Polinomi

Alfrēds Saročinskis, Kims Georgs Pavlovs

1 Ievads

Šajā nodarbībā aplūkosim polinomus un ar to saistītus jēdzienus, lai, ja nākamgad Baltijas ceļa atlasē parādās uzdevumi par polinomiem, cilvēkiem pēc olimpiādes nebūtu slikta noskaņojuma.

2 Teorija

2.1 Pamatjēdzieni par polinomiem

Par **polinomu** $P(x)$ sauc izteiksmi, kura ir izsakāma formā

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kur n ir fiksēts nenegatīvs vesels skaitlis un skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir **polinoma koeficienti**.

Piemēram, ja $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, tad saka, ka polinomam $P(x)$ ir reāli koeficienti, savukārt, ja $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, tad saka, ka polinomam $P(x)$ ir veseli koeficienti u.tml. Ja $a_n = 1$, tad saka, ka polinoms $P(x)$ ir monisks.

Par polinoma $P(x)$ **pakāpi** (apzīmē ar $\deg P(x)$) sauc mainīga x lielāko pakāpi ar no nulles atšķirīgu koeficientu. Piemēram, ja mums ir doti polinomi

$$\begin{aligned}
&P(x) = x^2 - 2x \\
&Q(x) = 3x^2 + x - 7x^3 + 1 \\
&R(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0),
\end{aligned}$$

tad $\deg P(x) = 2, \deg Q(x) = 3, \deg R(x) = n$.

Vispirms aplūkosim, kādas darbības var veikt ar polinomiem

- **Reizināšana ar konstanti**. Pieņemsim, ka mums ir dots polinoms $P(x) = 2x^3 - x + 4$ un konstante $c = \frac{3}{2}$, tad $cP(x) = 3x^3 - \frac{3}{2}x + 6$, tas ir, mēs katru polinoma koeficientu pareizinājām ar $\frac{3}{2}$. Ievērosim, ka šī darbība neizmaina polinoma pakāpi, izņemot gadījumu, kad konstante, ar kuru mēs pareizinām, ir 0.

- **Saskaitīšanas darbība.** Pieņemsim, ka mums ir doti 2 polinomi $P(x) = 2x^2 - x$ un $Q(x) = x + 1$, tad $P(x) + Q(x) = 2x^2 - x + x + 1 = 2x^2 + 1$.

  Ievērosim, ka, ja $P(x), Q(x)$ ir polinomi ar $\deg P(x) = n, \deg Q(x) = m$, tad $\deg(aP(x) + bQ(x)) \leq \max(n, m)$ patvaļīgām konstantēm a un b. To var argumentēt sekojoši – tā kā gan starp polinoma P mainīga x pakāpēm, gan starp polinoma Q mainīga x pakāpēm nav nevienas pakāpes, kas būtu lielāka par $\max(n, m)$, saskaitot šos polinomus vai reizinot ar patvaļīgu konstanti, nevar parādīties mainīga x pakāpe, kas būtu lielāka par $\max(n, m)$.

- **Reizināšanas darbība**. Pieņemsim, ka mums ir doti $P(x) = 2x^2 - x$ un $Q(x) = x + 1$, tad $P(x)Q(x) = (2x^2 - x)(x + 1) = 2x^3 + 2x^2 - x^2 - x = 2x^3 + x^2 - x$.

  Ievērosim, ka, ja $P(x), Q(x)$ ir polinomi ar $\deg P(x) = n, \deg Q(x) = m$, tad $\deg(P(x)Q(x)) = n + m$. To var argumentēt sekojoši – tā kā $\deg P(x) = n$ un $\deg Q(x) = m$, tad polinomos $P(x)$ un $Q(x)$ ir attiecīgi saskaitāmie $a_n x^n$ un $b_m x^m$, kur $a_n, b_m \neq 0$. Polinomam $P(x)Q(x)$ būs saskaitāmais $a_n b_m x^{m+n}$ (atverot iekavas/veicot polinomu reizināšanu). Acīmredzami, ka nebūs saskaitāmais ar lielāku pakāpi nekā $m+n$ un $a_n b_m x^{n+m}$ būs vienīgais saskaitāmais ar pakāpi $n+m$. Ievērosim, ka $a_n b_m \neq 0$. No polinoma pakāpes definīcijas izriet, ka $\deg(P(x)Q(x)) = n+m$.

- **Kompozīcijas darbība.** Pieņemsim, ka doti polinomi $P(x) = x^3 + 2x + 1$ un $Q(x) = x^2 + 1$, tad

$$\begin{aligned} P(Q(x)) = (Q(x))^3 + 2Q(x) + 1 = \\ = (x^2+1)^3 + 2(x^2+1) + 1 = \\ = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 + 2x^2 + 2 + 1 = \\ = x^6 + 3x^4 + 5x^2 + 4 \end{aligned}$$

  Ievērosim, ka, ja $P(x), Q(x)$ ir polinomi ar $\deg P(x) = n$ un $\deg Q(x) = m$, tad $\deg P(Q(x)) = nm$. Pieņemsim, ka

$$\begin{aligned} P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

  Tādā gadījumā $P(Q(x))$ saturēs saskaitāmo $a_n(b_m x^m + b_{m_1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0)^n$, no kura radīsies (atverot iekavas) saskaitāmais $a_n b_m^n x^{mn}$. Acīmredzami, ka visiem citiem saskaitāmajiem būs mazāka pakāpe un šis ir vienīgais saskaitāmais ar pakāpi mn. Ievērosim, ka $a_n b_m^n \neq 0$, tāpēc $\deg P(Q(x)) = mn$ no polinoma pakāpes definīcijas.

2.2 Polinoma saknes

Polinoma saknes jēdziens ir ļoti noderīgs uzdevumu risināšanā.

