1.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums Vai eksistē injektīva funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ar īpašību, ka visiem reāliem skaitļiem x izpildās

$$f(x^2) - f(x)^2 \geq \frac{1}{4}.$$

Atrisinājums. Dotajā sakarībā ievietojot $x = 0$, iegūsim, ka

$$f(0) - f(0)^2 \geq \frac{1}{4}$$
$$0 \geq f(0)^2 - f(0) + \frac{1}{4}$$
$$0 \geq \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2$$

Tā kā jebkura reāla skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad $f(0) - \frac{1}{2} = 0$ jeb $f(0) = \frac{1}{2}$. Tagad analoģiski ievietojot $x = 1$, iegūsim, ka

$$f(1) - f(1)^2 \geq \frac{1}{4}$$
$$0 \geq \left(f(1) - \frac{1}{2}\right)^2$$
$$f(1) = \frac{1}{2}$$

Esam ieguvuši, ka $f(0) = \frac{1}{2} = f(1)$, kas ir pretrunā ar to, ka funkcija f ir injektīva, līdz ar to neeksistē funkcija, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

2.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ar īpašību, ka visiem veseliem skaitļiem m, n izpildās

$$f(m^2) + f(mf(n)) = f(m+n)f(m).$$

Atrisinājums. Ar $P(m, n)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu.

No $P(0, 0)$ izriet, ka $2f(0) = f(0)^2$, kas nozīmē, ka $f(0) \in \{0, 2\}$. Ja $f(0) = 2$, tad no $P(0, n)$ seko, ka

$$4 = 2f(n) \implies f(n) = 2$$

visiem veseliem skaitļiem n. Viegli pārliecināties, ka šī funkcija patiešam apmierina uzdevuma nosacījumus.

Tagad apskatīsim gadījumu, kad $f(0) = 0$. Ievērosim, ka no $P(n, 0)$ un $P(-n, 0)$ izriet, ka

$$f(n)^2 = f(n^2) = f(-n)^2$$

No $P(1, 0)$ seko, ka $f(1) = f(1)^2$, kas nozīmē, ka $f(1) \in \{0, 1\}$. Apskatīsim divus gadījumus

- Ja $f(1) = 0$, tad ievērosim, ka, ja $f(k) = 0$ kādam veselam skaitlim $k \leq 0$, tad no $P(k-1, 1)$ izriet, ka

  $$f(k-1)^2 = f((k-1)^2) = f(k)f(k-1) = 0 \implies f(k-1) = 0$$

  No matemātiskās indukcijas principa izriet, ka $f(n) = 0$ visiem $n \leq 0$. Tā kā $f(n)^2 = f(-n)^2 = 0$, tad secinām, ka $f(n) = 0$ visiem $n \geq 0$. Līdz ar to $f(n) = 0$ visiem veseliem skaitļiem n. Viegli pārliecināties, ka šī funkcija patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

- Ja $f(1) = 1$, tad pieņemsim, ka $f(k) = k$ kādam veselam $k > 0$. Tad no $P(k, 1)$ izriet, ka

  $$\begin{gathered} f(k^2) + f(k) = f(k)f(k+1) \\ f(k)^2 + f(k) = f(k)f(k+1) \\ k^2 + k = kf(k+1) \\ f(k+1) = k+1 \end{gathered}$$

  No matemātiskās indukcijas principa izriet, ka $f(n) = n$ visiem $n \geq 0$. Tā kā $f(n^2) = f(n)^2 = f(-n)^2$, tad secinām, ka $f(-n) \in \{-n, n\}$. Ja $f(n) = -n$ kaut kādam $n < 0$, tad no $P(-n, n)$ izriet, ka

  $$\begin{gathered} f(n^2) + f(-nf(n)) = f(-n+n)f(-n) = 0 \\ n^2 + f(n^2) = 0 \\ n^2 + n^2 = 0 \end{gathered}$$

  Secinām, ka $n = 0$, kas nav iespējams. Līdz ar to $f(n) = n$ visiem $n < 0$. Saliekot visu kopā, secinām, ka $f(n) = n$ visiem veseliem n. Viegli pārliecināties, ka šī patiešām funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus.

