2.mājasdarbs

Ievads. Šajā mājasdarbā Jums tiek piedāvāti 4 uzdevumi, kuri ir sakārtoti grūtību pieaugošā secībā. Katrs uzdevums tiek novērtēts ar $0-7$ punktiem. Punkti tiek piešķirti arī par ne līdz galam atrisinātiem uzdevumiem, ja ir iegūti noderīgi rezultāti. Risinājumu iesniegšanai izmantot NMS mājaslapā esošo formu.

1.uzdevums Dots polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem un trīs dažādi veseli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka $|P(a)| = |P(b)| = |P(c)| = 1$. Pierādīt, ka šīm polinomam nav veselo sakņu.

2.uzdevums Dots polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem, kuram ir 100 dažādas veselas saknes, un divi dažādi pirmskaitļi p un q. Zināms, ka nekonstants polinoms $Q(x)$ ar veseliem koeficientiem dala polinomu $P(x) + pq$. Pierādīt, ka $\deg Q(x) \geq 13$.

Piezīme. Polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem dalās ar polinomu $Q(x)$ ar veseliem koeficientiem, ja eksistē tāds polinoms $R(x)$ ar veseliem koeficientiem, ka $P(x) = Q(x)R(x)$ visiem reāliem skaitļiem x.

3.uzdevums Pierādīt, ka neeksistē divi dažādi polinomi $P(x)$ un $Q(x)$ ar īpašību, ka abiem polinomiem ir vismaz viena reāla sakne (ne obligāti kopīga) un visiem reāliem skaitļiem x izpildās

$$P(1 + x + Q(x)^2) = Q(1 + x + P(x)^2).$$

4.uzdevums Dots polinoms $P(x)$ ar reāliem koeficientiem, kura pakāpe ir n. Zināms, ka $|P(x)| \leq 1$ visiem $x \in [0, 1]$. Pierādīt, ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās

$$|P(-\frac{1}{n})| \leq 2^{n+1} - 1$$