1.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums Dots, ka b un c ir naturāli skaitļi un kvadrātvienādojuma $x^2 - bx + c = 0$ reālās saknes ir x_1 un x_2. Pierādīt, ka a) $x_1^2 + x_2^2 + 2017$; b) $x_1^3 + x_2^3$ ir naturāls skaitlis.

Atrisinājums. No Vjeta teorēmas izriet, ka $x_1 + x_2 = b$ un $x_1 x_2 = c$. Tātad gan sakņu summa, gan sakņu reizinājums ir naturāls skaitlis un abas saknes ir pozitīvas.

- a) Pārveidojam doto izteiksmi:

  $$x_1^2 + x_2^2 + 2017 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2017 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2017 = b^2 - 2c + 2017$$

  Tā kā naturāla skaitļa kvadrāts ir naturāls skaitlis un naturālu skaitļu summa vai starpība ir vesels skaitlis, tad $b^2 - 2c + 2017$ ir vesels skaitlis, līdz ar to $x_1^2 + x_2^2 + 2017$ arī ir vesels skaitlis. Ņemot vērā, ka $x_1^2 + x_2^2 + 2017 > 0$, secinām, ka $x_1^2 + x_2^2 + 2017$ ir naturāls skaitlis.

- b) Pārveidojam doto izteiksmi:

  $$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = b(b^2 - 2c) - cx_1x_2(x_2 + x_1) = b(b^2 - 2c) - cb = b^3 - 3bc$$

  Tā kā naturāla skaitļa kubs ir naturāls skaitlis un naturālu skaitļu starpība ir vesels skaitlis. Tā kā $x_1^3 + x_2^3 > 0$, tad $x_1^3 + x_2^3$ ir naturāls skaitlis.

2.uzdevums Doti moniski trešās pakāpes polinomi $P(x), Q(x)$ ar īpašību, ka vienādojumiem $P(x) = 0, Q(x) = 0$ un $P(x) = Q(x)$ kopā ir 8 dažādas saknes. Pierādīt, ka abas - mazākā un lielākā no tām - saknes nevar būt vienlaikus polinoma $P(x)$ saknes.

Piezīme: monisks polinoms ir polinoms, kuram koeficient pie augstākas pakāpes ir vienāds ar 1.

Atrisinājums. Ievērojam, ka $\deg(P(x) - Q(x)) \leq 2$, jo tā kā abiem polinomiem koeficients pie x^3 ir vienāds ar 1, tad atņemot tos, šīs koeficients saīsināsies. Ņemot vērā to, ka kopā ir jābūt 8 dažādām saknēm, tad abiem polinomiem $P(x)$ un $Q(x)$ ir tieši trīs dažādas saknes, un polinomam $P(x) - Q(x)$ ir tieši divas dažādas saknes. Līdz ar to mēs vāram pārrakstīt šos polinomus sekojoši:

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$$
$$Q(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$$
$$P(x) - Q(x) = d(x - c_1)(x - c_2)$$

No tā seko, ka

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) - (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) = d(x - c_1)(x - c_2)$$

Pieņemsim, ka saknes a_1 un a_2 ir attiecīgi lielāka un mazāka no visām saknēs. Aizvietosim iegūtajā sakarībā x ar a_1. Tad

$$-\underbrace{(a_1 - b_1)}_{>0}\underbrace{(a_1 - b_2)}_{>0}\underbrace{(a_1 - b_3)}_{>0} = d\underbrace{(a_1 - c_1)}_{>0}\underbrace{(a_1 - c_2)}_{>0}$$

no kā var secināt, ka skaitlis d ir negatīvs. Tagad aizvietosim iegūtajā sakarībā x ar a_2. Tad

$$-\underbrace{(a_2 - b_1)}_{<0}\underbrace{(a_2 - b_2)}_{<0}\underbrace{(a_2 - b_3)}_{<0} = d\underbrace{(a_2 - c_1)}_{<0}\underbrace{(a_2 - c_2)}_{<0}$$

no kā var secināt, ka skaitlis d ir pozitīvs, ka ir pretruna. Līdz ar to, abas - mazākā un lielākā no tām - saknes nevar būt vienlaikus polinoma $P(x)$ saknes. Prasītais ir pierādīts.

