Algebriski pārveidojumi

Kims Georgs Pavlovs, Alfrēds Saročinskis

1 Ievads

Prasmīgi spēt veikt algebriskus pārveidojumus, tas ir, ātri manipulēt ar izteiksmēm un zināt dažādas sakarības, ir svarīgi ne tikai algebrā, bet arī citās olimpiāžu matemātikas nozarēs – skaitļu teorijā, ģeometrijā un kombinatorikā. Šajā materiālā tiks vairāk pievērsts uzmanības šīs prasmes pielietošanai algebras un pāris skaitļu teorijas uzdevumos, bet vēlākos materiālus varēs apgūto pielietot arī citās nozarēs.

2 Dažādas identitātes

Šeit ir noderīgo sakarību saraksts, kas ir **obligāti jāzina**, ja vēlas veiksmīgi rēķināt olimpiāžu uzdevumus matemātikā.

Ja x, y, z ir reāli skaitļi, tad izpildās

1. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
2. $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$
3. $(x + y)^3 = x^3 + 3xy(x + y) + y^3$
4. $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
5. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
6. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
7. $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$
8. $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz$
9. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
10. $(x + y + z)(xy + yz + zx) = xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 3xyz$
11. $(x + y)(y + z)(z + x) = xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 2xyz$
12. $(x + y + z)(xy + yz + zx) = (x + y)(y + z)(z + x) + xyz$
13. $(x - y)(y - z)(z - x) = -xy(x - y) - yz(y - z) - zx(z - x)$
14. $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y) + 3yz(y + z) + 3zx(z + x) + 6xyz$
15. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

Pēdējā identitāte (15.) šajā materiālā tiks saukta par **skaisto identitāti**. Ievērosim, ka no tās izriet, ja $x + y + z = 0$, tad $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ jeb $x^3 + y^2 + z^3 = 3xyz$.

No teorijas viedokļa tas ir viss, kas Jums ir jāzina, bet šeit ir vēl pāris padomi, kas var būt noderīgi:

- ja uzdevuma nosacījumos ir dota kaut kāda sakarība, tad tā ir jāizmanto! Liekas acīmredzami, bet bieži vien skolēni aizmirst par to, kas ir dots uzdevuma nosacījumos. Piemēram, ja ir dots, ka $abc = 1$, tad visās citās sakarībās, kas iesaista tikai mainīgos a, b, c, mēs varam skaitli 1 aizstāt ar abc vai jebkurai izteiksmi klāt sareizināt abc, neizmainot tās vērtību, jo $abc = 1$.

- ja ir jāpierāda kaut kāda sakarība, tad mēģiniet no dotajām sakarībām uzkonstruēt līdzīgu sakarību pierādāmajai sakarībai. Šeit ar līdzīgu tiek saprasts, ka sakarība satur kaut kādu daļu no pierādāmās sakarības, līdzīgas pakāpes u.tml.

- ja ir jāpierāda kaut kāda sakarība, tad var domāt no *reverse engineering* perspektīvas – *ja mēs pieņemam, ka šī sakarība ir patiesa, kādām vēl sakarībām ir jāizpildās? Vai mēs varam pierādīt šīs citas sakarības un no tām iegūt to sākotnējo sakarību, kas mums bija jāpierāda?*

- bieži vien drīkst veikt ekvivalentus pārveidojumus dotajām sakarībām – pieskaitīt abām sakarības pusēm izteiksmi, sareizināt abas sakarības puses ar izteiksmi, izkāpināt abas sakarības puses kvadrātā.

- ja ir dota sakarība no trīs mainīgajiem, piemēram, a, b, c, tad var mēģināt izteikt trešo mainīgo, piemēram, c izmantojot tikai a, b un tad tālāk uzdevumā aizstāt visur c ar iegūto izteiksmi, kas sastāv no mainīgajiem a, b. Aplūkosim pāris piemērus:

  - Ja $a + b + c = 0$, tad varam izteikt, ka $c = -a - b$;
  - Ja $ab + bc + ca = 0$, tad $ab = -c(a + b)$, kas nozīmē, ka $c = -\frac{ab}{a+b}$;
  - Ja $abc = 1$, tad varam izteikt, ka $c = \frac{1}{ab}$;
  - Ja $ab + bc + ca = 1$, tad $c(a + b) = 1 - ab$, kas nozīmē, ka $c = \frac{1-ab}{a+b}$

  Tas, ka no dotās sakarības var izteikt vienu mainīgo, **nenozīmē**, ka tas obligāti ir jādara. Bieži vien šī izteikšana padarīs Jūsu citas izteiksmes sarežģītākas un grūtāk pārveidojamas, taču, ja Jūs varat tikt bez kļūdām galā ar visiem algebriskiem pārveidojumiem, tad Jūs varat to darīt.

2.1 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs. Doti veseli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka $ab + bc + ca = 1$. Pierādīt, ka skaitlis $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ ir vesela skaitļa kvadrāts.

Atrisinājums. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$\begin{gathered}(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) = \\ = (a^2+ab+bc+ca)(b^2+bc+ba+ac)(c^2+cb+ca+ab) = \\ = (a+b)(b+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b) = \\ = (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 = \\ = ((a+b)(b+c)(c+a))^2\end{gathered}$$

Tā kā a, b, c ir veseli skaitļi, tad arī skaitlis $(a + b)(b + c)(c + a)$ ir vesels, līdz ar to prasītais pierādītais.