3.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ar īpašību, ka visiem reāliem skaitļiem x, y izpildās:

$$f(f(x) + y) = \lfloor x + f(f(y)) \rfloor.$$

Piezīme. Ar $\lfloor z \rfloor$ apzīmē lielāko veselo skaitli, kas ir mazāks vai vienāds ar z. Piemēram, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ un $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$.

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu.

No $P(0, 0)$ izriet, ka $f(f(0)) = \lfloor f(f(0)) \rfloor$, kas nozīmē, ka $f(f(0)) \in \mathbb{Z}$. No $P(x, 0)$ izriet, ka

$$f(f(x)) = \lfloor x + f(f(0)) \rfloor = \lfloor x \rfloor + f(f(0))$$

Ievērosim, ka $P(x, y)$ tagad varam pārrakstīt sekojoši

$$f(f(x) + y) = \lfloor x + f(f(y)) \rfloor = \lfloor x + \lfloor y \rfloor + f(f(0)) \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + f(f(0))$$

Pēdējā sakarībā ievietojot $x = 0$, iegūsim, ka

$$f(f(0) + y) = \lfloor y \rfloor + f(f(0))$$

Aizvietojot y ar $y - f(0)$, iegūsim, ka

$$f(y) = \lfloor y - f(0) \rfloor + f(f(0))$$

Pēdējā sakarībā ievietojot $y = 0$, iegūsim, ka

$$f(0) = \lfloor -f(0) \rfloor + f(f(0))$$

Ievērosim, ka $\lfloor -f(0) \rfloor \in \mathbb{Z}$ un $f(f(0)) \in \mathbb{Z}$, tāpēc $f(0) \in \mathbb{Z}$. Secinām, ka tādā gadījumā

$$f(y) = \lfloor y - f(0) \rfloor + f(f(0)) = \lfloor y \rfloor - f(0) + f(f(0))$$

Citiem vārdiem sakot, esam ieguvuši, ka katram reālam skaitlim x ir spēkā, ka $f(x) = \lfloor x \rfloor + c$, kur c ir vesela konstante. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija patiešām der.

4.uzdevums. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām visiem reāliem skaitļiem x, y izpildās

$$f(x^2 - y) + 2yf(x) = f(f(x)) + f(y).$$

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. Pielietosim mainīgo noīsināšanas triku – izvēlēsimies tādu y, lai $x^2 - y = y$ jeb $y = \frac{x^2}{2}$. Aplūkosim tādā gadījumā $P(x, \frac{x^2}{2})$, no kurienes iegūstam, ka $x^2 f(x) = f(f(x))$. Savukārt no $P(x, x^2)$, iegūstam, ka

$$\begin{gathered} f(0) + 2x^2 f(x) = f(f(x)) + f(x^2) \\ f(0) + 2x^2 f(x) = x^2 f(x) + f(x^2) \\ f(0) + x^2 f(x) = f(x^2) \end{gathered}$$

Aizvietosim pēdējā sakarībā x ar $-x$, lai iegūtu, ka

$$f(0) + x^2 f(-x) = f(x^2) = f(0) + x^2 f(x) \implies x^2 f(x) = x^2 f(-x)$$

Tas nozīmē, ka $f(x) = f(-x)$ visiem $x \neq 0$. Aplūkosim $P(0, 1)$

$$\begin{gathered} f(-1) + 2f(0) = f(f(0)) + f(1) \\ f(1) + 2f(0) = 0^2 \cdot f(0) + f(1) \\ f(0) = 0 \end{gathered}$$

Secinām, ka $f(x) = f(-x)$ visiem reāliem skaitļiem x. Piedevām no sakarības $f(0) + x^2 f(x) = f(x^2)$ izriet, ka $x^2 f(x) = f(x^2) = f(f(x))$

Apgalvojums. Ja $f(a) = f(b)$, tad $a^2 = b^2$.
Pierādījums. Pieņemsim, ka kaut kādiem reāliem skaitļiem a, b ir spēkā, ka $f(a) = f(b)$. Tādā gadījumā no $P(a, y)$ un $P(b, y)$ izriet, ka

$$\begin{gathered} f(a^2 - y) + 2yf(a) = f(f(a)) + f(y) \\ f(b^2 - y) + 2yf(b) = f(f(b)) + f(y) \end{gathered}$$