3.uzdevums Dots polinoms $P(x)$ ar pakāpi $n > 1$ un reāliem koeficientiem. Pieņemsim, ka vienādojumam $P(P(P(x))) = P(x)$ ir n^3 dažādas reālas saknes. Pierādīt, ka šīs saknes var sadalīt divās grupās ar vienādu aritmētisko vidējo.

Atrisinājums. Definēsim polinomus $Q(x) = P(P(P(x))) - P(x)$ un $R(x) = P(P(x)) - x$. Ņemam vērā, ka visas polinoma $R(x)$ saknes arī ir polinoma $Q(x)$ saknes. Pieņemsim, ka reāli skaitļi $r_1, r_2, \ldots, r_{n^3}$ ir polinoma $Q(x)$ saknes un $r_1, r_2, \ldots, r_{n^2}$ ir polinoma $R(x)$ saknes. Pieņemsim, ka $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, pie tām $a_n \neq 0$.

Veicot kompozīcijas darbības, iegūstam ka

$$\begin{aligned} R(x) &= \\ &= P(P(x)) - x = \\ &= a_n(a_n x^n)^n + a_n(n(a_n x^n)^{n-1}(a_{n-1}x^{n-1})) + A(x) = \\ &= a_n^{n+1} x^{n^2} + n a_n^n a_{n-1} x^{n^2-1} + A(x) \end{aligned}$$

kur $A(x)$ ir polinoms ar $\deg(A(x)) \leq n^2 - 2$. No Vjeta teorēmas mēs varam dabūt, ka

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{n^2} = \frac{-n a_n^n a_{n-1}}{a_n^{n+1}} = \frac{-n a_{n-1}}{a_n}$$

Analoģiski mums ir

$$\begin{aligned} Q(x) &= \\ &= P(P(P(x))) - P(x) = \\ &= a_n(a_n(a_n x^n)^n)^n + a_n(n(a_n^{n+1} x^{n^2})^{n-1}(n a_n^n a_{n-1} x^{n^2-1})) + B(x) = \\ &= a_n^{n^2+n+1} x^{n^3} + n^2 a_n^{n^2+n} a_{n-1} x^{n^3-1} + B(x) \end{aligned}$$

kur $B(x)$ ir polinoms ar $\deg(B(x)) \leq n^3 - 2$. Analoģiski no Vjeta teorēmas mēs varam dabūt, ka

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{n^3} = \frac{-n^2 a_n^{n^2+n} a_{n-1}}{a_n^{n^2+n+1}} = \frac{-n^2 a_{n-1}}{a_n}$$

Kopā ar iepriekšējo rezultātu tas dod

$$r_{n^2+1} + r_{n^2+2} + \ldots + r_{n^3} = \frac{-n^2 a_{n-1}}{a_n} - \frac{-n a_{n-1}}{a_n} = \frac{-(n^2 - n) a_{n-1}}{a_n}$$

Beidzot, pamanīsim, ka

$$\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{n^2}}{n^2} = \frac{-a_{n-1}}{n a_n} = \frac{r_{n^2+1} + \ldots + r_{n^3}}{n^3 - n^2}$$

kas nozīmē, ka grupas $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ un $(r_{n^2+1}, r_{n^2+2}, \ldots, r_{n^3})$ apmierina uzdevumā doto nosacījumu. Ievērojam, ka mēs vienmēr varam iegūt šīs grupas, līdz ar ko prasītais ir pierādīts.

4.uzdevums Sākuma datora atmiņā ir tikai polinoms $P(x) = x^2 - 1$. Katru sekundi dators vai nu izvēlas vienu patvaļīgu polinomu no savas atmiņas $Q(x)$ un saglabā savā atmiņā polinomus $Q(x^2 - 1)$ un $Q(x)^2 - 1$, vai nu izvēlas divus patvaļīgus polinomus no savas atmiņas $R(x)$ un $S(x)$, un saglabā savā atmiņā polinomu $\frac{R(x)+S(x)}{2}$. Neviens polinoms nepazūd no atmiņas. Vai var gadīties tā, ka pēc kāda laika datora atmiņā būs polinoms $T(x) = \frac{(x^2-1)^{2048}}{1024} - 1$?

Atrisinājums. Definēsim skaitļi $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, kas ir vienādojuma $u^2 - 1 = u$ sakne, un pierādīsim sekojošu apgalvojumu.

