

Kombinatoriskā optimizācija - 1.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums. Kādam Sultānam ļoti patīk bērni. Kādu reizi viņš noalgoja 100 zeltkaļus uz gadu un uzdeva viņiem uzdevumu - katru dienu gada garumā viņiem katram ir jāizgatavo rotaļlieta no precīzi 100 gramiem tīra zelta un jāpiegādā to uz Sultāna pili. Tad, gada beigās, Sultāns plāno apdāvināt visus sultanāta bērnus.

Par nelaimi ir pakļūdušas baumas, ka viens no zeltkaļiem ir negodīgs un šmaucas - katru dienu viņš piegādā rotaļlietu, kura sver 99 gramus prasīto 100 gramu vietā.

Sultānam ir pieejami digitāli svāri, kuru precizitāte ir 1 grams un maksimālais atļautais svārs nav ierobežots. Ar kādu mazāko svēršanu daudzumu viņš var noskaidrot, vai kāds zeltkalis ir krāpnieks, un ja jā, tad kurš no zeltkaļiem ir krāpnieks?

Atrisinājums. Mazākais svēršanu daudzums ir 1.

Acīmredzami, ka vismaz viena svēršana ir nepieciešama, lai iegūtu jebkādu informāciju par rotaļlietu masu. Parādīsim, kā vienā svēršanā noskaidrot prasīto. Tā kā rotaļlietas tiek piegādātas katru dienu veselu gadu, tad no katra zeltkaļa kādā brīdī būs pieejamas 365 rotaļlietas. Aplūkojam 300.dienu pēc uzdevuma sākuma. Sultānam uz svāriem tad ir jāuzliek 3 rotaļlietas no 1.zeltkaļa, 6 rotaļlietas no 2.zeltkaļa, ..., 300 rotaļlietas no 100.zeltkaļa. Ja mēs pieņemam, ka visas rotaļlietas sver 100 gramus, tad kopējā masa uz svāriem būtu $S = 100 \cdot 3(1 + 2 + \dots + 100) = 100 \cdot \frac{3 \cdot 100 \cdot 101}{2}$ grammi. Papildus tam jāņem vērā svāru precizitāte, kas var rādījumu palielināt vai samazināt par 1 gramu.

Ievērosim, ja zeltkalis i būs šmaucies ar rotaļlietām, tad patiesā visu rotaļlietu masa būs samazināta par $3i$ gramiem. Aplūkojam iespējamus iznākumus uz svāriem.

- Ja svāri rāda S vai $S \pm 1$, tad varam secināt, ka visi zeltkaļi dara savu darbu godprātīgi un nešmaucas.
- Ja svāri rāda $S - 3i$ vai $S - 3i \pm 1$ kādam i , kam izpildās $1 \leq i \leq 100$, tad varam secināt, ka i -tais zeltkalis šmaucas.

Tā kā visiem aplūkotajiem iznākumiem nepārklājas neviena no iespējamajām svāru vērtībām, kā arī šie ir visi iespējamie gadījumi, tad minētie secinājumi ļauj šajā vienā svēršanā garantēti noteikt, kāda ir reālā situācija.

2.uzdevums. Dots naturāls skaitlis k un plaknes punkts P . Filips vēlas uzzīmēt vairākas taisnes tā, lai jebkurš stars, kas iziet no P , krustotu vismaz k novilktais taisnes. Noteikt mazāko iespējamo taisņu skaitu, kas Filipam jānovelk, lai sasniegtu prasīto.

Atrisinājums. Mazākais iespējamais taisņu skaits ir $2k + 1$.

Vispirms pierādīsim, ka nepietiek ar $2k$ vai mazāk taisnēm. Pieņemsim pretējo. Aplūkojam vienu no taisnēm, un novelkam tai paralēlu taisni l caur P . Taisne l veido divus no P pretējos virzienos izejošus starus. Ievērosim, ka sākotnēji aplūkotā taisne paralelītātes dēļ l nekrusto. Tad paliek ne vairāk par $2k - 1$ taisnēm, kuras katra var krustot l ne vairāk kā vienā punktā. Tātad uz l esošo krustpunktu skaits nepārsniedz $2k - 1$. Tas nozīmē, ka vienam no stariem uz l būs ne vairāk kā $k - 1$ krustpunktu ar citām taisnēm, kas ir pretruna, un Filips prasīto nevarēs sasniegt.

