# 1.mājasdarba atrisinājumi

**1.uzdevums** Pierādīt, ka

- skaitlis $(bc-ad)(ac-bd)(ab-cd)$ ir vesela skaitļa kvadrāts, ja $a,b,c,d$ ir veseli skaitļi ar īpašību, ka $a+b+c+d=0$.
- skaitlis $a^2+b^2+c^2$ ir vesela skaitļa kvadrāts, ka $a,b,c$ ir veseli skaitļi ar īpašību, ja $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.
- kādi divi no skaitļiem $a,b,c$ ir vienādi savā starpā, ja $a,b,c$ ir reāli skaitļi, kuriem izpildās $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{b-c}+\sqrt[3]{c-a}=0$.
- $\frac{x^6+y^6+z^6}{x^3+y^3+z^3}=xyz$, ja $x,y,z$ ir reāli skaitļi ar īpašību, ka $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

**Atrisinājums.** No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $d=-a-b-c$. Ievērosim, ka

$$\begin{aligned} bc-ad &= bc+a(a+b+c)=a^2+ab+ac+bc=(a+b)(a+c)\\ ac-bd &= ac+b(a+b+c)=b^2+bc+ba+ac=(b+a)(b+c)\\ ab-cd &= ab+c(a+b+c)=c^2+ca+cb+ab=(c+a)(c+b) \end{aligned}$$

Līdz ar to secinām, ka

$$(bc-ad)(ac-bd)(ab-cd)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2=((a+b)(b+c)(c+a))^2$$

Tā kā $a,b,c$ ir veseli skaitļi, tad arī skaitlis $(a+b)(b+c)(c+a)$ ir vesels, līdz ar to prasītais pierādītais.

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}&=0\\ \frac{ab+bc+ca}{abc}&=0 \end{aligned}$$

Secinām, ka $ab+bc+ca=0$. Tādā gadījumā

$$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2$$

Tā kā $a,b,c$ ir veseli skaitļi, tad arī skaitlis $a+b+c$ ir vesels, līdz ar to prasītais pierādītais.

Apzīmēsim $\sqrt[3]{a-b}=x$, $\sqrt[3]{b-c}=y$, $\sqrt[3]{c-a}=z$. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $x+y+z=0$. Ievērosim, ka $x^3=a-b$, $y^3=b-c$, $z^3=c-a$ un to, ka

$$x^3+y^3+z^3=a-b+b-c+c-a=0$$

No skaistās identitātes izriet, ka

$$0=x^3+y^3+z^3=3xyz=3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Secinām, ka $(a-b)(b-c)(c-a)=0$, kas nozīmē, ka kaut kādi divi no skaitļiem $a,b,c$ ir vienādi savā starpā.

No dotā izriet, ka $0=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}$, kas nozīmē, ka $xy+yz+zx=0$. Tādā gadījumā

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx&=0\\ x^2+y^2+z^2&=0 \end{aligned}$$

Līdz ar to no skaistās identitātes izriet, ka $x^3+y^3+z^3=3xyz$, kā arī $x^6+y^6+z^6=(x^2)^3+(y^2)^3+(z^2)^3=3x^2y^2z^2$. Secinām, ka

$$\frac{x^6+y^6+z^6}{x^3+y^3+z^3}=\frac{3x^2y^2z^2}{3xyz}=xyz,$$

kas arī bija jāpierāda. Skolēni, kas savos darbos uzrakstīja, ka $x^2+y^2+z^2=0 \implies x=y=z=0$, kas nav iespējams, ieguva maksimālo punktu skaitu par šo apakšuzdevumu.

**2.uzdevums** Atrast visus reālos skaitļu trijniekus $(a,b,c)$, kuri apmierina vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} a^2+4ab+b^2=1 \\ b^2+4bc+c^2=1 \\ c^2+4ac+a^2=-2 \end{cases}$$

**Atrisinājums.** Saskaitot visus trīs vienādojumus kopā, iegūstam, ka

$$\begin{gathered} 2a^2+2b^2+2c^2+4ab+4bc+4ca=0 \\ a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0 \\ (a+b+c)^2=0 \\ a+b+c=0 \end{gathered}$$

No pirmā vienādojuma atņemot otro, iegūstam, ka

$$\begin{gathered} a^2+4ab-4bc-c^2=0 \\ (a-c)(a+c)+4b(a-c)=0 \\ (a-c)(a+c+4b)=0 \end{gathered}$$

Aplūkosim divus iespējamos gadījumus

- Ja $a+c+4b=0$, tad tā kā $a+c+b=0$, secinām, ka $3b=0$, kas nozīmē $b=0$. Sistēmas pirmais vienādojums kļūst par $a^2=1$, sistēmas otrais vienādojums kļūst par $c^2=1$, savukārt trešais sistēmas vienādojums kļūst par

  $$\begin{gathered} c^2+4ac+a^2=-2 \\ 4ac=-4 \\ ac=-1 \end{gathered}$$

  Līdz ar to iegūstam, ka vienīgie iespējamie sistēmas atrisinājumi ir $(1,0,-1)$ un $(-1,0,1)$.