Definīcija. Skaitlis a ir polinoma $P(x)$ **sakne**, ja $P(a) = 0$. Piedevām, ja skaitlis a ir polinoma $P(x)$ sakne, tad $P(x) = (x-a)Q(x)$, kur $Q(x)$ ir kaut kāds polinoms.

Strādājot ar polinoma saknēm ir svarīgi sekot līdzi, kādai skaitļu kopai pieder sakne, piemēram:

- pieņemsim, ka kādā uzdevumā kontekstā mums interesē polinoma $P(x) = x^2 + 1$ reālās saknes. Acīmredzami, ka tam nav **reālu** sakņu, taču tam ir 2 kompleksas saknes i un $-i$.
- pieņemsim, ka kādā uzdevuma kontekstā mums interesē polinoma $P(x) = 4x^2 - 1$ **veselās** saknes. Acīmredzami, ka tam nav veselu sakņu, taču tam ir 2 reālas saknes $\frac{1}{2}$ un $-\frac{1}{2}$.
- pieņemsim, ka kādā uzdevumā kontekstā mums interesē polinoma $P(x) = x^2 - 2$ **racionālās** saknes. Acīmredzami, ka tam nav racionālu sakņu, taču tam ir 2 reālas saknes $\sqrt{2}$ un $\sqrt{-2}$.

Algebras pamatteorēma. Polinomam $P(x)$ ar kompleksiem koeficientiem, kas ir no nulles atšķirīgs un kuram $\deg P(x) = n$, ir tieši n kompleksas saknes.

Šo teorēmu nepierādīsim, taču interesanti var iepazīties ar tās pierādījumu Vikipēdijas lapā. Ievērosim, ka nulles polinomam ir spēkā, ka $P(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem x.

Svarīgs secinājums. Polinomam $P(x)$ ar reāliem koeficientiem, kas ir no nulles atšķirīgs, ir ne vairāk kā n reālas saknes.

Pierādījums. Tā kā reāli skaitļi ir komplekso skaitļu apakškopa, tad polinomam $P(x)$ ir tieši n kompleksās saknes. Ne visas no šīm saknēm ir obligāti reāli skaitļi, tāpēc polinomam $P(x)$ ir ne vairāk kā n reālas saknes.

Svarīgs triks. Pieņemsim, ka mums ir doti polinomi $P(x), Q(x)$. Ja $P(x) = Q(x)$ vairāk nekā $\max(\deg P(x), \deg Q(x))$ dažādām x vērtībām, tad $P(x) = Q(x)$ visām x vērtībām.

Pierādījums. Definēsim polinomu $R(x) = P(x) - Q(x)$. Ievērosim, ka $\deg R(x) \leq \max(\deg P(x), \deg Q(x))$, kas nozīmē, ka polinomam $R(x)$ ir ne vairāk kā $\max(\deg P(x), \deg Q(x))$ sakņu. Taču no uzdevuma nosacījumiem izriet, ka polinoms $R(x)$ pieņem vērtību vismaz $\max(\deg(P(x)), \deg(Q(x))$ dažādām vērtībām, kas nozīmē, ka tam ir vairāk nekā $\max(\deg(P(x)), \deg(Q(x))$ sakņu. Tas ir iespējams tad un tikai tad, ja polinoms $R(x)$ ir nulles polinoms jeb $R(x) = P(x) - Q(x) = 0$ visām x vērtībām, kas nozīmē, ka $P(x) = Q(x)$ visām x vērtībām, kas arī bija jāpierāda.

Esam iepazinušies ar saknes jēdzienu. Tagad mēs vēlētos saprast, kā polinomam ar reāliem koeficientiem var atrast reālu sakni vai arī intervālu, kurā šī sakne atrodas.

Teorēma. Doti reāli skaitļi $a < b$ un ne konstants polinoms $P(x)$ ar īpašību, ka $P(a)P(b) < 0$, citiem vārdiem sakot, viens no skaitļiem $P(a)$ un $P(b)$ ir pozitīvs, bet otrs ir negatīvs. Tad polinomam $P(x)$ ir reāla sakne intervālā (a, b).

Šo teorēmu nepierādīsim, taču interesanti var iepazīties ar tās pierādījumu Vikipēdijas lapā. Jāatzīmē, ka šī teorēma izpildās ne tikai polinomiem, bet visām nepārtrauktām funkcijām intervālā $[a, b]$ (polinoms acīmredzami ir nepārtraukta funkcija).

Acīmredzami, ka, ja $P(x)$ ir nekonstants polinoms, tad $\lim_{x\to\infty} P(x) \to \infty$. Ja $P(x)$ ir polinoms ar pāra pakāpi un pozitīvo koeficientu pie lielākās x pakāpes, tad $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) \to +\infty$, savukārt, ja koeficients ir negatīvs, tad $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) \to -\infty$. Priekš nepāra pakāpes polinomiem mums ir šāda lemma.

Lemma. Ja $P(x)$ ir polinoms, kuram $\deg P(x)$ ir nepāra skaitlis, tad

- polinomam $P(x)$ ir vismaz viena reāla sakne;
- polinoms $P(x)$ pieņem visas reālas vērtības, skaitlim x izejot cauri visām reālo skaitļu vērtībām.

Pierādījums. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka koeficients pie polinoma $P(x)$ augstākās pakāpes ir pozitīvs skaitlis. Tādā gadījumā $\lim_{x\to+\infty} P(x) \to +\infty$ un $\lim_{x\to-\infty} P(x) \to -\infty$. Tas nozīmē, ka eksistē tādi reāli skaitļa a un b, ka $P(a) > 0$ un $P(b) < 0$. No teorēmas izriet, ka intervālā (a, b) var atrast polinoma $P(x)$ reālu sakni, kas arī bija jāpierāda.