Parādīsim, kā Filips var prasīto sasniegt ar $2k + 1$ taisnēm. Uzzīmējam regulāru $(2k + 1)$ -stūri, kuram P ir apvilktais riņķa līnijas centrs, un izvēlamies par taisnēm šī daudzstūra malas. Ievērosim ģeometrisko faktu: ja doti divi stari a un b , kas iziet no viena punkta, un caur kādu punktu uz b novelk pret b perpendikulāru taisni, tad tā krusto a tad un tikai tad, ja leņķis starp a un b ir mazāks par 90° . Šo faktu var triviāli pierādīt ar Dekarta koordinātām vai trigonometriju.

Aplūkojam starus S , kas savieno P ar regulārā daudzstūra malu viduspunktiem. Šo staru ir $2k + 1$, tie visi ir izvietoti vienādās leņķu atšķirībās pa $\frac{360^\circ}{2k+1}$ ap P , kā arī šie stari ir attiecīgo malu vidusperpendikuli, tātad perpendikulāri novilktais taisnēm. Novelkam patvaļīgu staru t caur P , kā arī šim staram perpendikulāru taisni t_p caur P , kas sadala plakni divās daļās. Acīmredzami, ka S specifiskā izvietojuma dēļ pusplaknē ar t atradīsies vismaz k stari no S , kuri nesakrīt ar t_p . Izmantojot iepriekš aplūkoto ģeometrisko faktu, varam secināt, ka ikviena no malām, kas atbilst minētajiem k stariem no S , krustos t , jo aplūkotais plaknes leņķis uz abām pusēm no t ir mazāks par 90° . Tas nozīmē, ka jebkuram staram t prasītais izpildīsies.

3. uzdevums. Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$, kuram uzzīmēts $n \times n$ rūtiņu laukums. Sākotnēji visas laukuma rūtiņas bija baltas. Par *peldošu plusu* saucam rūtiņu piecinieku (M, L, R, A, B) , kam izpildās, ka rūtiņa L atrodas vienā rindā ar rūtiņu M un pa kreisi no M , rūtiņa R atrodas vienā rindā ar M un pa labi no M , rūtiņa A atrodas vienā kolonnā ar M un uz augšu no M , rūtiņa B atrodas vienā kolonnā ar M un uz leju no M . Māris dotajā rūtiņu laukumā izkrāsoja k melnas rūtiņas tā, ka nevar atrast peldošu plusu no tikai melnām rūtiņām. Noteikt lielāko iespējamo rūtiņu skaitu k (atkarībā no n), ko Māris varēja šādi izkrāsot.

Piezīme. Nosauktās rūtiņas L, R, A, B ne obligāti atrodas tieši blakus M , starp tām var būt vairāku rūtiņu atstarpe.

Atrisinājums. Lielākais iespējamais rūtiņu skaits ir $4n - 4$.

Lai sasniegtu šo vērtību, $n \times n$ laukumā var izkrāsot visas malējās un stūra rūtiņas. Viegli saskaitīt, ka iekrāsoto rūtiņu tad ir tieši $4n - 4$, kā arī var redzēt, ka visās rindās un kolonnās, kas nav tieši pie malas, ir tikai 2 melnas rūtiņas, tātad tajās neveidojas peldoši plusi. Savukārt, rūtiņām pie malas virzienā uz laukuma ārpusi vairs nav citu melnu rūtiņu, tātad tās arī nevar būt peldoša plusa vidū.

Pierādīsim, ja laukumā iekrāso vismaz $4n - 3$ rūtiņas, tad noteikti veidojas peldošs plus. Pieņemsim pretējo, ka peldoša plusa laukumā nav. Tādā gadījumā katra melnā rūtiņa nav peldoša plusa centrā (rūtiņa M), kas nozīmē, ka šai rūtiņai vismaz vienā no virzieniem $\leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow$ nav citu melnu rūtiņu. Aplūkojam visus pārus $(s, \leftarrow), (s, \rightarrow), (s, \uparrow)$ un (s, \downarrow) , kur s ir melna rūtiņa un bultiņa norāda virzienu, kurā, ejot no s , vairs nav citu melnu rūtiņu. Apzīmējam pāru skaitu laukumā ar P . Tā kā jebkura melnā rūtiņa veido vismaz vienu pāri, tad $P \geq 4n - 3$.