Tā kā $f(a) = f(b)$, tad arī $f(f(a)) = f(f(b))$. Secinām, ka

$$f(a^2 - y) = f(b^2 - y) \implies f(y - a^2) = f(y - b^2)$$

Aizstājot y ar $y + a^2$ pēdējā sakarībā, iegūsim, ka $f(y) = f(y + a^2 - b^2)$, līdz ar to funkcija f ir periodiska ar periodu $T = a^2 - b^2$, tas ir, visiem reāliem skaitļiem x izpildās, ka $f(x + T) = f(x)$. Aplūkosim $P(x, y + T)$

$$\begin{gathered} f(x^2 - y - T) + 2(y + T)f(x) = f(f(x)) + f(y + T) \\ f(x^2 - y) + 2(y + T)f(x) = f(f(x)) + f(y) \end{gathered}$$

Salīdzinot pēdējo sakarību ar $P(x, y)$, iegūstam, ka

$$2(y + T)f(x) = 2yf(x) \implies Tf(x) = 0$$

Ja neeksistē tāds reāls skaitlis c, ka $f(c) \neq 0$, tad $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem, kas ir viens no atrisinājumiem. Pretējā gadījumā $Tf(c) = 0 \implies T = 0$, kas nozīmē, ka $T = a^2 - b^2 = 0$ jeb $a^2 = b^2$, kas arī bija jāpierāda.

Iepriekš ieguvām, ka $f(f(x)) = f(x^2)$. No apgalvojuma izriet, ka $f(x)^2 = x^4$ jeb katram reālam skaitlim x ir spēkā, ka $f(x) = x^2$ vai $f(x) = -x^2$. Pieņemsim, ka eksistē reāli no nulles atšķirīgi skaitļi a, b ar īpašību, ka $f(a) = a^2$ un $f(b) = -b^2$. Sakarībā $P(x, y)$ aizstāsim y ar $f(y)$

$$f(x^2 - f(y)) + 2f(y)f(x) = f(f(x)) + f(f(y))$$

No simetrijas izriet, ka

$$f(x^2 - f(y)) = f(y^2 - f(x)) \implies (x^2 - f(y))^2 = (y^2 - f(x))^2$$

Pēdējā sakarībā ievietosim $x = a$ un $y = b$

$$\begin{gathered}
(a^2 - f(b))^2 = (b^2 - f(a))^2 \\
(a^2 + b^2)^2 = (b^2 - a^2)^2 \\
a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = b^4 - 2a^2b^2 + b^4 \\
4a^2b^2 = 0
\end{gathered}$$

Tas nozīmē, ka $a = 0$ vai $b = 0$ – pretruna. Līdz ar to secinām, ka $f(x) = x^2$ visiem reāliem skaitļiem vai $f(x) = -x^2$ visiem reāliem skaitļiem. Viegli pārbaudīt, ka abas šīs funkcijas der.

2.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurā, visiem reāliem skaitļiem x, y izpildās

$$xf(y) + yf(x) \leq xy.$$

Atrisinājumi. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. Ievērosim, ka no $P(1, 0)$ izriet, ka $f(0) \leq 0$, taču no $P(-1, 0)$ izriet, ka $f(0) \geq 0$, kas nozīmē, ka $f(0) = 0$. Tagad aplūkosim $P(x, x)$, kur x ir pozitīvs reāls skaitlis

$$2xf(x) \leq x^2 \implies f(x) \leq \frac{x}{2}$$

Sareizinot pēdējo nevienādību ar $y < 0$, iegūsim, ka $yf(x) \geq \frac{xy}{2}$ visiem $x > 0$ un $y < 0$. Analoģiski, apskatot $P(y, y)$ un sareizinot iegūto nevienādību ar $x > 0$, iegūsim, ka $xf(y) \geq \frac{xy}{2}$ visiem $x > 0$ un $y < 0$. Izmantojot šos rezultātus, no $P(x, y)$, kur $x > 0$ un $y < 0$, secinām, ka

$$xf(y) + \frac{xy}{2} \leq xf(y) + yf(x) \leq xy$$
$$xf(y) + \frac{xy}{2} \leq xy$$
$$\frac{xy}{2} \leq xf(y) \leq \frac{xy}{2}$$