Mums ir jāpierāda, ka katram reālam skaitlim m eksistē reāls skaitlis n ar īpašību, ka $P(n) = m$. Aplūkosim polinomu $Q(x) = P(x) - m$. Mums pietiek pierādīt, ka polinomam $Q(x)$ ir reāla sakne. Taču tas ir nepāra pakāpes polinoms, tāpēc pēc pirmās lemmas daļas tam ir kaut kāda reāla sakne, kuru var apzīmēt ar n, kas arī bija jāpierāda.

2.3 Vjeta teorēma

Starp polinoma koeficientiem un saknēm pastāv sakarības, kuras apraksta Vjeta teorēma. Uz to var skatīties sekojoši – polinoma koeficienti dod ierobežojumus uz polinoma saknēm, kas bieži vien var būt noderīgi dažādos uzdevumos.

Vjeta teorēma. Dots polinoms $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ar reāliem koeficientiem. Ja skaitļi $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ir šī polinoma saknes (iespējams kompleksās), tad

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = (-1)^1 \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j = (-1)^2 \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k = (-1)^3 \frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\cdots$$

$$x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Pierādījums. Tā kā $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ir šī polinoma saknes, mēs var to pārrakstīt kā

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Apskatot koeficientus pie katras x pakāpes pēc iekavu atvēršanas, mēs dabūsim vēlamo rezultātu. Detaļas paliek lasītājam kā vingrinājums.

Apskatīsim, kas izriet no Vjeta teorēmas pie dažādiem pakāpes polinomiem

- Ja $\deg P(x) = 2$, tad varam rakstīt, ka $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, kur a_2, a_1, a_0 ir reāli skaitļi. Pieņemsim, ka šī polinoma saknes ir x_1, x_2, kuras ir iespējams ir kompleksas, tad no Vjeta teorēmas izriet, ka
$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2} \quad \text{un} \quad x_1 x_2 = \frac{a_0}{a_2},$$
kas ir identisks rezultāts skolā mācītajai Vjeta teorēmai;

- Ja $\deg P(x) = 3$, tad varam rakstīt, ka $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, kur a_3, a_2, a_1, a_0 ir reāli skaitļi. Pieņemsim, ka šī polinoma saknes ir x_1, x_2, x_3, kuras iespējams ir kompleksas, tad no Vjeta teorēmas izriet, ka
$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{a_1}{a_3}, x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

Ievērosim, ka vispārīgi n-tās pakāpes polinomam ir spēkā, ka

- Skaitlis $(-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n}$ ir vienāds ar summu, kura sastāv no visiem iespējamiem saskaitāmajiem, kuri ir izsakāmi formā kā visu sakņu reizinājums, izlaižot tieši vienu sakni. Ņemot vērā to, ka $x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ un pieņemot, ka neviena no saknēm nav 0, tad varam iegūt, ka
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \left((-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n}\right) \div \left((-1)^n \frac{a_0}{a_n}\right) = -\frac{a_1}{a_0}$$

- Skaitlis $(-1)^{n-2}\frac{a_2}{a_n}$ ir vienāds ar summu, kura sastāv no visiem iespējamiem saskaitāmajiem, kuri ir izsakāmi formā kā visu sakņu reizinājums, izlaižot tieši divas dažādas saknes. Ņemot vērā to, ka $x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ un pieņemot, ka neviena no saknēm nav 0, tad varam iegūt, ka
$$\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{x_i x_j} = \left((-1)^{n-2}\frac{a_2}{a_n}\right) \div \left((-1)^n \frac{a_0}{a_n}\right) = \frac{a_2}{a_0}$$

Ar iegūtajām 2 sakarībām, kas izpildās koeficientiem a_2 un a_3, ir daudzu uzdevumu kontekstā ir vieglāk operēt nekā sākotnējām sakarībām, tāpēc tās ir vērts paturēt prātā (vai arī to, kā var iegūt šīs sakarības no Vjeta teorēmas).

Rūpīgam lasītājam varēja rasties jautājums – ja polinoma ar reāliem koeficientiem var būt kompleksas saknes, kāpēc tad, piemēram, sakņu summa vai reizinājums ir vienāds ar reālu skaitli (attiecīgi ar $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ un $(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$) pie vispārīga n - tās pakāpes polinoma. Atbilde slēpjas šādā komplekso skaitļu īpašībā – ja skaitlis $x_0 = a + bi$ ir polinoma sakne, tad skaitlis $\overline{x_0} = a - bi$ arī ir polinoma sakne, kur a, b ir reāli skaitļi. Tas nozīmē, ka kompleksās saknes nāk pāros $x_0, \overline{x_0}$. Ievērosim, ka viena pāra summa un reizinājums ir attiecīgi $x_0 + \overline{x_0} = 2a$ un $x_0\overline{x_0} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, kas abi ir reāli skaitļi. Tas nozīmē, ka, aplūkojot sakņu summu vai reizinājumu attiecīgi, kompleksās saknes var sadalīt pāros tā, lai katrā pāri skaitļu summa vai reizinājums ir reāls skaitlis, tāpēc arī attiecīgi visa summa vai reizinājums ir reāls skaitlis. Līdzīgi var argumentēt, ka, piemēram, visu sakņu pāru reizinājumu summa ir reāls skaitlis, bet to mēs formāli nepierādīsim.

Ir vērts atzīmēt, ka starp polinoma $P(x)$ ar $\deg P(x) = n$ saknēm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ var būt divas vai vairākas vienādas saknes. Piemēram, polinoma $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ saknes ir $-2, -2, -2$ jeb, citiem vārdiem sakot, skaitlis -2 ir polinoma $P(x)$ trīskāršā sakne.

2.4 Bezū teorēma

Strādājot ar polinomiem, kuriem ir veseli koeficienti, mēs zinām, ka pie visiem veseliem skaitļiem tie pieņem veselas vērtības, līdz ar to informācija par to, ka kāda izteiksme, kas satur kādas polinoma vērtības dalās ar kādu citu izteiksmi, var bieži noderēt un novest līdz uzdevuma atrisinājumam.