Aplūkojam visvairāk to pa kreisi esošo kolonnu, kurā ir vismaz viena melna rūtiņa. Šajā kolonnā visaugstāk esošā melnā rūtiņa x acīmredzami veido vismaz divus pārus (x, \leftarrow) un (x, \uparrow) . Līdzīgi, viszemāk kolonnā esošā melnā rūtiņa y veido vismaz divus pārus (y, \leftarrow) un (y, \downarrow) . Šīs melnās rūtiņas rada vismaz 2 papildus pārus (pat ja $x = y$), ko iepriekš neieskaitījām novērtējumā. Šo pašu spriedumu varam pielietot arī pa labi vistālāk esošajai kolonnai ar melnām rūtiņām. Ievērosim, ka vistālāk pa kreisi un pa labi esošās kolonnas nevar sakrist, jo pretējā gadījumā būtu ne vairāk par n melnām rūtiņām, taču $4n - 3 > n$, ja $n \geq 3$. Tas nozīmē, ka ir jābūt vismaz $P \geq (4n - 3) + 4 = 4n + 1$ pāriem.

Katram pārim bultiņai ir viens no 4 iespējamajiem virzieniem. Tā kā $P \geq 4n + 1$, pēc Dirihlē principa varam secināt, ka vienam no virzieniem ir vismaz $n + 1$ pāri. Pieņemsim, ka tas ir virziens \rightarrow , un apzīmēsim šos pārus $(s_1, \rightarrow), (s_2, \rightarrow), \dots, (s_{n+1}, \rightarrow)$. Tā kā laukumā ir n rindas, tad kādā no rindām ir vismaz 2 no pāriem, pieņemsim, ka tie ir (s_i, \rightarrow) un (s_j, \rightarrow) . Taču, tā kā viena no rūtiņām s_i un s_j atrodas pa labi no otras, viens no šiem pāriem nevar būt derīgs pāris pēc mūsu definīcijas. Tātad mūsu pieņēmums ir aplams, un laukumā ar vismaz $4n - 3$ melnām rūtiņām garantēti veidojas peldošs plus. Tas pierāda prasīto.

4. uzdevums. Doti naturāli skaitļi $n \geq 2$ un m . Rindā izvietotas m balsošanas kastes. Divi spēlētāji A un B spēlē spēli. Gājiena laikā A vispirms izvēlas divas kastes un katrā no tām iemet vienu balsojuma aploksnī. Pēc tam B izvēlas vienu kasti, un visas tajā esošās aploksnis izmet ārā. Tālāk sākas jauns gājiena. Spēlē uzvar A , ja pēc kāda gājiena var atrast kasti, kurā atrodas n aploksnis. Katram $n \geq 2$ atrast minimālo m vērtību, kurai A var garantēt uzvaru spēlē neatkarīgi no B darbībām.

Atrisinājums. Meklētā minimālā vērtība ir $m = 2^{n-1} + 1$.

Vispirms pierādīsim, ka $m \geq 2^{n-1} + 1$. Aplūkojam patvaļīgu spēles pozīciju, kurā kastēs a_1, a_2, \dots, a_r ir vismaz viena aploksnis, un saskaitām lielumu

$$S = \sum_{i=1}^r 2^{a_i-1}.$$

Šajā lielumā katrai netukšajai kastei tiek piešķirts svars atkarībā no aplokšņu skaita tajā. Ievērosim, ka tukša kaste var kļūt par netukšu un iegūt svaru, kā arī var notikt pretējais.

Apgalvojums. Spēlētājs B var spēlēt tā, lai gājiena rezultātā S nepalielinātos, izņemot gadījumu, ja A izvēlas divas tukšas kastes un visās pārējās kastēs ir katrā ne vairāk par vienu aploksnī.