2.piemērs. Naturāliem skaitļiem a, b, c izpildās sakarība $a^2+b^2+c^2 = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Pierādīt, ka skaitlis bc ir vesela skaitļa kvadrāts.

Atrisinājums. Pārveidosim doto izteiksmi

$$\begin{gathered}
a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\\
a^2+b^2+c^2=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2\\
a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\\
a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca=0\\
(a-b-c)^2-4bc=0\\
(a-b-c)^2=4bc\\
\left(\frac{a-b-c}{2}\right)^2=bc
\end{gathered}$$

Ievērosim, ka $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca=0$, kas nozīmē, ka $a^2+b^2+c^2=2ab+2bc+2ca$. Secinām, ka skaitlis $a^2+b^2+c^2$ ir pāra skaitlis, kas var izpildīties tad un tikai tad, ja a, b, c ir visi pāra skaitļi vai 2 no tiem ir nepāra un 1 pāra. Abos gadījumos viegli pārbaudīt, ka skaitlis $a-b-c$ būs pāra, kas nozīmē, ka $\frac{a-b-c}{2}$, ka ir vesels skaitlis. Esam ieguvuši, ka skaitlis bc ir vesela skaitļa kvadrāts, kas arī bija jāpierāda.

3.piemērs. Racionāli skaitļi a, b apmierina sakarību

$$a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1=0.$$

Pierādīt, ka skaitlis $1-ab$ ir racionāla skaitļa kvadrāts

Atrisinājums. Pārveidosim doto izteiksmi

$$\begin{gathered}
a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1=0\\
ab(a^2+2ab+b^2)+2(a+b)+1\\
ab(a+b)^2+2(a+b)+1\\
(ab-1)(a+b)^2+(a+b)^2+2(a+b)+1=0\\
(ab-1)(a+b)^2+(a+b+1)^2=0\\
(1-ab)(a+b)^2=(a+b+1)^2\\
1-ab=\left(\frac{a+b+1}{a+b}\right)^2
\end{gathered}$$

Ievērosim, ka $\frac{a+b+1}{1-ab}$ ir 2 veselu skaitļu dalījums, tāpēc tas ir racionāls skaitlis, ja $a+b\neq 0$, kas nozīmē, ka $1-ab$ ir racionāla skaitļa kvadrāts. Savukārt, ja $a+b=0$ tad

$$(1-ab)(a+b)^2=(a+b+1)^2 \implies 0=1^2,$$

kas ir acīmredzama pretruna.

4.piemērs Doti no nulles atšķirīgi reāli skaitļi x, y, z ar īpašību, ka $x+2y+4z=0$. Atrast visas iespējamās izteiksmes

$$\frac{x^2}{8yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{8z^2}{xy}$$

Atrisinājums. Pārveidosim doto izteiksmi

$$\frac{x^2}{8yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{8z^2}{xy}=\frac{x^3+8y^3+64z^3}{8xyz}$$

Pielietosim skaisto identitāti priekš $a = x, b = 2y, c = 4z$, lai iegūtu, ka

$$x^3 + 8y^3 + 64z^3 = a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 24xyz$$

Secinām, ka tādā gadījumā

$$\frac{x^2}{8yz} + \frac{y^2}{xz} + \frac{8z^2}{xy} = \frac{x^3 + 8y^3 + 64z^3}{8xyz} = \frac{24xyz}{8xyz} = 3$$

5.piemērs Veseliem skaitļiem x, y, z izpildās sakarība

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = xyz$$

Pierādīt, ka skaitlis $x^3 + y^3 + z^3$ dalās ar $x + y + z + 6$.

Atrisinājums. Pārveidosim doto izteiksmi

$$\begin{gathered}
(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = xyz \\
x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 = xyz \\
2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = xyz \\
2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)(x + y + z) = xyz(x + y + z)
\end{gathered}$$

No skaistās identitātes izriet, ka

$$\begin{gathered}
2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)(x + y + z) = xyz(x + y + z) \\
2(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = xyz(x + y + z) \\
2(x^3 + y^3 + z^3) = xyz(x + y + z) + 6xyz \\
2(x^3 + y^3 + z^3) = xyz(x + y + z + 6)
\end{gathered}$$

Ievērosim, ka tā kā $2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = xyz$, tad skaitlis xyz dalās ar 2, kas nozīmē, ka skaitlis $\frac{xyz}{2}$ ir vesels. Tādā gadījumā

$$\begin{gathered}
2(x^3 + y^3 + z^3) = xyz(x + y + z + 6) \\
x^3 + y^3 + z^3 = \frac{xyz}{2} \cdot (x + y + z + 6)
\end{gathered}$$

Secinām, ka skaitlis $x^3 + y^3 + z^3$ dalās ar $x + y + z + 6$, kas arī bija jāpierāda.

6.piemērs. Reāliem skaitļiem x, y izpildās sakarība $x^3 + y^3 + 3xy = 1$. Pierādīt, ka $x + y = 1$ vai $x = y = -1$.