Līdz ar to $xf(y) = \frac{xy}{2}$, kas nozīmē, ka $f(y) = \frac{y}{2}$ visiem $y < 0$. Analoģiski varam secināt, ka

$$\frac{xy}{2} + yf(x) \leq xf(y) + yf(x) \leq xy$$
$$\frac{xy}{2} + yf(x) \leq xy$$
$$\frac{xy}{2} \leq yf(x) \leq \frac{xy}{2}$$

Līdz ar to $yf(x) = \frac{xy}{2}$, kas nozīmē, ka $f(x) = \frac{x}{2}$ visiem $x > 0$. Secinām, ka $f(x) = \frac{x}{2}$ visiem reāliem skaitļiem x. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

2.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ar īpašību, ka visiem pozitīviem reāliem skaitļiem x, y izpildās

$$f(x + yf(x) + y^2) = f(x) + 2y.$$

Atrisinājumi. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu.

Apgalvojums. Funkcija f ir injektīva.
Pierādījums. Izvēlēsimies tādu pozitīvus x, y, lai $x + yf(x) + y^2 = z$, tas ir

$$\begin{gathered} x + yf(x) + y^2 = z \\ (x - \frac{f(x)^2}{4}) + (y + \frac{f(x)}{2})^2 = z \\ (2y + f(x))^2 = 4(z - x) + f(x)^2 \\ y = \frac{1}{2}(-f(x) \pm \sqrt{f(x)^2 + 4(z - x)}) \end{gathered}$$

Lai y būtu pozitīvs reāls skaitlis, tad jāizvēlas tāda $z > x$ un jāizvēlas plus zīme, tas ir, $y = \frac{1}{2}(-f(x) + \sqrt{f(x)^2 + 4(z - x)})$. Ievērosim, ka no $P(x, \frac{1}{2}(-f(x) + \sqrt{f(x)^2 + 4(z - x)}))$, kur $z > x$, izriet, ka

$$f(z) = f(x) - f(x) + \sqrt{f(x)^2 + 4(z - x)}) = \sqrt{f(x)^2 + 4(z - x)}$$

visiem reāliem pozitīviem x, z, kuriem $z > x$. Pieņemsim, ka $f(a) = f(b)$ kaut kādiem pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, tad

$$\begin{gathered} \sqrt{f(x)^2 + 4(a - x)} = f(a) = f(b) = \sqrt{f(x)^2 + 4(b - x)} \\ 4(a - x) = 4(b - x) \\ a = b, \end{gathered}$$

kas nozīmē, ka funkcija f ir injektīva, kas arī bija jāpierāda.

Aplūkosim $P(x, \frac{f(y)}{2})$

$$f\left(x + \frac{f(x)f(y)}{2} + \frac{f(y)^2}{4}\right) = f(x) + f(y)$$

Tā kā iegūtās sakarības kreisā puse ir simetriska attiecība pret x un y, tad secinām, ka

$$f\left(x + \frac{f(x)f(y)}{2} + \frac{f(y)^2}{4}\right) = f(x) + f(y) = f\left(y + \frac{f(x)f(y)}{2} + \frac{f(x)^2}{4}\right)$$

Izmantojot to, ka f ir injektīva, iegūstam, ka

$$\begin{gathered} x + \frac{f(x)f(y)}{2} + \frac{f(y)^2}{4} = y + \frac{f(x)f(y)}{2} + \frac{f(x)^2}{4} \\ \frac{f(y)^2}{4} - y = \frac{f(x)^2}{4} - x \\ f(y)^2 - 4y = f(x)^2 - 4x \end{gathered}$$

visiem pozitīviem x un y. Pēdēja sakarībā aizvietojot y ar 0, iegūsim, ka

$$\begin{gathered} f(x)^2 - 4x = f(0)^2 \\ f(x) = 2\sqrt{x + \frac{f(0)^2}{4}} \end{gathered}$$

Apzīmējot $\frac{f(0)^2}{4}$ ar c, kur $c \geq 0$, secinām, ka $f(x) = 2\sqrt{x+c}$. Pārbaudīsim, ka iegūtā funkcija patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus

$$
\begin{gathered}
f(x + yf(x) + y^2) = f(x) + 2y \\
f(x + 2y\sqrt{x+c} + y^2) = 2\sqrt{x+c} + 2y \\
f((\sqrt{x+c} + y)^2 - c)) = 2(\sqrt{x+c} + y) \\
2\sqrt{(\sqrt{x+c} + y)^2 - c + c} = 2(\sqrt{x+c} + y) \\
2(\sqrt{x+c} + y) = 2(\sqrt{x+c} + y)
\end{gathered}
$$

3.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ar īpašību, ka visiem reāliem skaitļiem x, y izpildās
$$f(f(x)+y)+xf(y) = f(xy+y)+f(x).$$

Atrisinājumi. Ar $P(x,y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu.