Pierādījums. Šķirojam gadījumus:

- Ja A gājiena laikā izvēlas divas netukšas kastes ar r un s aploksnēm, kurām pieņemsim, ka $r \geq s$. Pēc A darbībām S palielinās par $2^{r-1} + 2^{s-1}$. Tad B izvēlas to kasti, kurā tagad ir $r + 1$ aploksnis, samazinot S vērtību par 2^r . Tā kā $2^r \geq 2^{r-1} + 2^{s-1}$, pēc gājiena beigām S vērtība būs saglabājusies vai samazinājusies.
- Ja A gājiena laikā izvēlas tukšu kasti un netukšu kasti ar $r \geq 1$ aploksnēm. Pēc A darbībām S palielinās par $2^{r-1} + 1$. Tad B izvēlas to kasti, kurā tagad ir $r + 1$ aploksnis, samazinot S vērtību par 2^r . Tā kā $2^r \geq 2^{r-1} + 1$, jo $r \geq 1$, pēc gājiena beigām S vērtība būs saglabājusies vai samazinājusies.
- Ja A gājiena laikā izvēlas divas tukšas kastes. Pēc A darbībām S palielinās par 2. Ja kādā kastē ir $r \geq 2$ aploksnis, tad B var izvēlēties to un samazināt S par $2^{r-1} \geq 2$, un pēc gājiena beigām S vērtība būs saglabājusies vai samazinājusies. Ja tādas kastes nav, tad esam situācijā, ka visās pārējās kastēs ir katrā ne vairāk par vienu aploksnī.

Visi gadījumi ir aplūkoti, tātad apgalvojums ir patiess.

Ievērosim, ka B vienmēr pēc gājiena beigām būs iztukšojis vismaz vienu kasti, tāpēc A nevar panākt vairāk par $m - 1$ netukšām kastēm. No tā redzam, ka, spēlējot pret aprakstīto B stratēģiju, maksimālā S vērtība tiek sasniegta situācijā, kad ir $m - 1$ kaste ar vienu aploksnī, jo jebkurš tālāks gājiena S vērtību nevar palielināt. Šajā gadījumā $S = m - 1$. Ja kādā brīdī kādā kastē ir n aploksnis, tad tajā pozīcijā izpildās $S \geq 2^{n-1}$. Apvienojot šos rezultātus, iegūstam $m \geq 2^{n-1} + 1$.

Ja $m = 2^{n-1} + 1$, tad A var garantēt uzvaru ar tālāk aprakstīto stratēģiju. Sākotnēji, kamēr vien iespējams, A izvēlas divas tukšas kastes un ieliek katrā vienu aploksnī. Acīmredzami, ka gājiena ietvaros netukšo kastu skaits palielinās par vismaz 1. Tā dara, līdz sasniedz $m - 1 = 2^{n-1}$ kastes ar vienu aploksnī. Tad A sadala šīs $m - 1$ kastes pa pāriem, un secīgi vienu reizi izvēlas katru kastu pāri. Redzams, ka 2^{n-2} gājienos tiks iegūtas 2^{n-1} kastes ar divām aploksnēm, no kurām B būs paguvjis izgāzt ne vairāk kā pusi (to limitē gājienu skaits). Tātad garantēti būs vismaz 2^{n-2} kastes ar 2 aploksnēm. Tālāk induktīvi turpina šo procesu, lai iegūtu vismaz 2^{n-k} kastes ar k aploksnēm, kas pie $k = n$ dod vienu kasti ar n aploksnēm. Tas pierāda prasīto.

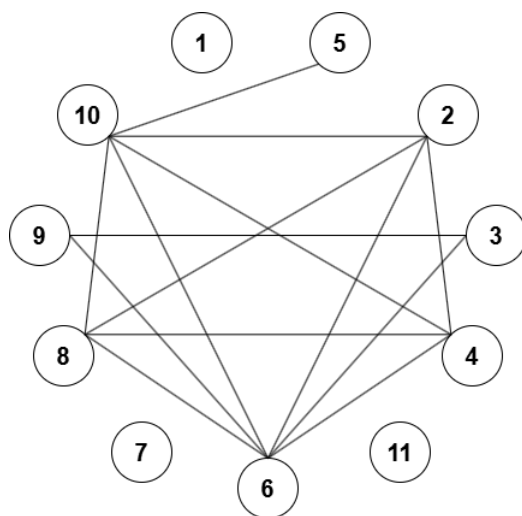
Kombinatoriskā optimizācija - 2.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums. Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$. Dainis saraksta skaitļus $1, 2, \dots, n$ aplī tā, lai jebkuri divi blakus stāvoši skaitļi būtu savstarpēji pirmskaitļi. Tad Dainis novelk taisnu nogriezni starp jebkuriem diviem skaitļiem, kuri nav savstarpēji pirmskaitļi. Nogrieznim s ar d_s apzīmējam starpību starp tā galapunktos esošajiem skaitļiem, bet ar p_s apzīmējam nogriežņu skaitu, ko s krusto.