Atrisinājums. Pielietosim skaisto identitāti priekš $a = x, b = y, c = -1$. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$\begin{gathered}
x^3 + y^3 + 3xy = 1 \\
x^3 + y^3 - 1 + 3xy = 0 \\
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \\
(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0 \\
(x + y - 1)(x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy) = 0
\end{gathered}$$

Secinām, ka $x+y-1=0$, kas nozīmē, $x+y=1$ vai

$$
\begin{gathered}
x^2+y^2+1-x-y-xy=0\\
2x^2+2y^2+2-2x-2y-2xy=0\\
(x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)=0\\
(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=0
\end{gathered}
$$

Tā kā reāla skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad ja trīs kvadrātu summa ir vienāda ar 0, tad katram no tiem ir jābūt vienādam ar 0. Tas nozīmē, ka $x-y=0$, $x-1=0$ un $y-1=0$ jeb $x=y=-1$.

7.piemērs. Doti no nulles atšķirīgi skaitļi a,b,c ar īpašību, ka

$$\left(1+\frac{a}{bc}\right)\left(1+\frac{b}{ca}\right)\left(1+\frac{c}{ab}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)^2$$

Atrast visas iespējamās skaitļa $a+b+c$ vērtības.

Atrisinājums. Atvērsim iekavās abas dotās sakarībās puses. Labās puses izteiksme kļūst par

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)^2=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+1=\\
=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}-\frac{2}{a}-\frac{2}{b}-\frac{2}{c}+1
\end{gathered}
$$

Savukārt, kreisās puses izteiksme kļūst par

$$
\begin{gathered}
\left(1+\frac{a}{bc}\right)\left(1+\frac{b}{ca}\right)\left(1+\frac{c}{ab}\right)=\\
=1+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}+\frac{ab}{abc^2}+\frac{bc}{bca^2}+\frac{ca}{acb^2}+\frac{abc}{(abc)^2}=\\
=1+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{abc}
\end{gathered}
$$

Noīsinot kopīgos saskaitāmos abās pusēs, iegūstam, ka

$$
\begin{gathered}
\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}+\frac{1}{abc}=\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}-\frac{2}{a}-\frac{2}{b}-\frac{2}{c}\\
\frac{a^2+b^2+c^2+1}{abc}=\frac{2(a+b+c)-2(ab+bc+ca)}{abc}\\
a^2+b^2+c^2+1=2(a+b+c)-2(ab+bc+ca)\\
a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-2(a+b+c)+1=0\\
(a+b+c)^2-2(a+b+c)+1=0\\
(a+b+c-1)^2=0\\
a+b+c=1
\end{gathered}
$$

Secinām, ka vienīgā iespējāmā skaitļa $a+b+c$ vērtība ir 1.

8.piemērs. Doti reāli skaitļi a,b,c ar īpašību, ka $abc=1$. Atrast visas iespējamās izteiksmes

$$\frac{a+1}{ab+a+1}+\frac{b+1}{bc+b+1}+\frac{c+1}{ca+c+1}$$

vērtības.

Atrisinājums. Pārveidosim doto izteiksmi

$$\begin{aligned}
&\frac{a+1}{ab+a+1}+\frac{b+1}{bc+b+1}+\frac{c+1}{ca+c+1}=\\
&=\frac{ac+c}{abc+ac+c}+\frac{b+1}{bc+b+1}+\frac{c+1}{ca+c+1}=\\
&=\frac{ac+c}{ca+c+1}+\frac{b+1}{bc+b+1}+\frac{c+1}{ca+c+1}=\\
&=\frac{ac+2c+1}{ca+c+1}+\frac{ab+a}{abc+ab+a}=\\
&=\frac{ac+2c+1}{ca+c+1}+\frac{ab+a}{ab+a+1}=\\
&=\frac{ac+2c+1}{ca+c+1}+\frac{abc+ac}{abc+ac+c}=\\
&\frac{ac+2c+1}{ca+c+1}+\frac{1+ac}{ca+c+1}=2
\end{aligned}$$

Mēs darījām sekojošu lietu – mēs reizinājām vienas daļas saucēju un skaitītāju, piemēram, ar c un tālāk aizstājām abc ar 1, lai divām daļām veidotos kopīgs saucējs un mēs varētu viņas savilkt uz vienas daļsvītras.

9.piemērs Doti dažādi nu nulles atšķirīgi skaitļi a, b, c ar īpašību, ka $a+b+c=0$. Atrast izteiksmes

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$$

Izteiksim mainīgo c, izmantojot mainīgos a, b. Ievērosim, ka $c=-a-b$, kas nozīmē, ka

$$\begin{aligned}
&\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}=\\
&=\frac{b+a+b}{a}+\frac{-a-b-a}{b}+\frac{a-b}{-a-b}=\\
&=\frac{2b}{a}+1-\frac{2a}{b}-1-\frac{a-b}{a+b}=\\
&=\frac{2(b^2-a^2)}{ab}-\frac{a-b}{a+b}=\\
&=\frac{2(a+b)^2(b-a)}{ab(a+b)}+\frac{ab(b-a)}{ab(a+b)}=\\
&=\frac{(2a^2+5ab+2b^2)(b-a)}{ab(a+b)}
\end{aligned}$$