1.apgalvojums. $f(0) = 0$.
Pierādījums. Ievērosim, ka no $P(0,y)$ un $P(x,0)$ izriet, ka

$$\begin{gathered} f(y+f(0)) = f(y)+f(0) \\ f(f(x))+xf(0) = f(0)+f(x) \end{gathered}$$

Pirmajā sakarībā, ievietojot $y = -f(0)$, iegūstam, ka

$$f(-f(0)+f(0)) = f(-f(0))+f(0) \implies f(-f(0)) = 0$$

Savukārt otrajā sakarībā, ievietojot $x = -f(0)$, iegūstam, ka

$$f(f(-f(0))) - f(0)^2 = f(0)+f(-f(0))) \implies f(0)^2 = 0,$$

kas nozīmē, ka $f(0) = 0$.

Tā kā $f(0) = 0$, tad otra sakarība kļūst par $f(f(x)) = f(x)$.

2.apgalvojums. $f(1) = 1$ vai $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem x.
Pierādījums. Aplūkosim $P(x,1)$, no kurienes izriet, ka

$$f(f(x)+1)+xf(1) = f(x+1)+f(x)$$

Aizstājot šajā sakarībā x ar $f(x)$, iegūstam, ka

$$\begin{gathered} f(f(f(x))+1)+f(x)f(1) = f(f(x)+1)+f(f(x)) \\ f(f(x)+1)+f(x)f(1) = f(f(x)+1)+f(x) \\ f(x)f(1) = f(x) \end{gathered}$$

Ja neeksistē tāds reāls skaitlis b, ka $f(b) \neq 0$, tad $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem x. Pretējā gadījumā $f(b)f(1) = f(b) \implies f(1) = 1$, kas arī bija jāpierāda.

3.apgalvojums: Ja $f(a) = 0$, tad $a = 0$.
Pierādījums. Pieņemsim, ka $f(a) = 0$ kaut kādam reālam skaitlim a. No $P(a,1)$ izriet, ka

$$\begin{gathered} f(f(a)+1)+af(1) = f(a+1)+f(a) \\ f(1)+a = f(a+1) \\ a+1 = f(a+1) \end{gathered}$$

Savukārt no $P(1,a)$ izriet, ka

$$\begin{gathered} f(f(1)+a)+f(a) = f(2a)+f(1) \\ f(a+1) = f(2a)+1 \\ a+1 = f(2a)+1 \\ f(2a) = a. \end{gathered}$$

Ņemot f no abām pusēm pēdējai sakarībai, iegūsim, ka

$$0 = f(a) = f(f(2a)) = f(2a) = a,$$

kas arī bija jāpierāda.

Aplūkosim $P(x, x - f(x))$

$$xf(x - f(x)) = f((x - f(x)) \cdot (x + 1))$$

Ievietojot $x = -1$, iegūstam, ka

$$-f(-1 - f(-1)) = f((1 - f(-1)) \cdot 0) = f(0) = 0$$

No 3. apgalvojuma izriet, ka $-1 - f(-1) = 0 \implies f(-1) = -1$. Aplūkosim $P(-1, y)$, no kurienes izriet, ka

$$f(y - 1) = f(y) - 1$$

Aizstājot y ar $y + 1$, dod mums, ka

$$f(y + 1) = f(y) + 1$$

Savukārt no $P(x, 1)$ izriet, ka

$$\begin{gathered} f(f(x) + 1) + x = f(x + 1) + f(x) \\ f(f(x)) + 1 + x = f(x) + 1 + f(x) \\ f(x) + x = 2f(x) \\ f(x) = x \end{gathered}$$

Līdz ar to vienīgās funkcijas, kas apmierina uzdevuma nosacījumus ir $f(x) = x$ un $f(x) = 0$. Viegli pārbaudīt, ka tās patiešām der.