Atrast lielāko iespējamo n vērtību, kurai Dainis var skaitļus aplī sarakstīt tā, lai katram novilktajam nogrieznim s izpildītos $p_s \leq |d_s|$.

Atrisinājums. Lielākā iespējamā n vērtība ir 11.

Derīgs izkārtojums pie $n = 11$ parādīts zīmējumā zemāk.

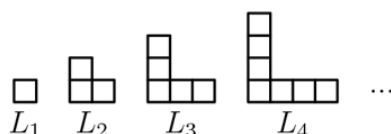


Ar pilno pārlasi pa visiem 14 novilktajiem nogriežņiem var pārlicināties, ka nosacījumi ir izpildīti. Pierādīsim, ka, ja $n \geq 12$, tad prasīto nevar izdarīt. Veicam vairākus novērojumus.

1. Ja n ir pāra, tad nepāra un pāra skaitļu aplī ir vienāds skaits. Ja n ir nepāra, tad nepāra skaitļu ir par vienu vairāk. Tā kā jebkuri pāra skaitļi nav savstarpēji pirmskaitļi, tad tie nedrīkst stāvēt aplī blakus, tātad starp jebkuriem diviem pāra skaitļiem jābūt vismaz vienam nepāra. Tas atļauj tikai izkārtojumu *pāra, nepāra, pāra, nepāra, ..., pāra, nepāra, (nepāra), pāra*, kur pirmais un pēdējais skaitlis ir viens un tas pats.
2. Starp jebkuriem diviem secīgiem pāra skaitļiem k un $k + 2$ drīkst vienā apla pusē atrasties tikai nepāra skaitļi. Aplūkojam nogriezni s , kas savieno šos divus pāra skaitļus, tam $d_s = 2$. Tā kā $n \geq 12$, aplī ir vismaz 6 pāra skaitļi, tātad vismaz 4 citi, neskaitot aplūkotos divus. Ja katrā no s pusēm ir vismaz 2 citi pāra skaitļi, tad s krusto vismaz $2 \cdot 2 = 4$ taisnes un $p_s \geq 4$ – pretruna. Ja vienā pusē ir tieši 1 pāra skaitlis, tad otrā pusē ir vismaz 3 un attiecīgi $p_s \geq 3$ – arī pretruna. Tātad starp secīgiem pāra skaitļiem atrodas tikai nepāra skaitļi. Apvienojot to ar 1.secinājumu, tad redzams, ka pāra skaitļi izvietosies pa pāra skaitļu pozīcijām secīgi $2 - 4 - 6 - \dots$
3. Aplūkojam skaitļus 3 un 9. Katrs no tiem ir savienots ar vismaz trim citiem skaitļiem, jo $n \geq 12$. Ievērosim, ka 3 nevar būt starp secīgiem pāra skaitļiem, jo, vai nu 3 nebūs savstarpējs pirmskaitlis ar kādu no tiem, vai arī no 3 izejošie trīs nogriežņi krustos šos pāra skaitļus savienojošo nogriezni, kuram $d_s = 2$, un būs pretruna. Tātad 3 var atrasties tikai starp 2 un lielāko pāra skaitli p , kas ir n vai $n - 1$. Līdzīgu secinājumu varam veikt arī par skaitli 9. Tādā gadījumā gan 3, gan 9 atradīsies starp 2 un p . Taču no 1.secinājuma zināms, ka starp 2 un p var atrasties ne vairāk par diviem nepāra skaitļiem, tātad 3 un 9 atradīsies blakus. Tā kā šie skaitļi nav savstarpēji pirmskaitļi, tas nav iespējams pēc uzdevuma nosacījumiem. Esam pierādījuši, ka pie $n \geq 12$ prasīto izdarīt nevar.