Līdzīgi arī varam iegūt, ka

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=\\
&=\frac{a}{2b+a}-\frac{b}{2a+b}-\frac{a+b}{a-b}=\\
&=\frac{2a^2+ab-2b^2-ab}{(2a+b)(2b+a)}-\frac{a+b}{a-b}=\\
&=\frac{2(a-b)(a+b)}{2a^2+5ab+2b^2}-\frac{a+b}{a-b}=\\
&=\frac{2(a-b)^2(a+b)-(a+b)(2a^2+5ab+b^2)}{(2a^2+5ab+2b^2)(a-b)}=\\
&=\frac{-9ab(a+b)}{(2a^2+5ab+b^2)(a-b)}
\end{aligned}$$

Secinām, ka

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=\frac{(2a^2+5ab+2b^2)(b-a)}{ab(a+b)}\cdot\frac{-9ab(a+b)}{(2a^2+5ab+b^2)(a-b)}=9$$

10.piemērs. Doti reāli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$. Pierādīt, ka

- $\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}=1$
- $\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}=1$

Atrisinājums. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$$
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = a^2+b^2+c^2$$
$$ab+bc+ca=0$$

Līdz ar to varam secinām, ka

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}=\frac{a^2}{a^2+2bc-(ab+bc+ca)}=\frac{a^2}{a^2+bc-ab-ac}=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

Veicot līdzīgus pārveidojumus ar pārējiem saskaitāmajiem, iegūstam, ka

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}=\\&=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=\\&=\frac{-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\\&=\frac{-ab(a-b)-bc(b-c)-ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\\&=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1\end{aligned}$$

Lai pierādītu otru sakarību ievērosim, ka

$$\frac{bc}{a^2+2bc}=\frac{bc}{a^2+2bc-(ab+bc+ca)}=\frac{vc}{a^2+bc-ab-ac}=\frac{bc}{(a-b)(a-c)}$$

Veicot līdzīgus pārveidojumus ar pārējiem saskaitāmajiem, iegūstam, ka

$$\begin{aligned}&\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}=\\&=\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=\\&=\frac{-bc(b-c)-ca(c-a)-ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\\&=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1\end{aligned}$$

Esam pierādījuši abas sakarības.

3 Vienādojumu sistēmas

Šajā sekcijā aplūkosim dažādus veidus kā risināt vienādojumu sistēmas, kas parādās olimpiāžu uzdevumus. Kad sastopamies ar šāda veida uzdevumiem, ir vērts darīt sekojošas lietas:

- Saskaitīt/sareizināt visus sistēmas vienādojumus kopā – parasti ļoti daudz locekļu, izteiksmju saīsināsies pēc tā, kas ļaus mums iegūt ērtu izteiksmi, ar kuru strādāt tālāk;
- atņemt savā starpā divus sistēmas vienādojumus – parasti tas tiek darīts ar mērķi noīsināt kopīgos locekļus un iegūt jaunu izteiksmi, no kuras var kaut ko secināt;
- aplūkot lielāko vai mazāko no sistēmas mainīgajiem un veikt dažādus novērtējumus uz citiem sistēmas mainīgajiem. Tas mums ļaus iegūt dažādus ierobežojumus uz sistēmas mainīgajiem, kas parasti visticamāk ar kādu vienādojumu, ko var iegūt no sistēmas, ļaus mums viennozīmīgi noteikt mainīgo vērtības;
- veikt dažādus novērtējumus, nevienādības, piemēram, sakarību starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko, ja sistēmas mainīgie ir pozitīvi skaitļi. Lasītājs, kas nav pazīstams ar sakarību starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko, var iepazīties ar to pagājušā gada NNV 3. materiālā.

Aplūkosim dažādus piemērus, kuros lietosim pieminētās idejas.

3.1 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs Doti reāli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka $a^2 + b = c^2, b^2 + c = a^2, c^2 + a = b^2$. Atrast visas iespējamās skaitļa abc vērtības.

Atrisinājums. Saskaitot visus trīs vienādojumus kopā, iegūsim, ka:

$$a^2 + b + b^2 + c + c^2 + a = c^2 + a^2 + b^2 \implies a + b + c = 0$$

No šī vienādojuma varam ērti izteikt c, tas ir, $c = -(a+b)$. Ievietosim to otrajā sistēmas vienādojumā:

$$\begin{gathered} b^2 + c = a^2 \\ b^2 - a - b = a^2 \\ (b-a)(b+a) - (a+b) = 0 \\ (a+b)(b-a-1) = 0 \end{gathered}$$

Ja $a + b = 0$, tad, tā kā $a + b + c = 0$, secinām, ka $c = 0$, kas nozīmē, ka $abc = 0$.

Līdz ar to varam apskatīt gadījumu, kad $b - a - 1 = 0 \implies b = a + 1$. Izteiksim c kā funkciju no a, tas ir, $a + b + c = a + a + 1 + c = 0 \implies c = -2a - 1$. Ievietosim šo visu pirmajā vienādojumā, lai iegūtu, ka:

$$\begin{gathered} a^2 + b = c^2 \\ a^2 + a + 1 = (-2a-1)^2 \\ a^2 + a + 1 = 4a^2 + 4a + 1 \\ 3a(a+1) = 0 \end{gathered}$$

Ja $a = 0$, tad $abc = 0$. Pretējā gadījumā $a + 1 = 0 = b$, kas nozīmē, ka $abc = 0$, tātad vienīgā iespējamā abc vērtība ir 0.

