvadrātu vai kādu daļu no tā, tad mežcirtējs var izvēlētajā kvadrātā cirst kokus, kuri atrodas neiekrāsotajās izvēlētā kvadrāta rūtiņās. Tādā veidā tiek garantēts, ka visās neiekrāsotajās rūtiņās pēc mežcirtēja gājiena koku garums ir 0, acīmredzami tiem nekļūstot iespaidīgiem. Viegli saskaitīt, ka neiekrāsotu rūtiņu $3N \times 3N$ laukumā ir $4N^2$, līdz ar to iespaidīgo koku skaits nevar pārsniegt $9N^2 - 4N^2 = 5N^2$.

Tālāk jāpierāda, ka dārznieks var izaudzēt dārzā vismaz $5N^2$ iespaidīgu koku neatkarīgi no mežcirtēja gājieniem. Apzīmējam $M = C_9^5$. Ievērojam, ka, dārzniekam veicot vienā 3×3 kvadrātā gājienus, katrā gājienā kvadrātā veidojas 5 koku izkārtojums, kuriem garums pieaug par 1 metru (ja mežcirtējs veic gājienus citā laukuma daļā, tad var gadīties, ka šādu koku ir vairāk - tad izvēlamies kaut kurus 5 no tiem, kuriem palielinājās garums), bet pārējiem šī kvadrāta kokiem garums palielinās vai paliek tāds pats. Tā kā ir M šādu izkārtojumu, tad vienā un tajā pašā kvadrātā pēc Ml gājieniem būs bijis kāds izkārtojums, kas izvēlēts vismaz l reižu - tātad 5 šī izkārtojuma koki būs sasnieguši vismaz garumu l.

Dārznieka stratēģija, lai sasniegtu vēlamo, ir vispirms sadalīt $3N \times 3N$ dārzu blakus esošos 3×3 kvadrātos (kā lielu rūtiņu laukumu) un sanumurēt tos $0, 1, \ldots, N^2 - 1$. Tad secīgi pēc kārtas (no lielākā numura uz mazāko) kvadrātā $i = N^2 - 1, N^2 - 2 \ldots, 0$ dārznieks izvēlas centrālo rūtiņu $10^6 M(M+1)^i$ reižu. No iepriekš iegūtā tas garantē, ka kvadrātā ar numuru i būs vismaz 5 koki, kuru garums ir vismaz $10^6(M+1)^i$. Ievērosim, ka pēc gājienu veikšanas i-tajā kvadrātā dārznieks citur veiks vēl $10^6 M(M+1)^{i-1} + \cdots + 10^6 M(M+1)^0 = 10^6((M+1)^i - 1)$ gājienu. Līdz ar to, ja visos turpmākajos gājienos tiek cirsts kāds i-tā kvadrāta koks ar garumu vismaz $10^6(M+1)^i$, tad pēc visiem dārznieka gājieniem tā garums būs joprojām vismaz $10^6(M+1)^i - 10^6((M+1)^i - 1) = 10^6$ metru. Tas nozīmē, ka pēc visiem dārznieka gājieniem katrā no N^2 izvēlētajiem 3×3 kvadrātiem būs vismaz 5 koki ar garumu vismaz 10^6, tātad visā dārzā būs vismaz $5N^2$ iespaidīgu koku, kas pierāda atbildi.

Komentārs. Šis ir klasisks piemērs uzdevumam, kurā novērtējuma daļa ir acīmredzama (izveidot krāsojumu), taču izdomāt konstrukcijas algoritmu ir sarežģīti un prasa radošu izdomu. Risināšanas gaitā tas var radīt šaubas, vai ātri iegūtais novērtējums patiešām ir pareizs – šādos gadījumos nav citas izejas, kā paļauties uz intuīciju, kuru var attīstīt, izrēķinot lielu uzdevumu skaitu.