2.uzdevums. Katram naturālam m definējam L_m kā figūru, kura iegūstama, pārklājoties diviem $1 \times m$ un $m \times 1$ taisnstūriem, kuriem kopīgs galējais 1×1 kvadrāts (skatīties zīmējumā). Izmantojot dažas no figūrām, kuras apzīmēsim $L_{m_1}, L_{m_2}, \dots, L_{m_k}$, tiek noklāts $n \times n$ rūtiņu laukums, kur n ir dots naturāls skaitlis. Starp visiem iespējamajiem laukuma klājumiem atrast to, kuram summa $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ ir minimāla.

Piezīme. Noklājot laukumu, figūras drīkst rotēt, kā arī tās var pārklāties un iziet ārpus laukuma robežām. Drīkst arī izmantot vairākas viena tipa figūras.



Atrisinājums. Minimālā iespējamā summas vērtība ir $\frac{n(n+1)}{2}$.

Vispirms pierādīsim, ka šādu vērtību var sasniegt. To var izdarīt induktīvi, liekot pēc kārtas figūras L_1, L_2, \dots, L_n šādā secībā, no iepriekšējām k izveidojot $k \times k$ kvadrātu, kuram stūrī pieliek L_{k+1} , lai veidotos $(k+1) \times (k+1)$ kvadrāts. Šādā konstrukcijā meklētā summa acīmredzami ir $m_1 + m_2 + \dots + m_k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Tālāk pierādīsim, ka mazāku vērtību nav iespējams sasniegt.

Apgalvojums. Lai pēc prasībām noklātu $n \times n$ laukumu, ir nepieciešamas vismaz n figūras.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka $n \times n$ laukums ir noklāts ar ne vairāk kā $n-1$ figūrām. Ievērosim, ka ikvienai figūrai ir maksimums viena rinda, kurā tā noklāj vairāk par 1 rūtiņu. Tā kā figūru ir mazāk par n , tad ir kāda rinda, kurā katra no figūrām noklāj ne vairāk par 1 rūtiņu. Taču tādā gadījumā šajā rindā, kurā ir n rūtiņas, ir noklātas ne vairāk par $n-1$ rūtiņām, kas ir pretrunā ar to, ka laukums ir noklāts. Secinām, ka pieņēmums ir nepareizs un apgalvojums izpildās.

Ievērosim, ka figūra L_{m_i} kvadrātā noklāj ne vairāk kā $2m_i - 1$ rūtiņas. Tad, ja figūras $L_{m_1}, L_{m_2}, \dots, L_{m_k}$ noklāj laukumu, ir jāizpildās nevienādībai

$$(2m_1 - 1) + \dots + (2m_k - 1) \geq n^2 \implies 2(m_1 + \dots + m_k) \geq n^2 + k \geq n^2 + n,$$

kur pēdējā nevienādībā tika izmantots no apgalvojuma izrietošais fakts $k \geq n$. No iegūtā rezultāta acīmredzami, ka $m_1 + \dots + m_k \geq \frac{n(n+1)}{2}$, kas pierāda prasīto.

3. uzdevums. Ziemeļos N oligarhi uzbūvēja valsti ar N pilsētām, kur katra pilsēta pieder vienam oligarham. Papildus tam katrs oligarhs uzbūvēja dažus ceļus starp kaut kādām pilsētām, starp katru pilsētu pāri uzbūvējot ne vairāk kā 1 ceļu (ievērosim, ka starp divām pilsētām var būt vairāki ceļi, taču tie katrs pieder citam oligarham).

Kopā tika uzbūvēti d ceļi. Daži oligarhi vēlējās izveidot korporāciju, apvienojot sev piederošos ceļus un pilsētas, lai jebkurām divām korporācijā esošām pilsētām varētu no vienas uz otru aizbraukt tikai pa korporācijas ceļiem. Izrādījās, ka neviena oligarhu grupa, kurā ir mazāk par N oligarhiem, nevar izveidot derīgu korporāciju. Kāda ir maksimālā iespējamā d vērtība?