2.piemērs Atrast visus skaitļu trijniekus (x, y, z), kuri apmierina sekojošu vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x^3 = \frac{z}{y} - \frac{2y}{z} \\ y^3 = \frac{x}{z} - \frac{2z}{x} \\ z^3 = \frac{y}{x} - \frac{2x}{y} \end{cases}$$

Atrisinājums. Pareizināsim pirmā vienādojuma abas puses ar yz, otrā vienādojuma abas puses ar zx, trešā vienādojuma abas puses xy, lai iegūtu:

$$\begin{cases} x^3yz = z^2 - 2y^2 \\ xy^3z = x^2 - 2z^2 \\ xyz^3 = y^2 - 2x^2 \end{cases}$$

Saskaitot šos trīs vienādojumus kopā, iegūsim, ka:

$$x^3yz + xy^3z + xyz^3 = z^2 - 2y^2 + x^2 - 2z^2 + y^2 - 2x^2$$
$$xyz(x^2 + y^2 + z^2) = -(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$(x^2 + y^2 + z^2)(xyz + 1) = 0$$

Ja $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, tad $x = y = z = 0$, jo reālu skaitļu kvadrāti ir nenegatīvi lielumi. Taču šis gadījums nav iespējams, jo uzdevumā dotajās izteiksmēs nav pieļaujamas mainīgo nulles vērtības. Līdz ar to aplūkosim gadījumu, kad $xyz + 1 = 0 \implies xyz = -1$. Sistēma tādā gadījumā ērti pārrakstās šādi:

$$\begin{cases} -x^2 = z^2 - 2y^2 \\ -y^2 = x^2 - 2z^2 \\ -z^2 = y^2 - 2x^2 \end{cases}$$

Pārnesot saskaitāmos uz otru pusi, varam iegūt, ka:

$$\begin{cases} 2y^2 = z^2 + x^2 \\ 2z^2 = x^2 + y^2 \\ 2x^2 = y^2 + z^2 \end{cases}$$

Atņemot no pirmā vienādojuma otro vienādojumu, iegūsim, ka:

$$2y^2 - 2z^2 = z^2 - y^2 \implies 3y^2 = 3z^2 \implies y^2 = z^2$$

Atņemot no otrā vienādojuma trešo vienādojumu, iegūsim, ka $3z^2 = 3x^2$. Secinām, ka $x^2 = y^2 = z^2$. Ievērosim, ka:

$$xyz = -1 \implies x^2y^2z^2 = 1 \implies x^2x^2x^2 = 1 \implies x^6 = 1 \implies x = \pm 1$$

Līdz ar to arī $y = z = \pm 1$. Mums atliek pārbaudīt visas iespējamās kombinācijas ar ± 1, kas apmierina uzdevumā doto sistēmu. Visi trijnieki, kas der, ir $(-1, -1, -1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$ un $(-1, 1, 1)$.

3.piemērs Atrast visus reālu skaitļu trijniekus (a, b, c), kuri apmierina sistēmu:

$$\begin{cases} a^3 + b^2c = ac \\ b^3 + c^2a = ba \\ c^3 + a^2b = cb \end{cases}$$

Atrisinājums. Reizinot pirmo vienādojumu ar b, otro vienādojumu ar c, trešo vienādojumu ar b, iegūsim, ka sistēma ir ekvivalenta ar:

$$abc = a^3b + b^3c = b^3c + c^3a = c^3a + a^3b.$$

Tas nozīmē, ka:

$$\begin{aligned} a^3b &= c^3a \\ b^3c &= a^3b \\ b^3c &= c^3a. \end{aligned}$$

Līdz ar to $a^3b = b^3c = c^3a$. Aplūkosim, kas notiek, ja kāds no skaitļiem a, b, c ir 0. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $a = 0$. Tādā gadījumā $b^3c = 0$, kas ļauj mums secināt, ka $b = 0$ vai $c = 0$. Pieņemsim, ka $b = 0$, tad no sākotnējās sistēmas trešā vienādojuma izriet, ka $c = 0$. Līdzīgi arī citos gadījumus varam iegūt, ka $a = b = c = 0$.

Tagad varam aplūkot, kas notiek, ja neviens no skaitļiem a, b, c nav 0. Aplūkosim vēlreiz sistēmu:

$$\begin{aligned} a^3b &= c^3a \\ b^3c &= a^3b \\ b^3c &= c^3a. \end{aligned}$$

Pirmā vienādojuma abas puses izdalot ar a, otrā vienādojuma abas puses izdalot ar b, trešā vienādojuma abas puses izdalot ar c, iegūsim, ka:

$$\begin{aligned} a^2b &= c^3 \\ b^2c &= a^3 \\ c^2a &= b^3. \end{aligned}$$

Mūsu sākotnējā sistēma pārvēršas par (ievietojot jauniegūtās izteiksmes priekš a^2b, b^2c, c^2a):

$$\begin{cases} 2a^2 = c \\ 2b^2 = a \\ 2c^2 = b. \end{cases}$$

No šejienes izriet, ka $c = 2a^2 = 2(2b^2)^2 = 8b^4 = 8(2c^2)^4 = 2^7c^8 \implies 2^7c^8 = c \implies c = \frac{1}{2} = a = b$. Tātad vienīgās atbildes ir $(0, 0, 0)$ un $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Nākamie piemēri parādīs, kā var veikt dažādus novērtējumus, izmantojot maksimālo, minimālo elementu un sakarību starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko, lai atrisinātu uzdevumus.