Bezū teorēma. Ja $P(x)$ ir polinoms ar veseliem koeficientiem un a, b ir veseli skaitļi, tad $a - b \mid P(a) - P(b)$

Pierādījums. Pieņemsim, ka

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Tādā gadījumā izteiksmi $P(a) - P(b)$ var pārrakstīt kā

$$a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + a_1(a - b)$$

Tā kā $a - b \mid (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}) = a^n - b^n$ visiem naturāliem n, tad secinām, ka $a - b \mid P(a) - P(b)$, kas arī bija jāpierāda.

Bezū teorēmu ir vērts izmantot uzdevumus, kuros ir dots polinoms ar veseliem koeficientiem un mēs zinām polinoma vērtības dažos punktos.

2.5 Lagranža interpolācijas polinoms

Pieņemsim, ka Dekarta koordinātu plaknē ir atlikti divi punkti (x_1, y_1), (x_2, y_2), tad acīmredzami, ka caur tiem var novilkt tikai vienu taisni, kuru var aprakstīt ar pirmās vai nultās pakāpes polinomu. Ja, piemēram, mums plaknē būtu doti (x_1, y_1), (x_2, y_2) un (x_3, y_3), kas neatrodas uz vienas taisnes, tad caur tiem var izvilkti tikai vienu kvadrātfunkciju jeb otrās pakāpes polinomi. Tā ir arī dziļā doma, kas ir apslēpta Lagranža interpolācijas polinomā – ja mēs zinām polinoma vērtības $n + 1$ punktos, tad mēs varam uzkonstruēt unikālu n- tās pakāpes polinomu ar šīm vērtībām.

Lagranža interpolācija. Pieņemsim, ka mums ir dots n - tās pakāpes polinoms, kuram izpildās $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, $\ldots$, $P(x_{n+1}) = y_{n+1}$, tad

$$P(x) = y_1 \cdot \frac{f_1(x)}{f_1(x_1)} + y_2 \cdot \frac{f_2(x)}{f_2(x_2)} + \ldots + y_{n+1} \cdot \frac{f_{n+1}(x)}{f_{n+1}(x_{n+1})},$$

kur $f_i(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_{n+1})$

Pierādījums. Vispirms pierādīsim, ja $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, $\ldots$, $P(x_{n+1}) = y_{n+1}$, tad $P(x)$ ir unikāls, citiem vārdiem sakot, eksistē unikāls polinoms ar šādām vērtībām šajos konkrētajos punktos. Pieņemsim pretējo, ka eksistē 2 šādi polinomi $P(x)$ un $Q(x)$, tad aplūkosim polinomu $R(x) = P(x) - Q(x)$. Ievērosim, ka $R(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = y_i - y_i = 0$ visiem $1 \leq i \leq n + 1$. Taču $\deg R(x) \leq \max(\deg P(x), \deg Q(x)) = n$. Bet esam ieguvuši, ka šim polinomam vērtībām ir $n + 1$ sakne, kas nozīmē, ka tas ir nulles polinoms. Tādā gadījumā $R(x) = 0 \implies P(x) = Q(x)$ visām x vērtībām.

Tā kā esam pierādījuši, ka eksistē tikai viens polinoms ar šādām vērtībām, tad ja mēs parādīsim, ka šādu polinomu var uzkonstruēt, tad būsim pierādījuši prasīto. Ievērosim, ka $f_i(x_j) = 0$, ja $i \neq j$, jo f_i satur reizinātāju $(x - x_j)$. Piedevām $f_i(x_i) \neq 0$, jo skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir pa pāriem dažādi. Tādā gadījumā

$$P(x_i) = 0 + 0 + \ldots + y_i \cdot \frac{f_i(x_i)}{f_i(x_i)} + 0 + \ldots 0 = y_i$$

visiem $1 \leq i \leq n + 1$. Prasītais ir pierādīts.

Lagranža interpolāciju ir vērts izmantot uzdevumus, kad mēs zinām polinoma vērtību vairāk punktos nekā tā pakāpe, jo tad mēs varam uzkonstruēt minēto polinomu.

3 Uzdevumu risināšanas piemēri

Tagad aplūkosim vairākus piemērus, lai izprastu, kā apgūtu teoriju par polinomiem var izmantot olimpiāžu uzdevumu risināšanā.

1. piemērs. Vienādojuma $x^3-14x^2+63x-91=0$ saknes ir trijstūra malu garumi, kas izteikti centimetros. Aprēķināt šī trijstūra laukumu!

Atrisinājums. Ja polinoma $P(x)=x^3-14x^2+63x-91$ saknes apzīmēt ar a,b,c, tad no Vjeta teorēmas izriet, ka

$$\begin{aligned} a+b+c&=14\\ ab+ac+bc&=63\\ abc&=91 \end{aligned}$$

Pēc Hērona formulas trijstūra laukums $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kur a,b,c ir trijstūra malu garumi, bet p – pusperimetrs. Tā kā a,b,c ir trijstūra malu garumi un $a+b+c=14$, tad $p=7$.

Ievērosim, ka

$$(p-a)(p-b)(p-c)=p^3-(a+b+c)p^2+(ab+ac+bc)p-abc.$$

Tātad trijstūra laukums ir

$$\begin{aligned} S&=\sqrt{p(p^3-(a+b+c)p^2+(ab+ac+bc)p-abc)}=\\ &=\sqrt{7\cdot(7^3-14\cdot 7^2+63\cdot 7-91)}=\\ &=\sqrt{7\cdot 7\cdot(49-98+63-13)}=7\ (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

2. piemērs. Vienādojumam $x^3-px+2019=0$, kur p — naturāls skaitlis, ir trīs reālas saknes x_1,x_2,x_3. Kāda var būt izteiksmes $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ vērtība?