Atrisinājums. Maksimālā iespējamā d vērtība ir $\binom{N}{3} = \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$.

To var sasniegt šādā veidā. Sanumurējam oligarhus $1, 2, \dots, N$. Katram i , kur $1 \leq i \leq N$, oligarhs ar numuru i būvē ceļu starp pilsētām, kas pieder oligarhiem j un k , kur $1 \leq j < k < i$. Oligarhs i uzbūvē visus šādus iespējamus ceļus (katram iespējamam j un k pārim), kopā uzbūvējot $\binom{i-1}{2} = \frac{i(i-1)}{2}$ ceļus. Kopā saskaitot visu oligarhu uzbūvētos ceļus, izmantojam hokeja nūjas identitāti, lai iegūtu

$$d = \sum_{i=3}^N \binom{i-1}{2} = \binom{N}{3}.$$

Aplūkojam patvaļīgu oligarhu grupu S , kurā ir mazāk par N oligarhiem, un šīs grupas oligarhu ar lielāko numuru apzīmējam ar X . Acīmredzami, ka neviens grupas oligarhs nebūs būvējis ceļu no X pilsētas, tātad X pilsēta nav sasniedzama pa S ceļiem un šie oligarhi nevar izveidot korporāciju. Tā kā šo spriedumu var pielietot jebkurai derīgai oligarhu grupai, prasītais izpildās.

Tālāk pierādīsim, ka vairāk par $\binom{N}{3}$ ceļiem uzbūvēti nevar būt. Mazie gadījumi $N = 1; 2; 3$ ir acīmredzami, tāpēc pieņemsim, ka $N \geq 4$. Ievērosim, ka neviens oligarhs nedrīkst uzbūvēt ceļu, kas iziet no viņa pilsētas, jo citādi šī ceļa galapunktu oligarhi veidotu derīgu korporāciju. Novērtēsim skaitu oligarhu trijniekiem (a, b, c) , kur oligarhs a ir uzbūvējis ceļu starp oligarhu b un c pilsētām (no iepriekš iegūtā, visi trīs oligarhi ir dažādi). Saucam šādus trijniekus par *labiem*. Ievērosim, ka labu trijnieku skaits ir tieši divas reizes lielāks par uzbūvēto ceļu skaitu jeb $2d$, jo labie trijnieki (a, b, c) un (a, c, b) attiecas uz vienu un to pašu ceļu.

Aplūkojam divus trijniekus (a, b, c) un (b, a, c) . Ja tie abi ir labi, tad oligarhu pāris a, b veido derīgu korporāciju, jo eksistē korporācijas ceļu maršruts $a \leftrightarrow c \leftrightarrow b$. Līdzīgi spriežot, varam secināt, ka patvaļīgiem trīs oligarhiem x, y, z ne vairāk par divām trijnieka (x, y, z) permutācijām var būt labas. Tā kā trīs dažādus oligarhus var izvēlēties $\binom{N}{3}$ veidos un katram oligarhu trijniekam atbilst ne vairāk par 2 labiem trijniekiem, tad labo trijnieku skaits nepārsniedz $2\binom{N}{3}$. Tātad $2d \leq 2\binom{N}{3} \implies d \leq \binom{N}{3}$, kas pierāda prasīto.

Piezīme. Risinājuma otro daļu (maksimalitāti) ir arī iespējams pierādīt ar matemātisko indukciju.

4. uzdevums. Dots naturāls skaitlis m , kā arī $m \times m$ rūtiņu laukums. Dažām rūtiņām centrā atrodas skudra. Laika brīdī 0 katra skudra sāk kustēties ar ātrumu 1 paralēli kādai no laukuma malām. Kad satiekas divas skudras, kuras iet pretējos virzienos, tās abas pagriežas par 90° pulksteņrādītāja virzienā un turpina kustēties ar ātrumu 1. Kad vienā punktā satiekas vairāk nekā 2 skudras, vai arī satiekas divas skudras, kas iet perpendikulāros virzienos, šīs skudras turpina kustēties tādā pašā virzienā, kā pirms tikšanās. Kad skudra sasniedz laukuma malu, tā no laukuma nokrīt un vairāk uz tā neparādās.