- Ja $a-c=0$, tad $a=c$, kas nozīmē, ka sistēmas trešais vienādojums kļūst par $c^2+4ac+a^2=6a^2=-2$, kam nav atrisinājumu, jo reāla skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs.

Visi iespējamie gadījumi ir aplūkoti.

**3.uzdevums** Doti no nulles atšķirīgi reāli skaitļi $a, b, c$ ar īpašību, ka $a+b+c=0$. Pierādīt, ka

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}=\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}$$

**Atrisinājums.** Vispirms pārveidosim pierādāmās sakarības kreiso pusi, izmantojot to, ka $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$ sekojoši

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}&=\\ =\frac{a^2+b^2}{-c}+\frac{b^2+c^2}{-a}+\frac{c^2+a^2}{-b}&=\\ =\frac{-ab(a^2+b^2)-bc(b^2+c^2)-ca(c^2+a^2)}{abc}&\end{aligned}$$

Savukārt pierādāmās sakarības labā pusi var pārveidot sekojoši

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}=\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}$$

Līdz ar to, ja mēs pierādām, ka

$$a^4+b^4+c^4=-ab(a^2+b^2)-bc(b^2+c^2)-ca(c^2+a^2),$$

tad uzdevums būs atrisināts. Ievērosim, ka

$$\begin{gathered}a+b+c=0\\ a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0\\ a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)\\ a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+8abc(a+b+c)\\ a^4+b^4+c^4=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\end{gathered}$$

Līdz ar to secinām, ka

$$\begin{gathered}a^4+b^4+c^4=-ab(a^2+b^2)-bc(b^2+c^2)-ca(c^2+a^2)\\ 2a^2b^2++2b^2c^2+2c^2a^2=-ab(a^2+b^2)-bc(b^2+c^2)-ca(c^2+a^2)\\ ab(a+b)^2+bc(b+c)^2+ca(c+a)^2=0\\ abc^2+bca^2+cab^2=0\\ abc(a+b+c)=0\end{gathered}$$

Pēdējā sakarība ir patiesa, jo $a+b+c=0$ pēc dotā.

**4.uzdevums** Atrast visus reālo skaitļu trijniekus $(a, b, c)$ ar īpašību, ka $ab + bc + ca = 1$ un

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

**Atrisinājums.** Vispirms aplūkosim gadījumu, kad $a, b, c \neq 0$. Ievērosim, ka

$$\begin{gathered} a^2b + c = b^2c + a \\ a(ab - 1) = c(b^2 - 1) \end{gathered}$$

Tā kā $ab + bc + ca = 1$, tad $ab - 1 = -bc - ca = -c(a + b)$, līdz ar to secinām, ka

$$\begin{gathered} a(ab - 1) = c(b^2 - 1) \\ -ac(a + b) = c(b^2 - 1) \\ -a(a + b) = b^2 - 1 \\ -a^2 - ab = b^2 - 1 \\ 1 = a^2 + ab + b^2 \end{gathered}$$

Analoģiski varam iegūt, ka $b^2 + bc + c^2 = 1$ un $c^2 + ca + a^2 = 1$. Saskaitot visas trīs iegūtās vienādības, iegūstam, ka

$$\begin{gathered} 2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca = 3 \\ 2(a^2 + b^2 + c^2) = 3 - ab - bc - ca \\ 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{gathered}$$

Ievērosim, ka

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = 2 - 2 = 0$$

Tā kā reāla skaitļu kvadrāts ir nenegatīvs, tad secinām, ka $a = b = c$. No dotas vienādības izriet, ka $3a^2 = 1$, kas nozīmē, ka $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ vai $a = b = c = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Viegli pārbaudīt, ka šie trijnieki patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

Tagad aplūkosim gadījumu, kad kāds no skaitļiem $a, b, c$ ir vienāds ar 0. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $a = 0$. Tādā gadījumā no pirmā un otrā vienādojuma izriet, ka $c = b^2c = b$, kas nozīmē, ka $b = c$. Tā kā $ab + bc + ca = b^2 = 1$, tad $b = c = 1$ vai $b = c = -1$. Viegli pārbaudīt, ka iegūtie trijnieki patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus. Līdz ar to skaitļu trijnieki, kas apmierina uzdevuma nosacījums ir $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $(0, 1, 1)$ un $(0, -1, -1)$ un to cikliskas permutācijas.