4.piemērs Atrast visus reālo skaitļu trijniekus (a, b, c), kuri apmierina sistēmu

$$\begin{cases} (b+c+d)^{2010} = 3a \\ (a+c+d)^{2010} = 3b \\ (a+b+d)^{2010} = 3c \\ (a+b+c)^{2010} = 3d \end{cases}$$

Atrisinājums Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka a ir lielākais no visiem nezināmajiem, jeb $a \geq b$, $a \geq c$, $a \geq d$. Turklāt mums ir $a, b, c, d \geq 0$, jo skaitļa 2010-tā pakāpe ir nenegatīvs skaitlis.

No 1. un 2. vienādojuma iegūstam, ka

$$(b+c+d)^{2010} = 3a \geq 3b = (a+c+d)^{2010}$$
$$(b+c+d)^{2010} \geq (a+c+d)^{2010}$$

Tā kā gan $b+c+d$, gan $a+c+d$ ir nenegatīvi, tad secinām, ka

$$b+c+d \geq a+c+d \quad \Rightarrow \quad b \geq a$$

Līdzīgi no 1. un 3., 1. un 4. vienādojuma iegūstam, ka $c \geq a$ un $d \geq a$. Taču pēc mūsu pieņēmuma mums ir $a \geq b$, $a \geq c$, $a \geq d$,tad secinām, ka $a = b = c = d$. Ievietojot šo 1. vienādojumā, mums ir

$$(3a)^{2010} = 3a$$
$$(3a)^{2009} = 1$$
$$3a = 1$$
$$a = \frac{1}{3}$$

Līdz ar to vienīgais sistēmas atrisinājums ir $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

5.piemērs Atrast visus reālu skaitļu trijniekus (x, y, z), kuri apmierina vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x^3 + 4x = 5y \\ y^3 + 4y = 5z \\ z^3 + 4z = 5x. \end{cases}$$

Atrisinājums. Veiksim 2 būtiskus novērojumus:

- Ja $x = 0$, tad $y = z = 0$. Savukārt, ja $x > 0$, tad no pirmā vienādojuma izriet, ka $y > 0$, bet no otrā vienādojuma, ka $z > 0$, bet, ja $x < 0$, tad no pirmā vienādojuma izriet, ka $y < 0$, bet no otrā vienādojuma, ka $z < 0$.
- Ja skaitļu trijnieks (x, y, z) ir sistēmas atrisinājums, tad skaitļu trijnieks $(-x, -y, -z)$ arī ir sistēmas atrisinājums.

Līdz ar to varam pieņemt, ka $x, y, z > 0$. Ja saskaita visus sistēmas vienādojumus kopā, iegūsim, ka:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 4x + 4y + 4z = 5x + 5y + 5z$$
$$x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z = 0$$
$$x(x-1)(x+1) + y(y-1)(y+1) + z(z-1)(z+1) = 0$$

Ievērosim, ka:

- Ja $x > 1$, tad $5y = x^3 + 4x > 1 + 4 = 5 \implies y > 1$. Līdzīgi varam iegūt, ka $z > 1$. Taču tādā gadījumā:
$$x(x-1)(x+1) + y(y-1)(y+1) + z(z-1)(z+1) > 0,$$
kas ir pretruna.
- Ja $0 < x < 1$, tad $5y = x^3 + 4x < 1 + 4 = 5 \implies y < 1$. Līdzīgi varam iegūt, ka $z < 1$. Taču tādā gadījumā:
$$x(x-1)(x+1) + y(y-1)(y+1) + z(z-1)(z+1) < 0,$$
kas ir pretruna.

Secinām, ka vienīgais atrisinājums pozitīvos reālos skaitļos ir $(1, 1, 1)$. Atceroties iepriekš iegūtos rezultātus, secinām, ka $(-1, -1, -1)$ arī ir sistēmas atrisinājums. Papildus tam der arī $(0, 0, 0)$.

6.piemērs Atrast visus reālu skaitļu trijniekus (x, y, z), kuri apmierina vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} \frac{4x^2}{4x^2+1} = y \\ \frac{4y^2}{4y^2+1} = z \\ \frac{4z^2}{4z^2+1} = x. \end{cases}$$

1.atrisinājums. Atzīmēsim, ka viegli redzēt, ja kāds no skaitļiem ir 0, tad arī atlikušie skaitļi ir 0. Piedevām tā kā vienādojumu kreisās puses ir nenegatīvas, tad varam pieņemt, ka visi skaitļi ir pozitīvi. Ievērosim, ka no sakarības starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko izriet, ka:

$$4x^2 + 1 \geq 2\sqrt{4x^2 \cdot 1} = 4x$$

Tas nozīmē, ka:
$$\frac{1}{4x^2+1} \leq \frac{1}{4x} \implies y = \frac{4x^2}{4x^2+1} \leq \frac{4x^2}{4x} = x$$
Analoģiski varam secināt, ka $z \leq y$ un $x \leq z$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka:

$$x \leq z \leq y \leq x \implies x = y = z.$$

Tādā gadījumā mums ir jāatrisina vienādojums:

$$\frac{4x^2}{4x^2+1} = x$$
$$4x = 4x^2 + 1$$
$$(2x-1)^2 = 0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Varam secināt, ka der atrisinājumi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ un $(0, 0, 0)$.