Apgalvojums. Visiem polinomiem, kas atrodas datora atmiņā izpildās $f(u) = u$.
Pierādījums. Tā kā $P(u) = u^2 - 1 = u$, tad pašā sākumā mūsu apgalvojums izpildās. Tagad apskatīsim divus gadījumus:

- Ja dators izvēlas vienu patvaļīgu polinomu no savas atmiņas $Q(x)$ ar īpašību, ka $Q(u) = u$, un saglabā savā atmiņā polinomus $Q(x^2 - 1)$ un $Q(x)^2 - 1$, tad ir viegli pamanīt, ka

$$Q(u^2 - 1) = Q(u) = u \quad \text{un} \quad Q(u)^2 - 1 = u^2 - 1 = u$$

  kas nozīmē, ka jauniem polinomiem arī izpildās mūsu apgalvojums.

- Ja dators izvēlas divus patvaļīgus polinomus no savas atmiņas $R(x)$ un $S(x)$ar īpašību, ka $R(u) = S(u) = u$, un saglabā savā atmiņā polinomu $\frac{R(x)+S(x)}{2}$, tad ir viegli pamanīt, ka

$$\frac{R(u) + S(u)}{2} = \frac{u + u}{2} = u$$

  kas nozīmē, ka jaunam polinomam arī izpildās mūsu apgalvojums.

Apkopojot iegūtos rezultātus, var secināt, ka datora atmiņā var parādīties tikai tie polinomi, kuriem izpildās dotā īpašība, līdz ar to mēs esam pierādījuši vēlamo apgalvojumu.

Tādējādi, ja polinoms $T(x)$ var parādīties datora atmiņā, tad jāizpildās $T(u) = \frac{(u^2-1)^{2048}}{1024} - 1 = u$ jeb $u^{2048} = 1024(u + 1)$, taču

$$u^{2048} > 2^{1024} > 2^{12} = 1024(3 + 1) > 1024(u + 1)$$

kas ir pretruna. Līdz ar to mēs secinām, ka polinoms $T(x)$ nevar parādīties datora atmiņā.

2.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums Dots polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem un trīs dažādi veseli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka $|P(a)| = |P(b)| = |P(c)| = 1$. Pierādīt, ka šīm polinomam nav veselo sakņu.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo jeb ka eksistē vesels skaitlis d ar īpašību, ka $P(d) = 0$. No Bezū lemmas izriet, ka

$$\begin{gathered} d - a \mid 1 \\ d - b \mid 1 \\ d - c \mid 1 \end{gathered}$$

Tā kā skaitļi a, b, c ir dažādi, tad arī skaitļi $d - a, d - b, d - c$ ir dažādi un visi trīs skaitļi dala vieninieku, taču veselo skaitļu skaits, kas dala vieninieku ir divi, kas ir 1 un -1. Pretruna.

2.uzdevums Dots polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem, kuram ir 100 dažādas veselas saknes un divi pirmskaitļi p un q. Ne-konstantes polinoms $Q(x)$ ar veseliem koeficientiem dala polinomu $P(x)+pq$. Pierādīt, ka $\deg Q(x) \geq 13$.

Atrisinājums. Pieņemsim ka skaitļi $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ ir polinoma $P(x)$ dažādas saknes. Tā kā $Q(x)$ dala $P(x)+pq$, tad eksistē tāds polinoms $R(x)$, ka $P(x)+pq = Q(x)R(x)$ visiem reāliem x. Līdz ar to mums jāizpildās

$$Q(a_i)R(a_i) = pq$$

visiem $1 \leq i \leq 100$. No tā seko, ka $Q(a_i) \in \{\pm 1, \pm p, \pm q, \pm pq\}$ jeb pie katra a_1 polinoms $Q(a_i)$ pieņem kādu no šīm 8 vērtībām.

No Dirihlē principa izriet, ka $Q(x)$ pieņiem kaut kādu vienu un to pašu vērtību vismaz $\left\lceil \frac{100}{8} \right\rceil = 13$ reizes. Kopā ar faktu, ka $Q(x)$ ir ne-konstantes polinoms, tas nozīmē, kas $\deg Q(x) \geq 13$, kas bija jāpierāda.