Atrisinājums. No Vjeta teorēmas izriet, ka

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3&=p\\ x_1x_2x_3&=-2019 \end{aligned}$$

Tā kā x_1,x_2,x_3 ir dotā vienādojuma saknes, tad

$$\begin{aligned} x_1^3-px_1+2019&=0\\ x_2^3-px_2+2019&=0\\ x_3^3-px_3+2019&=0 \end{aligned}$$

Saskaitot šīs trīs sakarības, iegūsim, ka

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-p(x_1+x_2+x_3)+3\cdot 2019=0.$$

Līdz ar to $x_1^3+x_2^3+x_3^3=p(x_1+x_2+x_3)-3\cdot 2019=p\cdot 0-3\cdot 2019=-605.7$

3. piemērs. Doti reāli skaitļi a un b ar īpašību, ka $a+\frac{4}{a}=b+\frac{4}{b}=-2$. Atrast izteiksmes

$$\frac{a^{100}+b^{100}}{a^{98}+b^{98}}$$

visas iespējamās skaitliskās vērtības.

Atrisinājums. No uzdevuma nosascījumiem izriet, ka $a^2 + 2a + 4 = b^2 + 2b + 4 = 0$, kas nozīmē, ka skaitļi a un b ir polinoma $P(x) = x^2 + 2x + 4$ saknes. No Vjeta teorēmas izriet, ka $a + b = -2$ un $ab = 4$. Izdalīsim šo polinomu ar 4. Sanāk

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 0$$

Aizvietojot $\frac{x}{2}$ ar t, sanāks, ka skaitļi $\frac{a}{2}$ un $\frac{b}{2}$ ir polinoma $t^2+t+1 = 0$ saknes. Ievērojam, ka pareizinājot šo polinomu ar $(t-1)$, skaitļi $\frac{a}{2}$ un $\frac{b}{2}$ joprojām būs šī polinoma saknes. Tā kā

$$(t-1)(t^2+t+1) = 0$$

$$t^3 - 1 = 0$$

tad $\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \left(\frac{b}{2}\right)^3 = 1$ jeb $a^3 = b^3 = 8$. Ievērojam, ka $a^{100} = a^{99} \cdot a = 8^{33} \cdot a$ un $a^{98} = a^{96} \cdot a = 8^{32} \cdot a^2$. Analoģiski $b^{100} = 8^{33} \cdot b$ un $b^{98} = 8^{32} \cdot b^2$. Izmantojot agrāk iegūtas sakarības, mēs varam secināt, ka $a + b = -2$ un $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (-2)^2 - 2 \cdot 4 = -4$. Izmantojot šīs sakarības, secinām, ka

$$\frac{a^{100} + b^{100}}{a^{98} + b^{98}} = \frac{8^{33}(a+b)}{8^{32}(a^2+b^2)} = \frac{8(-2)}{(-4)} = 4$$

4. piemērs. Doti polinomi $P(x)$ un $Q(x)$ ar veseliem koeficientiem. Zināms, ka eksistē vesels skaitlis a ar īpašību, ka skaitļi a un $a + 2025$ ir polinoma $P(x)$ saknes. Ja $Q(2024) = 2024$, tad pierādīt, ka vienādojumam $Q(P(x)) = 1$ nav veselu sakņu.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka b ir vesels skaitlis ar īpašību, ka $Q(P(b)) = 1$. Tā kā a un $a + 2025$ ir $P(x)$ saknes, tad $P(x) = (x-a)(x-a-2024)R(x)$, kur $R(x)$ ir polinoms ar veseliem koeficientiem. Ievērojam, ka neatkarībā no b vērtības, skaitļiem $b - a$ un $b - a - 1997$ ir dažāda paritāte, līdz ar to $P(b) = (b-a)(b-a-1997)R(b)$ ir pāra skaitlis.

Tā kā $Q(2024) = 2024$, tad polinoma $Q(x)$ brīvais koeficients ir pāra skaitlis, jo citāti $Q(x)$ vērtība būtu nepāra visiem pāra skaitļiem x. No tā izriet, ka $Q(x)$ vērtība ir pāra visiem pāra skaitļiem x. Tādējādi, izteiksmes $Q(P(b))$ vērtība ir pāra, jo kā tika pierādīt iepriekš, $P(b)$ ir pāra. Tāpēc tas nevar būt vienāds ar 1 – pretruna.

No tā seko, ka tādu veselu skaitļu b neeksistē, kas nozīme, ka vienādojumam $Q(P(x)) = 1$ nav veselu sakņu, kas bija jāpierāda.

5. piemērs. Atrast visus polinomus $P(x)$ ar reāliem koeficientiem ar īpašību, ka $P(0) = 0$ un visiem reāliem x izpildās $P((x+1)^3) = (P(x)+1)^3$.

Atrisinājums. Apskatīsim patvaļīgu polinomu $P(x)$, kuram izpildās šīs īpašības. Ar d apzīmēsim $\deg P(x)$ vērtību. Tā kā konstantes atrisinājumi acīmredzami neder, tad d ir vismaz 1. Aplūkosim bezgalīgu skaitļu virkni $a_1, a_2, \cdots$ ar īpašību, ka $a_1 = 0$ un $a_{n+1} = (a_n + 1)^3$ visiem naturāliem n.

Apgalvojums. $P(a_n) = a_n$ visiem naturāliem n.
Pierādījums. Ievērosim, ka

$$P(a_1) = P(0) = 0 = a_1$$

Ja $P(a_k) = a_k$ kādam naturālam k, tad

$$P(a_{k+1}) = P((a_k+1)^3) = (P(a_k)+1)^3 = (a_k+1)^3 = a_{k+1}$$

No matemātiskas indukcijas principa $P(a_n) = a_n$ visiem naturāliem n.