2.atrisinājums Ievērosim, ka, ja kāds no skaitļiem x, y, z ir vienāds ar 0, tad $x = y = z = 0$. Līdz ar to pieņemsim, ka $x, y, z \neq 0$. Pārrakstīsim doto sistēmu šādi:

$$\begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{4x^2+1}{4x^2} = \frac{1}{4x^2} + 1 \\ \frac{1}{z} = \frac{4y^2+1}{4y^2} = \frac{1}{4y^2} + 1 \\ \frac{1}{x} = \frac{4z^2+1}{4z^2} = \frac{1}{4z^2} + 1 \end{cases}$$

Saskaitot šos trīs vienādojumus kopā, iegūsim, ka:

$$\left(\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{x}+1\right)+\left(\frac{1}{4y^2}-\frac{1}{y}+1\right)+\left(\frac{1}{4z^2}-\frac{1}{z}+1\right)=0$$
$$\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2z}-1\right)^2=0.$$

Tā kā reāla skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad secinām, ka $x=y=z=\frac{1}{2}$.

7.piemērs Atrisināt reālos skaitļos sistēmu

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{yz}}{y+z} \\ y=\frac{\sqrt{zx}}{z+x} \\ z=\frac{\sqrt{xy}}{x+y}. \end{cases}$$

Atrisinājums. Vispirms veiksim 2 būtiskus novērojumus:

- Skaitļiem x,y,z ir vienādas zīmes, jo, ja mēs pieņemam pretējo, ka diviem no skaitļiem, teiksim x un y, ir dažādas zīmes, tad $xy<0$ un skaitlis $\sqrt{xy}$ vairs nav definēts. Līdz ar to skaitļi x,y,z ir vai nu visi pozitīvi, vai nu visi negatīvi.
- Ja (x_0,y_0,z_0) ir sistēmas atrisinājums, tad $(-x_0,-y_0,-z_0)$ arī ir sistēmas atrisinājums.

Tas nozīmē, ka mums pietiek atrast pozitīvos reālos atrisinājumus. Ievērosim, ka no sakarības starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko izriet, ka:

$$\sqrt{yz}\le\frac{y+z}{2}\implies x=\frac{\sqrt{yz}}{y+z}\le\frac{1}{2}$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $x\le\frac{1}{2}$. Analoģiski varam iegūt, ka $y\le\frac{1}{2}$, $z\le\frac{1}{2}$. Sareizināsim kopā visus trīs sistēmas vienādojumus, lai iegūtu, ka:

$$xyz=\frac{\sqrt{yz\cdot zx\cdot xy}}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$xyz=\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$(x+y)(y+z)(z+x)=1$$

Taču mēs zinām, ka:

$$x+y\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Līdzīgi arī $y+z\le1$ un $z+x\le1$. Tas nozīmē, ka tādā gadījumā:

$$(x+y)(y+z)(z+x)\le1\cdot1\cdot1=1$$

Taču mēs esam ieguvuši, ka $(x+y)(y+z)(z+x)=1$. Vienādību var acīmredzami sasniegt tad un tikai tad, ja $x=y=z=\frac{1}{2}$. No iepriekš iegūtā secinām, ka otrs atrisinājums ir $x=y=z=-\frac{1}{2}$.

8.piemērs Atrisināt reālos skaitļos sistēmu

$$\begin{cases} x+\frac{2}{x}=2y \\ y+\frac{2}{y}=2z \\ z+\frac{2}{z}=2x \end{cases}$$

Atrisinājums. Vispirms veiksim 2 būtiskus novērojumus:

- Ja $x > 0$, tad no pirmā vienādojuma izriet, ka $y > 0$, kas savukārt, izmantojot otro vienādojumu, ļauj mums secināt, ka $z > 0$. Analoģiski, ja $x < 0$, tad varam iegūt, ka $y < 0$ un $z < 0$.
- Ja (x_0, y_0, z_0) ir sistēmas atrisinājums, tad $(-x_0, -y_0, -z_0)$ arī ir sistēmas atrisinājums.