3.uzdevums Pierādīt, ka neeksistē dažādi polinomi $P(x)$ un $Q(x)$ ar vismaz vienu sakni, kuriem

$$P(1 + x + Q(x)^2) = Q(1 + x + P(x)^2)$$

izpildās visiem reāliem x.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka p un q ir attiecīgi polinomu $P(x)$ un $Q(x)$ saknes. Ievērojam, ka

$$P(p)^2 - Q(p)^2 = -Q(p)^2 \leq 0 \leq P(q)^2 = P(q)^2 - Q(q)^2,$$

kas nozīmē, ka eksistē tāds skaitlis a, kuram $P(a)^2 - Q(a)^2 = 0$. Aizvietosim x ar a sākuma vienādojumā. Dabūjam, ka

$$P(b) = Q(b)$$

kur $b = 1 + a + P(a)^2$. Tā kā polinomi $P(x)$ un $Q(x)$ ir dažādi, tad vienādojumam $P(x) = Q(x)$ ir galīgs sakņu skaits. Apzīmēsim ar m lielāko vienādojuma $P(x) = Q(x)$ sakni. Aizvietosim x ar m sākuma vienādojumā. Dabūjam, ka

$$P(1 + m + Q(m)^2) = Q(1 + m + P(m)^2)$$

Taču $1 + m + Q(m)^2 = 1 + m + P(m)^2 > m$, kas ir pretruna ar to, ka m ir lielākā vienādojuma $P(x) = Q(x)$ sakne. Līdz ar to tādu polinomu neeksistē, kas bija jāpierāda.

4.uzdevums Dots polinoms $P(x)$ ar reāliem koeficientiem ar pakāpi n un ar īpašību, ka $|P(x)| \leq 1$ visiem $x \in [0,1]$. Pierādīt, ka

$$|P(-\tfrac{1}{n})| \leq 2^{n+1} - 1$$

Atrisinājums. Definēsim sekojošo virkni: $x_i = \frac{i}{n}$ visiem $0 \leq i \leq n$. Tad no uzdevuma dota nosacījuma seko, ka

$$|P(x_i)| \leq 1$$

visiem $0 \leq i \leq n$. Tagad visiem $0 \leq i \leq n$ definēsim

$$\begin{aligned} f_i(x) &= (x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n) = \\ &= (x - \tfrac{0}{n}) \cdots (x - \tfrac{i-1}{n})(x - \tfrac{i+1}{n}) \cdots (x - \tfrac{n}{n}) = \\ &= \frac{1}{n^n} nx(nx-1) \cdots (nx - i + 1)(nx - i - 1) \cdots (nx - n) \end{aligned}$$

Pamanīsim, ka tad mums ir

$$\begin{aligned} f_i(x_i) = f_i(\tfrac{i}{n}) &= \frac{1}{n^{n+1}} i(i-1) \cdots (i - i + 1)(i - i - 1) \cdots (i - n) = \\ &= \frac{1}{n^n} \cdot (-1)^{n-i} \cdot i! \cdot (n-i)! \end{aligned}$$

kā arī

$$\begin{aligned} f_i(-\tfrac{1}{n}) &= \frac{1}{n^{n+1}}(-1)(-1-1) \cdots (-1 - i + 1)(-1 - i - 1) \cdots (-1 - n) = \\ &= \frac{1}{n^n} \cdot (-1)^n \cdot \frac{(n+1)!}{i+1} \end{aligned}$$

Izmantojot Lagranža interpolāciju mēs varam iegūt, ka

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(P(x_i) \cdot \frac{f_i(x)}{f_i(x_i)} \right)$$

Tagad ievietojot x vietā skaitli $-\frac{1}{n}$ un paņemot no abām pusēm moduli, mēs dabūjam

$$\begin{aligned} |P(-\tfrac{1}{n})| &= \left| \sum_{i=0}^{n} \left(P(x_i) \cdot \frac{\frac{1}{n^n} \cdot (-1)^n \cdot \frac{(n+1)!}{i+1}}{\frac{1}{n^n} \cdot (-1)^{n-i} \cdot i! \cdot (n-i)!} \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} \left(|P(x_i)| \cdot \left| \frac{(-1)^n \cdot \frac{(n+1)!}{i+1}}{(-1)^{n-i} \cdot i! \cdot (n-i)!} \right| \right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{(n+1)!}{(i+1)! \cdot (n-i)!} \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(C_{n+1}^{i+1} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \left(C_{n+1}^{i} \right) - C_{n+1}^{0} = 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

kur mēs izmantojam to, ka $|P(x_i)| \leq 1$ visiem $0 \leq i \leq n$ un ka $|x + y| \leq |x| + |y|$ visiem reāliem skaitļiem x un y.