Definēsim polinomu $Q(x) = P(x) - x$. Ievērosim, ka $\deg Q(x) \leq d$ un $Q(a_n) = 0$ visiem naturāliem n. Tā kā $a_1, a_2, \cdots$ virkne ir bezgalīga, tad mēs varam atrast vairāk nekā d polinoma $Q(x)$ saknes, kas nozīmē, ka $Q(x) = 0$ visiem reāliem x.

Līdz ar to $P(x) - x = 0$ jeb $P(x) = x$ visiem reāliem x. Viegli pārbaudīt, ka šis polinoms patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

6. piemērs. Atrodiet visus polinomu pārus (P, Q) ar reāliem koeficientiem ar īpašību, ka

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$

izpildās visiem reāliem x un y.

Atrisinājums. Aizvietojot x ar $x - P(y)$, mēs dabūsim, ka

$$Q(x) = P(x + Q(y) - P(y)) \quad (1)$$

Apgalvojums. $Q(x) - P(x)$ ir konstantes polinoms.
Pierādījums. Pieņemsim pretējo, tad eksistē skaitļi y_1 un y_2 ar īpašību, ka $Q(y_1) - Q(y_1) = a$ un $Q(y_2) - P(y_2) = b$ kaut kādiem diviem dažādiem reāliem skaitļiem a, b. Tas nozīmē, ka

$$Q(x) = P(x + a) = P(x + b)$$

visiem reāliem x. Tā kā $a \neq b$, tad aizvietojot x ar $x - a$ iegūsim, ka $P(x) = (x + (b - a))$. Tas nozīmē, ka $P(x) = P(x + nT)$, kur $T = b - a$ un n ir jebkurš naturāls skaitlis. Secinām, ka polinomam $P(x)$ ir bezgalīgi daudz fiksētu punktu, līdz ar to tas ir konstantes polinoms. Taču no iegūtajām sakarībām izriet, ka tādā gadījumā $Q(x)$ arī ir konstants polinoms, kas nozīmē, ka $Q(x) - P(x)$ pieņem tikai vienu vērtību visām x vērtībām, kas ir pretrunā ar sākotnējo pieņēmumu.
Tātad $Q(x) = P(x) + c$ kādam reālam skaitlim c. No (1) seko, ka

$$P(x) + c = P(x + c)$$

Ja $c \neq 0$, tad pēc indukcijas mēs varām dabūt, ka $P(nc) = nc + P(0)$ visiem naturāliem n jeb vienādojumam $P(x) = x + P(0)$ ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, kas nozīmē, ka $P(x) = x + P(0)$ visiem reāliem x. Tādējādi, $Q(x) = x + P(0) + c = x + Q(0)$. Veicot pārbaudi, secinām, ka polinoma pāri $(x + P(0), x + Q(0))$ der visām reālam $P(0)$ un $Q(0)$ vērtībām.

Ja $c = 0$, tad $P(x) = Q(x)$ visiem reāliem x. Veicot pārbaudi, secinām, ka polinoma pāri $(P(x), P(x))$ der visiem polinomiem $P(x)$.

7. piemērs. Atrodiet visus polinomus $P(x)$ ar reāliem koeficientiem, kuriem visiem reāliem skaitļiem x izpildās

$$(x - 2010)P(x + 67) = xP(x)$$

Atrisinājums. Paņemot $x = 0$ dotajā vienādojumā, iegūstam $-2010P(67) = 0$, kas nozīmē $P(67) = 0$. Ja i ir vesels skaitlis ar īpašību, ka $1 \leq i < 30$ un $P(i \cdot 67) = 0$, tad, paņemot $x = i \cdot 67$, iegūstam $(i \cdot 67 - 2010)P((i + 1) \cdot 67) = 0$, jo $i \cdot 67 < 2010$ pie $i < 30$, kas nozīmē, ka $P((i + 1) \cdot 67) = 0$. Tādējādi, pēc indukcijas, $P(i \cdot 67) = 0$ visiem $i = 1, 2, \ldots, 30$. Līdz ar to

$$P(x) = (x - 67)(x - 2 \cdot 67) \cdots (x - 30 \cdot 67)Q(x)$$

kur $Q(x)$ ir kaut kāds polinoms. Aizstājot $P(x)$ ar šo izteiksmi sākotnējā vienādojumā, iegūstam

$$(x - 2010) \cdot x \cdot (x - 67) \cdots (x - 29 \cdot 67)Q(x + 67) = x(x - 67) \cdots (x - 30 \cdot 67)Q(x)$$

kas ir ekvivalents ar

$$x(x-67)(x-2\cdot 67)\cdots(x-30\cdot 67)(Q(x+67)-Q(x))=0$$

Pēc uzdevuma nosacījumiem, tas ir spēkā katram veselam skaitlim x. Tādējādi ir bezgalīgi daudz polinoma $Q(x+67)-Q(x)$ sakņu, kas nozīmē, ka $Q(x+67)-Q(x)=0$. Apzīmēsim $Q(0)$ vērtību ar c. Tad $Q(i\cdot 67)=c$ katram veselam skaitlim i pēc vieglas indukcijas. Tādējādi polinomam $Q(x)-c$ ir bezgalīgi daudz sakņu, līdz ar to $Q(x)=c$. No tā izriet, ka

$$P(x)=c(x-67)(x-2\cdot 67)\cdots(x-30\cdot 67)$$

kaut kādam reālam skaitlim c. Ievietojot to sākuma vienādojumā, mēs varam secināt, ka visi šādi polinomi der.

8. piemērs. Dots reāls skaitlis a. Atrodiet visus polinomus $P(x)$ ar reāliem koeficientiem ar īpašību, ka

$$P(2x+a)\leq (x^{20}+x^{19})P(x)$$

izpildās visiem reāliem x.