4.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, kurām visiem veseliem skaitļiem x, y izpildās

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + f(x - 2y).$$

Pierādījums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. Pielietosim mainīgo noīsināšanas triku – izvēlēsimies tādu x, lai $x - f(y) = f(y)$ jeb $x = 2f(y)$. Aplūkosim tādā gadījumā $P(2f(y), y)$, no kurienes iegūstam, ka $f(2f(y) - 2y) = 0$. Ja funkcija f ir injektīva, tad

$$2(2f(y) - 2y) = 0 = f(2f(0)) \implies 2f(y) - 2y = 2f(0) \implies f(y) = y + f(0)$$

Tas nozīmē, ka $f(x) = x + c$, kur c ir kaut kāda fiksēta konstante. Pārbaudīsim, kādām c vērtībām dotā funkcija apmierina $P(x, y)$

$$\begin{gathered} f(x - f(y)) = f(f(y)) + f(x - 2y) \\ f(x - y - c) = f(y + c) + x - 2y + c \\ x - y = y + 2c + x - 2y + c \\ c = 0 \end{gathered}$$

Secinām, ka $f(x) = x$ visiem veseliem skaitļiem x.

Ja funkcija f nav injektīva, tad $f(a) = f(b)$ kaut kādiem veseliem skaitļiem $a > b$. Aplūkosim tādā gadījumā $P(x, a)$ un $P(y, b)$

$$\begin{gathered} f(x - f(a)) = f(f(a)) + f(x - 2a) \\ f(x - f(b)) = f(f(b)) + f(x - 2b) \end{gathered}$$

Tā kā $f(a) = f(b)$, tad arī $f(f(a)) = f(f(b))$, līdz ar to secinām, ka

$$f(x - 2a) = f(x - 2b)$$

Aizstājot pēdējā sakarībā x ar $x + 2a$, iegūsim, ka

$$f(x) = f(x + 2a - 2b) = f(x + T),$$

kur $T = 2a - 2b$. Tas nozīmē, ka funkcija f ir periodiska ar periodu T. Tagad izmantosim to, ka funkcija ir definēta tikai veseliem skaitļiem. Tā kā tā ir periodiska ar periodu T, tad tā var pieņemt ne vairāk kā T dažādas vērtības, līdz ar to funkcijai eksistē maksimālā vērtībā M, kas tiek sasniegta pie argumenta x_0.

Izvēlēsimies sakarībā $P(x, y)$ tādu x, lai $x - 2y = x_0$, tas ir, $x = x_0 + 2y$, tad

$$\begin{gathered} f(x_0 + 2y - f(y)) = f(f(y)) + f(x_0) \\ f(x_0 + 2y - f(y)) = f(f(y)) + M \\ f(f(y)) = f(x_0 + 2y - f(y)) - M \end{gathered}$$

Ievērosim, ka tā kā M ir funkcijas f maksimālā vērtība, tad $f(x_0 + 2y - f(y)) \leq M$, līdz ar to $f(f(y)) \leq 0$. Tālāk izvēlēsimies sakarībā $P(x, y)$ tādu x, lai $x - f(y) = x_0$, tas ir, $x = x_0 + f(y)$, tad

$$\begin{gathered} f(x_0) = f(f(y)) + f(x_0 + f(y) - 2y) \\ M = f(f(y)) + f(x_0 + f(y) - 2y) \\ M - f(x_0 + f(y) - 2y) = f(f(y)) \end{gathered}$$

Ievērosim, ka tā kā M ir funkcijas f maksimālā vērtība, tad $M \geq f(x_0 + f(y) - 2y)$, līdz ar to $f(f(y)) \geq 0$. Secinām, ka visiem veseliem skaitļiem y ir spēkā, ka $f(f(y)) = 0$.