8.piemērs 100 trusīši mežā atrada mellenes. Jaunākais trusītis salasīja 1 melleni, otrs jaunākais - 2 mellenes, trešais - 4 mellenes un tā tālāk, līdz vecākais salasīja 2^{99} mellenes. Pienāca lapsiņa un piedāvāja palīdzēt pārdalīt ogas godīgāk - viņa atkārtoti izvēlēsies divus trusīšus un sadalīs viņu kopīgo ogu skaitu starp viņiem līdzīgi, pati apēdot lieko ogu (ja kopskaits ir nepāra) kā samaksu par darbu. Kāds ir lielākais skaits melleņu, ko lapsiņa var apēst ar šādiem noteikumiem?

Atrisinājums. Ievērosim – ja diviem trusīšiem ir katram vismaz 1 oga, tad arī pēc pārdalīšanas katram no tiem būs vismaz viena oga, tātad lapsiņa nevar apēst vairāk par $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{99} - 100 = 2^{100} - 101$ ogām. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu, lai pierādītu, ka lapsiņa var panākt, lai visiem trusīšiem beigās paliek katram tieši 1 oga, t.i., lapsiņa apēda $2^{100} - 101$ ogas. Indukciju veiksim trusīšu skaitam.

Indukcijas bāze. $n = 1$. Šajā gadījumā ir viens trusītis, kuram ir tieši viena oga, tādēļ prasītais ir sasniegts.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim $k - 1 \geq 1$ lapsiņa var veikt operācijas

$$(\underbrace{1, 2, 4, \ldots, 2^{k-2}}_{\text{k-1}}) \to (\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1, 2^{k-2}}_{\text{k-1}}) \to (\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{\text{k-1}}),$$

kuru rezultātā visiem $k - 1$ trusīšiem paliek katram pa vienai ogai.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka prasīto var panākt arī k trusīšiem. Vispirms aplūkojam pirmos $k - 1$ trusīšus, kuriem pēc induktīvā pieņēmuma lapsiņa var atstāt katram tikai 1 ogu

$$(\underbrace{1, 2, 4, \ldots, 2^{k-2}}_{\text{k-1}}, 2^{k-1}) \to (\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1, 2^{k-2}}_{\text{k-1}}, 2^{k-1}) \to (\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1, 1}_{\text{k-1}}, 2^{k-1}).$$

Tālāk lapsiņa pārdala ogas pēdējiem diviem trusīšiem

$$(\ldots, 1, 2^{k-1}) \to (\ldots, 2^{k-2}, 2^{k-2}).$$

Tālāk lapsiņa pārdala ogas pirmajiem $k - 1$ trusīšiem, veicot induktīvā pieņēmuma otro pārveidojumu

$$(\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1, 2^{k-2}}_{\text{k-1}}, 2^{k-2}) \to (\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1, 1}_{\text{k-1}}, 2^{k-2}).$$

Un beigu beigās lapsiņa pēc nupat minētā principa pārdala ogas pēdējiem $k - 1$ trusīšiem, izmantojot induktīvo pieņēmumu

$$(1, \underbrace{1, 1, \ldots, 1, 2^{k-2}}_{\text{k-1}}) \to (1, \underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{\text{k-1}}).$$

Līdz ar to lapsiņa ir panākusi situāciju, kurā katram trusītim ir tieši 1 oga, arī k trusīšu gadījumā, pierādot induktīvo pāreju.

Tas nozīmē, ka 100 trusīšu gadījumā lapsiņa var panākt, ka visiem trusīšiem paliek tieši 1 oga, kas nozīmē, ka lapsiņa būs apēdusi $2^{100} - 101$ ogu, kas ir maksimums no iepriekš secinātā.

Komentārs. Konstrukciju veidošanā nedrīkst aizmirst par indukcijas lietošanu, kas ļauj izvairīties no pilnas konstrukcijas uzdošanas.