Atrisinājums. Acīmredzami, ka vienīgais konstantes atrisinājums ir $P(x)=0$. Līdz ar to tagad apskatīsim gadījumu, kad $\deg P(x)\geq 1$.

Ievērosim, ka $P(x)$ koeficients pie augstākās pakāpes ir nenegatīvs, jo pretējā gadījumā, ja tas būtu negatīvs, tad $(x^{20}+x^{19})P(x)-P(x+2a)\geq 0$ neizpildītos pietiekami lielām x vērtībām.

Apgalvojums. $\deg P(x)$ ir pāra skaitlis.
Pierādījums. Pieņemsim, ka $\deg P(x)$ ir nepāra. Tad $(x^{20}+x^{19})P(x)-P(2x+a)\geq 0$ visiem reāliem x, taču $\deg((x^{20}+x^{19})P(x)-P(2x+a))=20+\deg P(x)$, kas arī ir nepāra, kas ir pretruna, jo nepāra pakāpes polinoms vienmēr pieņem gan pozitīvas, gan negatīvas vērtības.

Apskatīsim visus iespējamos gadījumus:

- Ja $a>0$, tad aizvietojot x ar 0 mēs dabūsim, ka $P(a)\leq 0$. Tālāk aizvietosim x ar a, lai iegūti, ka $P(3a)\leq 0$, tādējādi katram $k>0$ ar īpašību, ka $P(k)\leq 0$, aizvietojot x ar k mēs dabūsim $P(2k+a)\leq 0$. Tas nozīmē, ka kad x tiecas uz bezgalību, $P(x)$ ir negatīvs, līdz ar to, polinomam $P(x)$ ir negatīvs koeficients pie augstākas pakāpes, kas nav iespējams.
- Ja $a\leq -1$, tad aizvietojot x ar 0 mēs dabūsim, ka $P(a)\leq 0$. Tālāk aizvietosim x ar a, lai iegūti, ka $P(3a)\leq 0$, tādējādi katram $k<0$ ar īpašību, ka $P(k)\leq 0$, aizvietojot x ar k mēs dabūsim $P(2k+a)\leq 0$. Tas nozīmē, ka kad x tiecas uz mīnus bezgalību, $P(x)$ ir negatīvs, līdz ar ko, polinomam $P(x)$ ir negatīvs koeficients pie augstākas pakāpes, kas nav iespējams.
- Ja $-1<a\leq 0$, , tad aizvietojot x ar -1 mēs dabūsim, ka $P(a-2)\leq 0$. Tālāk aizvietosim x ar $a-2$, lai iegūtu, ka $P(3a-4)\leq 0$, tādējādi analoģiski kā iepriekšējā gadījumā mēs varam secināt, ka kad x tiecas uz mīnus bezgalību, $P(x)$ ir negatīvs, līdz ar ko, polinomam $P(x)$ ir negatīvs koeficients pie augstākas pakāpes, kas nav iespējams.

Esam izskatījuši visus iespējamus gadījumus un secinām, ka vienīgais atrisinājums ir $P(x)=0$.

9. piemērs. Dots polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem un trīs dažādi veseli skaitļi a,b,c. Pierādīt, ka nevar gadīties tā, ka $P(a)=b, P(b)=c, P(c)=a$.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$. Tad no Bezū lemmas izriet, ka

$$a - b \mid P(a) - P(b) = b - c$$
$$b - c \mid P(b) - P(c) = c - a$$
$$c - a \mid P(c) - P(a) = a - b$$

Tas nozīmē, ka eksistē veseli skaitļi x, y, z ar īpašību, ka $(a - b)x = (b - c)$ un $(b - c)y = (c - a)$ un $(c - a)z = (a - b)$. Sareizinot šos trīs vienādojumus, iegūsim, ka $(a - b)(b - c)(c - a)xyz = (a - b)(b - c)(c - a)$, kas nozīmē, ka $xyz = 1$. Tas nozīmē, ka, nezaudējot vispārīgumu, $x = y = z = 1$ vai $x = 1$ un $y = z = -1$. Aplūkosim pirmo gadījumu

$$\begin{cases} a - b = b - c \\ b - c = c - a \\ c - a = a - b \end{cases} \implies \begin{cases} a + c = 2b \\ b + a = 2c \\ c + b = 2a \end{cases} \implies a = b = c$$

kas ir pretruna ar to, ka a, b, c ir dažādi. Savukārt otrajā gadījumā iegūsim, ka $b - a = b - c$ un $c - b = c - a$, kas nozīmē, ka $a = c$ un $a = b$, kas atkal ir pretrunā to, ka skaitļi a, b, c ir dažādi.

10. piemērs. Dots polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem un vesels skaitlis $n \geq 3$. Pierādīt, ka katram reālam x, kuram izpildās $\underbrace{P(P(\cdots P(x)\cdots))}_{n \text{ reizes}} = x$, arī izpildās $P(P(x)) = x$.

Atrisinājums. Ieviesīsim virkni $x_0, x_1, x_2, \cdots$ ar īpašību, ka $x_0 = x$ un $x_k = P(x_{k-1})$ katram naturālam k. Apzīmēsim $x_{i+1} - x_i$ ar d_i. Tad no Bezū teorēmas seko, ka

$$d_i = x_{i+1} - x_i \mid P(x_{i+1}) - P(x_i) = x_{i+2} - x_{i+1} = d_{i+1}$$

visiem $i \geq 0$, līdz ar ko $|d_0| \leq |d_1| \leq \cdots \leq |d_n|$. Taču pēc uzdevuma nosacījuma $x_n = x_0$, kas nozīmē, ka $d_0 = d_n$, kas kopā ar iepriekšējo faktu dod $|d_0| = |d_1| = \cdots = |d_n|$.