Tas nozīmē, ka mums pietiek atrast pozitīvos reālos atrisinājumus. Saskaitot visus trīs vienādojumus kopā, iegūsim, ka:

$$x + \frac{2}{x} + y + \frac{2}{y} + z + \frac{2}{z} = 2y + 2z + 2x$$
$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = x + y + z$$

No sakarības starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko savukārt izriet, ka:

$$2y = x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$$

Secinām, ka $2y \geq 2\sqrt{2} \implies y \geq \sqrt{2}$. Analoģiski varam iegūt, ka $x \geq \sqrt{2}$ un $z \geq \sqrt{2}$. Tādā gadījumā:

$$x + y + z \geq 3\sqrt{2}$$

No otras puses, ievērosim, ka:

$$x \geq \sqrt{2} \implies \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{2}{x} \leq \sqrt{2}$$

Līdz ar to varam secināt, ka:

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \leq \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \leq 3\sqrt{2}$$

Esam ieguvuši, ka:

$$3\sqrt{2} \leq x + y + z = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \leq 3\sqrt{2}$$

Secinām, ka tādā gadījumā:

$$3\sqrt{2} = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = x + y + z$$

Tā kā $x \geq \sqrt{2}, y \geq \sqrt{2}, z \geq \sqrt{2}$, tad vienādība var izpildīties tikai tad, ja $x = y = z = \sqrt{2}$. No iepriekš iegūtā secinām, ka atrisinājums ir arī $x = y = z = -\sqrt{2}$.

9.piemērs Atrisināt vienādojumu sistēmu reālos skaitļos:

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = y \\ y^2 + y - 1 = z \\ z^2 + z - 1 = x \end{cases}$$

Atrisinājums. Saskaitot šos trīs vienādojumus kopā, iegūsim, ka:

$$x^2 + x - 1 + y^2 - y + 1 + z^2 + z - 1 = y + z + x$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

Pārveidosim katru sistēmas vienādojumu:

$$\begin{cases} x(x+1) = y+1 \\ y(y+1) = z+1 \\ z(z+1) = x+1 \end{cases}$$

Sareizinot šos trīs vienādojumus kopā, iegūsim, ka:

$$x(x+1)y(y+1)z(z+1) = (y+1)(z+1)(z+1)$$
$$xyz = 1$$

Mēs abas vienādojuma puses izdalījām ar $(x+1)(y+1)(z+1)$. To drīkst darīt tad un tikai tad, ja $(x+1)(y+1)(z+1) \neq 0$. Tāpēc mums ir jāapskata gadījums $(x+1)(y+1)(z+1) = 0$. Tādā gadījumā kāds no skaitļiem $x+1, y+1, z+1$ ir 0. Nezaudējot vispārīgumu pieņemsim, ka $x+1 = 0 \implies x = -1$. Tādā gadījumā no pirmā vienādojuma izriet, ka $y = -1$ un no otrā vienādojuma izriet, ka $z = -1$. Līdz ar to esam ieguvuši atrisinājumu $(-1, -1, -1)$.

Gadījums $(x+1)(y+1)(z+1) = 0$ ir apskatīts, tāpēc varam pieņemt, ka $(x+1)(y+1)(z+1) \neq 0$, kas nozīmē, ka $xyz = 1$. Atcerēsimies, ka:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

No sakarības starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko izriet, ka:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3$$

Taču mēs vēlējamies tādus skaitļus, ka $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Līdz ar to mums ir sakarība starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko, kurā izpildās vienādība, tātad:

$$x^2 = y^2 = z^2 = 1$$

No šī varam iegūt vēl vienu atrisinājumu $(1, 1, 1)$.

10.piemērs Zināms, ka pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, c, d izpildās:

$$\begin{cases} a^2 + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{2} \\ b^2 + \frac{4}{c^2} = 8 \\ c^2 + \frac{16}{d^2} = 2 \\ d^2 + \frac{4}{a^2} = 32 \end{cases}$$

Noteikt visas iespējamās skaitļa $abcd$ vērtības.

Atrisinājums. Sareizinot sistēmas vienādojumus kopā, iegūsim, ka:

$$\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{4}{c^2}\right)\left(c^2 + \frac{16}{d^2}\right)\left(d^2 + \frac{4}{a^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot 32 = 256$$

No sakarības starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko izriet, ka:

$$a^2 + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = 2\frac{a}{b}$$
$$b^2 + \frac{4}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{4b^2}{c^2}} = 4\frac{b}{c}$$
$$c^2 + \frac{16}{d^2} \geq 2\sqrt{\frac{16c^2}{d^2}} = 8\frac{c}{d}$$
$$d^2 + \frac{4}{a^2} \geq 2\sqrt{\frac{4d^2}{a^2}} = 4\frac{d}{a}$$

Līdz ar to secinām, ka

$$\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{4}{c^2}\right)\left(c^2 + \frac{16}{d^2}\right)\left(d^2 + \frac{4}{a^2}\right) \geq 2\frac{a}{b} \cdot 4\frac{b}{c} \cdot 8\frac{c}{d} \cdot 4\frac{d}{a} = 256$$

Taču mums ir jāsasniedz vienādība, līdz ar to visās reizēs, kad tika pielietota sakarība starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko, mums jābūt vienādiem saskaitāmiem, tātad:

$$\begin{aligned} a^2 = \frac{1}{b^2} &\implies a = \frac{1}{b} \\ b^2 = \frac{4}{c^2} &\implies b = \frac{2}{c} \\ c^2 = \frac{16}{d^2} &\implies c = \frac{4}{d} \\ d^2 = \frac{4}{a^2} &\implies d = \frac{2}{a} \end{aligned}$$

Sareizinot šīs jauniegūtās sakarības kopā, iegūsim, ka:

$$abcd = \frac{16}{abcd} \implies (abcd)^2 = 16 \implies abcd = 4.$$