# 2.mājasdarba atrisinājumi

**1.uzdevums** Atrast izteiksmes

- $\frac{abcd}{ab+cd}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$ vērtību, ja $a+b=c+d=5$.
- $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b-1)$ vērtību, ja $a+b=a^2+b^2$.
- $\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{b+1}$ vērtību, ja $ab+a+b=2$ un $ac+a+c=8$.

**Atrisinājums.** Ievērosim, ka

$$\begin{aligned}
&\frac{abcd}{ab+cd}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)= \\
&=\frac{abcd}{ab+cd}\left(\frac{a+b}{ab}+\frac{c+d}{cd}\right)= \\
&=\frac{abcd}{ab+cd}\left(\frac{5}{ab}+\frac{5}{cd}\right)= \\
&=\frac{abcd}{ab+cd}\left(\frac{5(ab+cd)}{abcd}\right)=5
\end{aligned}$$

Ievērosim, ka

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b-1)= \\
&=\left(\frac{a+b}{ab}\right)(a+b-1)= \\
&=\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{a+b}{ab}= \\
&=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}-\frac{a+b}{ab}= \\
&=\frac{a^2+b^2}{ab}+2-\frac{a+b}{ab}= \\
&\frac{a+b}{ab}+2-\frac{a+b}{ab}=2
\end{aligned}$$

Ievērosim, ka, ja $ab+a+b=2$ un $bc+b+c=8$. Tas nozīmē, ka $(a+1)(b+1)=ab+a+b+1=3$ un $(b+1)(c+1)=bc+b+c+1=9$. Izdalot abas, iegūtas sakarības savā starpā iegūstam, ka

$$\frac{(a+1)(b+1)}{(a+1)(c+1)}=\frac{b+1}{c+1}=\frac{1}{3}$$

No tā izriet, ka $\frac{c+1}{b+1}=3$, kas nozīmē, ka

$$\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{b+1}=\frac{1}{3}+3=3\frac{1}{3}$$

**2.uzdevums** Pa pāriem atšķirīgiem reāliem skaitļiem $a, b, c$ izpildās $a^3 - 3a = b^3 - 3b = c^3 - 3c$. Atrast visas iespējamās skaitļu $a^2 + ab + b^2$, $a + b + c$ un $a^2 + b^2 + c^2$ vērtības un pamatot, ka citu nav.

**Atrisinājums.** Ievērosim, ka no uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$\begin{gathered} a^3 - 3a = b^3 - 3b \\ a^3 - b^3 = 3(a - b) \\ (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 3(a - b) \\ (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 3) = 0 \end{gathered}$$

Tā kā skaitļi $a, b, c$ ir pa pāriem dažādi, tad secinām, $a - b \neq 0$, līdz ar to $a^2 + ab + b^2 - 3 = 0$, kas nozīmē, ka $a^2 + ab + b^2 = 3$. Līdzīgi varam iegūt, ka $b^2 + bc + c^2 = 3$ un $c^2 + ca + a^2 = 3$. Mēs varam iegūtos rezultātus pierakstīt kā sekojošu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3 \\ b^2 + bc + c^2 = 3 \\ c^2 + ca + a^2 = 3 \end{cases}$$

No pirmā sistēmas vienādojuma atņemot otro vienādojumu, iegūstam, ka

$$\begin{gathered} a^2 + ab - bc - c^2 = 0 \\ (a - c)(a + c) + b(a - c) = 0 \\ (a - c)(a + b + c) = 0 \end{gathered}$$

Tā kā skaitļi $a, b, c$ ir pa pāriem dažādi, tad secinām, ka $a - c \neq 0$, kas nozīmē, ka $a + b + c = 0$.

Saskaitot visus trīs sistēmas vienādojumus, iegūstam, ka

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) = 9$$

Tā kā $a + b + c = 0$, tad varam iegūt, ka

$$\begin{gathered} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0 \\ 2(ab + bc + ca) = -(a^2 + b^2 + c^2) \\ (ab + bc + ca) = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \end{gathered}$$

Līdz ar to iegūstam, ka

$$\begin{gathered} 2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) = 9 \\ 2(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \\ \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{gathered}$$

Visas iespējamās prasīto izteiksmes vērtības ir atrastas. Tās ir arī sasniedzamas, ja, piemēram, $a = \sqrt{3}$, $b = -\sqrt{3}$, $c = 0$, tas ir, pie šādām $a, b, c$ vērtībām izpildās uzdevuma nosacījumi un izteiksmes $a^2+ab+b^2$, $a + b + c$ un $a^2 + b^2 + c^2$ ir vienādas ar iegūtajām vērtībām.

**3.uzdevums** Reāliem skaitļiem $a$ un $b$ izpildās sakarība

$$ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} = 0.$$

Atrast visas iespējamās izteiksmes

$$b\sqrt{a^2+b} + a\sqrt{b^2+a}$$

vērtības.