No iepriekš iegūtām sakarībām izriet, ka $P(x, y)$ var pārrakstīt kā $f(x - f(y)) = f(x - 2y)$. Aizstāsim šajā sakarībā y ar $f(y)$

$$f(x - f(f(y)) = f(x - 2f(y))$$
$$f(x) = f(x - 2f(y))$$

Pēdējā sakarībā ievietosim $x = f(y)$, lai iegūtu, ka $0 = f(f(y)) = f(-f(y))$. Sakarībā $f(x - f(y)) = f(x - 2y)$ ievietojot $x = 0$, iegūsim, ,ka $f0 = (-f(y)) = f(-2y)$, kas ir tas pats, ka $f(x) = 0$ visiem pāra skaitļiem. No $P(x, 2)$ izriet, ka

$$f(x - f(2)) = f(f(2)) + f(x - 4)$$
$$f(x) = f(x - 4)$$

Tas nozīmē, ka funkcijas periods ir skaitļa 4 dalītājs, līdz ar to tas ir tikai 1, 2 vai 4. Aplūkosim katru gadījumu atsevišķi

- Ja funkcijas periods ir 1, tad $f(x) = 0$ visiem veseliem skaitļiem x, jo $0 = f(2y) = f(2y + 1)$ katram veselam skaitlim y.

- Ja funkcijas periods ir 2, tad $f(2y) = 0$ un $f(2y + 1) = C$, kur C ir konstante. Tā kā $0 = f(f(2y + 1)) = f(C)$, tad vai nu C ir 0 un tad iegūstam atrisinājumu, ko jau aplūkojam iepriekš vai arī secinām, ka C ir jābūt pāra skaitlim, jo tikai pāra argumenti funkcija pieņem vērtību 0 (attiecīgi pie nepāra argumentiem vērtību C, kas nav 0). Tas nozīmē, ka

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \equiv 0 \pmod 2 \\ 2n & x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

  kaut kādam veselam skatlim n. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija patiešām der.

- Ja funkcijas periods ir 4, tad $f(4y + 1) = C_1$ un $f(4y + 3) = C_2$, kur C_1 un C_2 ir konstantes. Līdzīgi kā iepriekš no $f(f(y)) = 0$ izriet, ka šīs konstantes ir pāra skaitļi, tāpēc varam rakstīt, ka $C_1 = 2c_1$ un $C_2 = 2c_2$. Atcerēsimies arī to, ka $f(x - f(y)) = f(x - 2y)$, kas ir tas pats, kas $f(x) = f(x + f(y) - 2y)$, ja aizstāj x ar $x + f(y)$. Tas nozīmē, ka $4 \mid f(y) - 2y$, ja izvēlas nepāra x. Ja $y = 4k + 1$, tad iegūstam, ka $4 \mid 2c_1 - 2(4k + 1)$, kas nozīmē, ka c_1 ir nepāra. Līdzīgi varam arī iegūt, ka n_2 ir nepāra. Tas nozīmē, ka

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \equiv 0 \pmod 4 \\ 4n_1 + 2 & x \equiv 1 \pmod 4 \\ 0 & x \equiv 2 \pmod 4 \\ 4n_3 + 2 & x \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

  kaut kādiem veseliem skaitļiem n_1 un n_2. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija patiešām der.

1.piezīme. Šajā uzdevumā tas, ka funkcionālvienādojums ir no veseliem skaitļiem uz veseliem skaitļiem spēlē būtisku lomu, lai garantētu M eksistenci. Piemēram, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurai

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 0, \text{citādi} \end{cases}$$

ir periodiska funkcija ar periodu π, kurai neeksistē maksimālā vērtība, jo tā var pieņemt pēc patikas lielas vērtības.

2.piezīmē. Risinājumā beigās mēs katram periodam izpētām, kādus ierobežojumus atklātās sakarības par f mums dod. Piemēram, gadījumā ar periodu 2 mums pietika ar vienu ierobežojumu un tālāk veicot formālu atbildes pārbaudi mēs redzam, ka šī funkcija der, tāpēc mums nav jāmeklē vairāk ierobežojumu. Savukārt, gadījumā ar periodu 4, ja mēs veiktu formālu atbildes pārbaudi bez nosacījumu, ka c_1 un c_2 jābūt nepāra skaitļiem, tad mēs atrastu kaut kādus x un y, kuriem $P(x, y)$ neizpildās. Tāpēc mēs apskatījāmies kādas vēl sakarības mēs par f zinām un no $f(x - f(y)) = f(x - 2y)$ izrietēja papildus ierobežojumi uz c_1, c_2, kuri jau tagad, ja mēs veicam pārbaudi apmierina $P(x, y)$ (visas pārbaudes paliek lasītājam kā vingrinājums).