9.piemērs Ramona uzzīmēja izliektu 2023-stūri plaknē. Petr katrā 2023-stūra virsotnē ierakstīja reālu skaitli tā, ka jebkurās divās blakus esošās virsotnēs uzrakstīto skaitļu starpība pēc moduļa ir ne lielāka par 1. Tad starp jebkurām divām virsotnēm, kas neatrodas blakus, Ramona novilka diagonāli, ja tajās ierakstīto skaitļu starpība pēc moduļa ir ne lielāka par 1. Ar d apzīmēsim diagonāļu skaitu, ko Ramona novilka. Noteikt mazāko iespējamo d vērtību.

Atrisinājums. Mazākā iespējamā d vērtība ir 2020. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu, lai pierādītu n-stūrim, ka mazākā iespējamā d vērtība ir $d = n - 3$.

Indukcijas bāze. $n = 3$, kur acīmredzami prasītais izpildās, jo trijstūrī var novilkt tieši $d = 0$ diagonāles. *Ja nav skaidrs, vai šis gadījums patiešām ir derīgs uzdevuma kontekstā, drīkst izmantot arī lielāku, piemēram, $n = 4$, kur pierādījums nav grūts.*

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim $k \geq 3$ Ramona k-stūrī nevar novilkt mazāk par $k - 3$ diagonālēm.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka dotais apgalvojums izpildās arī $(k+1)$-stūrim, t.i., Ramona tajā nevar novilkt mazāk par $k-2$ diagonālēm. Aplūkosim $(k+1)$-stūra virsotni, kurā ierakstīts lielākais skaitlis (ja tādas ir vairākas, tad patvaļīgi izvēlas vienu), apzīmēsim tās vērtību ar v. Ievērosim, ka šīs virsotnes kaimiņu vērtības ir intervālā $[v-1; v]$. Acīmredzami, ka šie kaimiņi būs savienoti ar diagonāli, jo to starpība pēc moduļa nevar būt lielāka par 1.

Uz brīdi ignorējam aplūkoto virsotni ar lielāko vērtību. Atlikušās virsotnes veido k-stūri, kuram izpildās oriģinālā īpašība kaimiņiem, jo visiem pārējiem virsotņu kaimiņu pāriem īpašība saglabājas, bet jauniegūtajiem kaimiņiem, kas bija lielākās vērtības kaimiņi, mēs jau secinājām, ka prasītā īpašība izpildās. Iegūtajam k-stūrim no induktīvā pieņēmuma varam secināt, ka tajā Ramona novilks vismaz $k-3$ diagonāles.

Ignorēto virsotni padarām atkal redzamu. Visām tām diagonālēm, kas bija novilktas iegūtajā k-stūrī, joprojām ir jābūt novilktām, jo virsotnēs ierakstītie skaitļi nemainījās. Papildus tam ar diagonāli vēl tiks savienotas lielākās vērtības kaimiņi, kas pirms tam veidoja k-stūra malu. Līdz ar to Ramonai jānovelk vismaz $k-3+1=k-2$ diagonāles, kas pierāda induktīvo pāreju. No tā secinām, ka 2023-stūrī Ramona nevarēja novilkt mazāk par 2020 diagonālēm.

Atliek atrast konstrukciju, kurā 2020 diagonāles patiešām var sasniegt. Tādu var sasniegt, kā mazāko skaitli izvēloties 1 un uz vienu pusi no šī skaitļa secīgi rakstot skaitļus $2; 3; 4; \ldots; 1012$, bet uz otru rakstot $1.5; 2.5; 3.5; \ldots; 1011.5$. Šādā konstrukcijā ar diagonālēm būs savienoti skaitļi, kuru starpība ir 0.5 un kas ir intervālā $[1.5; 1011.5]$. Saskaitot var iegūt, ka tad būs novilktas tieši 2020 diagonāles, kas sniedz uzdevuma risinājumu.

Komentārs. Indukciju ir iespējams izmantot arī novērtējuma daļā.