**Atrisinājums.** Pārrakstīsim doto izteiksmi sekojoši

$$
\begin{gathered}
ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} = 0 \\
ab + \sqrt{a^2+b} \cdot \sqrt{b^2+a} = -\sqrt{ab+1} \\
(ab + \sqrt{a^2+b} \cdot \sqrt{b^2+a})^2 = ab+1 \\
a^2b^2 + 2ab\sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a} + (a^2+b)(b^2+a) = ab+1 \\
a^3 + ab + 2a^2b^2 + b^3 + 2ab\sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} = ab+1 \\
a^2(b^2+a) + +2ab\sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a} + b^2(a^2+b) = 1 \\
(a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b})^2 = 1 \\
a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} = \pm 1
\end{gathered}
$$

Mēs pierādīsim, ka izteiksme nevar pieņemt vērtību $-1$. Ievērosim, ka tā kā skaitļa sakne ir nenegatīva un $ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} = 0$, tad $ab < 0$. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka skaitlis $b$ ir negatīvs, tādā gadījumā $a > 0 > b$, kas nozīmē, ka $a^3 > b^3$. Secinām, ka

$$
\begin{gathered}
a^3 > b^3 \\
a^3 + a^2b^2 > b^3 + a^2b^2 \\
a^2(a+b^2) > b^2(b+a^2) \\
|a\sqrt{b^2+a}| > |b\sqrt{a^2+b}| \\
a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} > 0,
\end{gathered}
$$

kas nozīmē, ka aplūkotā izteiksme var pieņemt tikai pozitīvas vērtības. Secinām, ka vienīgā iespējamā izteiksmes vērtība ir $b\sqrt{a^2+b} + a\sqrt{b^2+a}$ ir 1.

**4.uzdevums** Dots naturāls skaitlis $n \geq 4$. Atrast visus pozitīvos reālo skaitļu atrisinājumus sekojošai $2n$ vienādojumu sistēmai

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{a_2}, & a_2 &= a_1 + a_3, \\ a_3 &= \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4}, & a_4 &= a_3 + a_5, \\ a_5 &= \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6}, & a_6 &= a_5 + a_7 \\ &\vdots & &\vdots \\ a_{2n-1} &= \frac{1}{a_{2n-2}} + \frac{1}{a_{2n}}, & a_{2n} &= a_{2n-1} + a_1 \end{aligned}$$

**Atrisinājums.** Sākumā pierādīsim, ka $a_2 = a_4 = \ldots = a_{2n}$. Ievērosim, ka

$$a_{2k} = a_{2k-1} + a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k-2}} + \frac{1}{a_{2k}} + \frac{1}{a_{2k}} + \frac{1}{a_{2k+2}} = \frac{1}{a_{2k-2}} + \frac{2}{a_{2k}} + \frac{1}{a_{2k+2}}$$

visiem $1 \leq k \leq n$. Ar $m$ un $M$ apzīmēsim attiecīgi lielāko un mazāko starp skaitļiem $a_2, a_4, \ldots, a_{2n}$. Pieņemsim, ka $a_i = m$ un $a_j = M$. Tādā gadījumā

$$\begin{aligned} a_i = m = \frac{2}{m} + \frac{1}{a_{2i-2}} + \frac{1}{a_{2i+2}} &\geq \frac{2}{m} + \frac{1}{M} + \frac{1}{M} = \frac{2}{m} + \frac{2}{M} \\ a_j = M = \frac{2}{M} + \frac{1}{a_{2j-2}} + \frac{1}{a_{2j+2}} &\leq \frac{2}{M} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{M} + \frac{2}{m}, \end{aligned}$$

kur mēs izmantojām to, ka $a_{2i-2} \leq M, a_{2i+2} \leq M$ un $a_{2j-2} \geq m, a_{2j+2} \geq m$. Secinām, ka

$$M \leq \frac{2}{M} + \frac{2}{m} \leq m \leq M$$

Secinām, ka $M = m$, kas nozīmē, ka lielākais un mazākais skaitlis starp skaitļiem $a_2, \ldots, a_{2n}$ ir vienādi savā starpā. Tādā gadījumā $a_2 = a_4 = \ldots = a_{2n} = c$, kur $c$ ir konstante. Ievērosim, ka

$$a_{2k-1} = \frac{1}{a_{2k-2}} + \frac{1}{a_{2k}} = \frac{2}{c}$$

visiem $1 \leq k \leq n$. Līdz ar to

$$c = a_{2k} = a_{2k-1} + a_{2k+1} = \frac{4}{c} \implies c = 2$$

jo visi skaitļi $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ ir pozitīvi pēc uzdevuma nosacījumiem. Līdz ar to vienīgais iespējamais atrisinājums ir $a_i = 2$, ja $i$ ir pāra un $a_i = 1$, ja $i$ ir nepāra.