Aplūkojot visus iespējamus skudru sākuma izvietojumus, noteikt vēlāko iespējamo laika brīdi, kurā pēdējā skudra nokrīt no laukuma, vai arī pierādīt, ka šāds laika brīdis neeksistē.

Atrisinājums. Vēlākais iespējamais laika brīdis ir $\frac{3m}{2} - 1$.

Parādīsim, ka šāds laika brīdis ir sasniedzams. Aplūkojam divas skudras, kuras ir augšējās rindas gala rūtiņu centrā un sāk iet viena otrai pretī. Tās satiksies pēc augšējās rindas centrā pēc $\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$ laika brīžiem. viena skudra pagriezīsies uz augšu un nokritīs pēc $\frac{1}{2}$ laika brīžiem, bet otra pagriezīsies uz leju un turpinās ceļu vēl $m - \frac{1}{2}$ laika brīžus līdz nokrišanai laukuma lejā. Otra skudra būs bijusi uz laukuma $\frac{m}{2} - \frac{1}{2} + m - \frac{1}{2} = \frac{3m}{2} - 1$ laika brīžus, sasniedzot mūsu aplūkoto vērtību.

Pierādīsim, ka visas skudras būs nokritušas no laukuma pēc $\frac{3m}{2} - 1$ laika brīžiem. Aplūkojam divu pretī ejošu skudru sadursmi. Ievērosim, ka pēc sadursmes abas skudras iet pretējos virzienos, kas ir perpendikulāri virzienam pirms sadursmes. Tā kā nav svarīgi, kura no skudrām aiziet kurā virzienā, jo kopējā abu skudru trajektorija sadursmes rezultātā saglabājas tāda pati, varam patvaļīgi katrai sadursmei izvēlēties, kura skudra iet kurā virzienā (attiecīgi varam atteikties no nosacījuma par pagriešanos pulksteņrādītāja virzienā).

Sadalām skudras divās grupās atkarībā no sākotnējā iešanas virziena – tās, kuras iet pa labi un uz leju, un tās, kuras iet pa kreisi un uz augšu. Viegli redzams, ka sadurties var tikai skudras no atšķirīgām grupām, kā arī katrā sadursmē var izvēlēties skudru virzienus tā, lai arī pēc sadursmes skudra saglabātu savu grupu. Aplūkojam skudru a , kura iet tikai pa labi vai uz leju. Acīmredzami, ka ir iespējams veikt tikai galīgu skaitu šādu gājienu, jo laukums ir galīgs, tādēļ šī skudra kādā brīdī nokritīs no laukuma. Aplūkojam atlikušās skudras pēc a nokrišanas – tām varam izmantot šo pašu spriedumu, un to skaits samazinās, tādēļ secinām, ka visas skudras pēc galīga laika nokritīs no laukuma.

Pieņemsim, ka skudra r bija pēdējā, kas nokrita no laukuma, un, nezaudējot vispārīgumu, tā nokrita no laukuma labās malas, kuras galapunktus apzīmēsim ar A un B (augšējais stūris ir A). Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka tās nokrišanas punktam X izpildās $XB \leq \frac{1}{2}AB = \frac{m}{2}$. Sadalām skudras no jauna pa divām grupām – vienā grupā tās, kuras iet tikai pa labi un uz augšu, un otrā tās, kuras iet tikai pa kreisi un uz leju. Tad redzams, ka nokritusī skudra gāja pa labi un uz augšu, un uz augšu tā varēja noiet ne vairāk kā $\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$ vienības, bet pa labi – ne vairāk kā $m - \frac{1}{2}$ vienības. Kopā uz laukuma skudra r varēja atrasties ne vairāk kā $\frac{m}{2} - \frac{1}{2} + m - \frac{1}{2} = \frac{3m}{2} - 1$ laika brīžus, kas pierāda atbildes maksimalitāti. Ja izpildītos gadījums $XB \geq \frac{1}{2}AB$, tad varam izmantot šo pašu spriedumu, tikai ar iepriekšējo skudru sadalījumu grupās (pa labi un uz leju, kā arī pa kreisi un uz augšu), lai pierādītu uzdevumā prasīto.