Apskatīsim visus iespējamos gadījumus:

- Ja $d_0 = d_1 \neq 0$, tad $x_0 \neq x_1$ un $x_0 \neq x_2$. No tā seko, ka $d_2 = d_1 = d_0$, jo citādi $d_2 = -d_1$ jeb $x_1 = x_3 \neq x_0$, kas nozīmē, ka visiem $k \geq 2$ izpildās $x_k = x_1 \neq x_0$ vai $x_k = x_2 \neq x_0$, kas ir pretruna ar to, ka $x_n = x_0$. Analoģiski spriežot mēs varam pierādīt, ka $d_3 = d_0, d_4 = d_0$ un tā tālāk līdz $d_{n-1} = d_0$. Līdz ar to $x_n = x_0 + d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1} = x_0 + nd_0 \neq x_0$, kas ir pretruna.
- Ja $d_0 = -d_1$, tad $x_2 = x_0$ jeb $P(P(x)) = x$, kas bija jāpierāda.

11. piemērs. Dots polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem ar īpašību, ka

$$P(1) = 1, P(2) = 8, P(3) = 27, P(5) = 125, P(6) = 216, P(7) = 343$$

Kāda ir izteiksmes $|P(4)|$ mazākā iespējama vērtība?

Atrisinājums. Tā kā skaitļi 1,2,3,5,6,7 ir polinoma $P(x) - x^3$ saknes, tad

$$P(x) - x^3 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 5)(x - 6)(x - 7)Q(x)$$

kur $Q(x)$ ir kaut kāds polinoms ar veseliem koeficientiem. Līdz ar to

$$P(x) = x^3 + (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 5)(x - 6)(x - 7)Q(x)$$

Aizvietosim x ar 4. Dabūsim, ka

$$P(4) = 4^3 + (4-1)(4-2)(4-3)(4-5)(4-6)(4-7)Q(4)$$
$$P(4) = 64 - 36Q(4)$$

Apzīmēsim $Q(4)$ ar t. Ievērojam, ka t ir vesels skaitlis, jo $Q(x)$ ir polinoms ar veseliem koeficientiem. Līdz ar to, visas iespējamas izteiksmes $|P(4)|$ ir formā $|64-36t|$. Ievērojām, ka $|64-36t| \geq 28$ visiem $t \leq 1$ un $|64-36t| \geq 44$ visiem $t \geq 3$. Taču ja $t = 2$, tad $|64-36t| = 8$. Tādējādi secinām, ka izteiksmes $|P(4)|$ mazākā iespējama vērtība ir 8.

12. piemērs. Dots naturāls skaitlis n un polinoms $P(x)$ ar reāliem koeficientiem ar īpašību, ka $\deg P(x) = n$ un

$$P(k) = \frac{k}{k+1}$$

visiem $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Atrodiet izteiksmes $P(n+1)$ vērtību.

Atrisinājums. Definēsim polinomu $Q(x) = (x+1)P(x) - x$. Tad $\deg Q(x) = n+1$ un skaitļi $0, 1, 2, \ldots, n$ ir polinoma $Q(x)$ saknes. Līdz ar to

$$Q(x) = cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

kādam reālai konstantei c. Ievērojām arī, ka $Q(-1) = (-1+1)P(-1) - (-1) = 1$ jeb

$$c(-1)(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-n) = 1$$

kas nozīmē, ka

$$c = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Tātad $Q(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$. Ievietojot x vietā $n+1$ sanāks, ka

$$Q(n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n+1)(n+1-1)(n+1-2)\cdots(n+1-n)$$

$$Q(n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n+1)! = (-1)^{n+1}$$

Pēc polinoma $Q(x)$ definīcijas, mēs zinām, ka

$$(n+1+1)P(n+1) - (n+1) = (-1)^{n+1}$$
$$(n+2)P(n+1) = (-1)^{n+1} + n + 1$$
$$P(n+1) = \frac{(-1)^{n+1} + n + 1}{n+2}$$

kas nozīmē, ka $P(n+1) = \frac{n}{n+2}$ ja n ir pāra, un $P(n+1) = 1$ ja n ir nepāra.

13. piemērs. Dots polinoms $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ ar reāliem koeficientiem un veseli skaitli $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$. Pierādīt, ka kaut viens no skaitļiem $|P(x_0)|, |P(x_1)|, \ldots, |P(x_n)|$ ir vismaz $\frac{n!}{2^n}$.

Atrisinājums. Tā kā $\deg P(x) = n$, tad izmantojot skaitļus $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mēs varam izteikt $P(x)$ izmantojot Lagranža interpolāciju. Tātad

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \cdot \frac{f_i(x)}{f_i(x_i)},$$

kur $f_i(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_{n+1})$. Ievērojam, ka abās pusēs koeficientiem pie attiecīgajām pakāpēm jābūt vienādām. Apskatīsim koeficientus pie x^n:

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{P(x_i)}{f_i(x_i)}$$

jo koeficients pie x^n polinomam $f_i(x)$ ir 1. Tā kā $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ir dilstoša veselu skaitļu virkne, tad

$$|f_i(x_i)| = |x - x_1| \cdots |x - x_{i-1}| \cdot |x - x_{i+1}| \cdots |x - x_{n+1}| \geq i!(n-i)! = \frac{n!}{C_n^i}$$

Pieņemsim, ka $|P(x_k)|$ ir lielākais no $|P(x_0)|, |P(x_1)|, \ldots, |P(x_n)|$ kādam $0 \leq k \leq n$. Izmantojot iegūto rezultātu, var secināt, ka

$$1 \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{|P(x_i)|}{|f_i(x_i)|} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{|P(x_k)|}{\left|\frac{n!}{C_n^i}\right|} = \frac{|P(x_k)|}{n!} \sum_{i=0}^{n} C_n^i = |P(x_k)| \cdot \frac{2^n}{n!}$$

līdz ar ko $|P(x_k)| \geq \frac{n!}{2^n}$.