10.piemērs Dots naturāls $n>1$. Uz kalna nogāzes ir n^2 stacijas, visas dažādos augstumos. Divi gaisa tramvaja uzņēmumi A un B apkalpo katrs k funikulierus, katrs no kuriem savieno kādu staciju ar kādu augstāk esošu staciju (bez starppieturām). Uzņēmuma A apkalpotajiem k funikulieriem ir k dažādi sākuma punkti un k dažādi beigu punkti, un funikulierim, kuram sākuma punkts ir augstāk, arī beigu punkts ir augstāk. Tādi pat nosacījumi izpildās arī uzņēmumam B. Teiksim, ka uzņēmums savieno divas stacijas, ja ir iespējams sākt ceļu no zemākās stacijas un pabeigt augstākajā, izmantojot vienu vai vairākus šī uzņēmuma funikulierus (un cita pārvietošanās starp stacijām nav atļauta). Atrast mazāko naturālo k, kuram var garantēt, ka ir divas stacijas, kuras savieno abi uzņēmumi.

Atrisinājums. Atbilde ir $k=n^2-n+1$.

Izveidosim konstrukciju pie $k=n^2-n$, kurā prasītās divas stacijas nevar atrast. Sanumurējam stacijas $1, 2, \ldots, n^2$, kur 1 atrodas viszemāk. Tad uzņēmums A apkalpo funikulierus $x \to x+n$ (katram $1 \le x \le n^2-n$), un uzņēmums B apkalpo $n(n-1)$ funikulierus $x \to x+1$ katram $x \not\equiv 0 \pmod n$ (tātad $1 \to 2 \to \ldots \to n$; $n+1 \to n+2 \to \ldots \to 2n$ utt.). Viegli redzams, ka šāds funikulieru izkārtojums apmierina uzdevuma nosacījumus. Tad divas stacijas x un y ir savienotas ar uzņēmumu A tikai tad, ja $x \equiv y \pmod n$, un x un y ir savienotas ar uzņēmumu B tikai tad, ja $cn < x, y \le (c+1)n$ kādam veselam c. Acīmredzami, ka abi nosacījumi vienlaicīgi nevar izpildīties, tātad prasītais neizpildās. (Visiem $k<n^2-n$, mēs no izveidotās konstrukcijas varam izdzēst dažus funikulierus.)

Atliek pierādīt, ka pie $k=n^2-n+1$ meklētās divas stacijas noteikti eksistē. Katram A funikulierim velkam bultiņu no lejas uz augšu. Tas izveido vairākas savienotu bultiņu ķēdes (bez cikliem, jo visi funikulieri iet no lejas uz augšu, un nevienā stacijā nepiestāj divi vai vairāk funikulieri), un dažas izolētas stacijas pa vienai, kuras uzskatām par ķēdēm ar garumu 1. Tādā gadījumā būs izveidojušās $n-1$ ķēdes, kas noklāj visas n^2 stacijas – to var redzēt, jo ķēdei ar r stacijām ir $r-1$ bultiņas, tādēļ a ķēdes nozīmē kopumā n^2-a bultiņas. Līdzīgi var secināt, ka B funikulieri veido $n-1$ ķēdes. Divas stacijas ir savienotas tad un tikai tad, ja tās atrodas vienā ķēdē.

Varam ievērot, ka šajā gadījumā uzņēmumam A vidējais ķēdes garums ir $\frac{n^2}{n-1}>n$, kas nozīmē, ka ir ķēde ar garumu vismaz $n+1$. Ja nav divu staciju, kuras savieno abi uzņēmumi, tad visām šīm $n+1$ stacijām ir jābūt atšķirīgās uzņēmuma B ķēdēs, kas ir pretrunā ar to, ka B ir tikai $n-1$ ķēdes. Tātad meklētās divas stacijas garantēti varēs atrast.

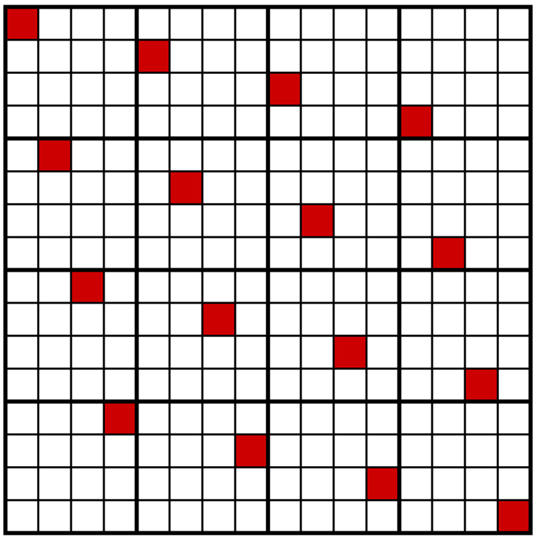
Komentārs. No praktiskās risināšanas puses skatoties, šo uzdevumu risina, vispirms samērā loģiski tiekot līdz konstrukcijai un tad piemeklējot pretrunu novērtējuma daļā. Jāņem vērā, ka konstrukcijas idejas parādās diezgan acīmredzami pie mazām vērtībām, kā $n = 3$ vai 4.

11.piemērs Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$. Aplūkojam $n \times n$ šaha galdiņu, kas sastāv no n^2 rūtiņām. Konfigurāciju no n torņiem sauksim par *miermīlīgu*, ja katrā rindā un katrā kolonnā atrodas tieši viens tornis. Atrast lielāko naturālo skaitli k, kuram izpildās, ka jebkurai miermīlīgai n torņu konfigurācijai var atrast $k \times k$ rūtiņu kvadrātu, kura k^2 rūtiņās nav neviena torņa.

Atrisinājums. Atbilde ir $k = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$ jeb tāds k, kuram izpildās $k^2 < n \leq (k+1)^2$.

Pierādīsim, ka šādu $k \times k$ kvadrātu vienmēr varēs atrast. Sanumurējam rindas un kolonnas ar skaitļiem no 0 līdz $n-1$. Aplūkojam to rindu i, kurā esošais tornis ir kolonnā ar numuru $n-1$ (pēdējā kolonnā). Tā kā $k^2 < n$, tad varam izvēlēties k secīgus $k \times k$ rūtiņu kvadrātus, kuri satur rindu i un neaizsniedzas līdz pēdējai kolonnai. Šo kvadrātu iekšienē rindās būs ne vairāk kā $k-1$ torņi, jo rindā i tornis jau atrodas ārpus kvadrātiem. Tas nozīmē, ka starp šiem kvadrātiem būs kāds, kurā nav torņu, kas ir meklētais.

Atliek parādīt, ka lielāka k vērtība nav iespējama. Aplūkojam $n = m^2$. Izvietojam torņus pozīcijās $(mi+j, mj+i)$ katriem $0 \leq i, j \leq m-1$. Attēlā dots piemērs, ja $n = 16$.



Viegli algebriski vai vizuāli var pārliecināties, ka šādā konstrukcijā nav iespējams atrast $m \times m$ rūtiņu kvadrātu bez torņiem. Kā arī jāņem vērā, ka jebkurai mazākai vērtībai $n' < n$ laukumu $n' \times n'$ var iegūt, nogriežot malējās rindas un kolonnas no $n \times n$ laukuma (un, ja nepieciešams, pievienojot torņus tukšās rindās vai kolonnās). Iegūtajā $n' \times n'$ laukumā joprojām nevarēs atrast $m \times m$ kvadrātu bez torņiem, jo iegūtais laukums ir apakškopa $n \times n$ laukumam (ar iespējamiem papildus torņiem). Tas pierāda k maksimālo novērtējumu.

Komentārs. Šī uzdevuma praktiska risināšana balstās uz mazo gadījumu kārtīgu izpēti un izpratni. Pie tam, ir grūti saprast atbildi aprakstošo sakarību, kamēr netiek izmēģināti gadījumi līdz vērtībām $n = 12; 13$. Tas bieži vien ir jāņem vērā uzdevumos, kur nākas izvirzīt savu hipotēzi, ka pie pavisam mazām mainīgo vērtībām ir ļoti daudz potenciālo atbildes funkciju, tādēļ iespēju robežās jāmēģina aplūkot pēc iespējas lielākus gadījumus.