Leņķi – papildinājums

Alfrēds Saročinskis, Kims Georgs Pavlovs

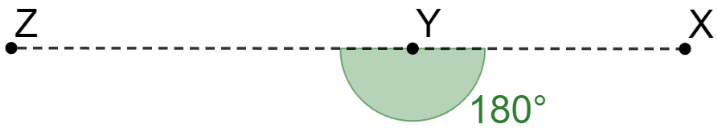
1 Ievads

Šis materiāls ir papildinājums pagājušā gada materiālam par leņķiem un ietver divas jaunas apakštēmas – riņķa līniju pieskaršanos un izogonāles. Līdz ar to lasītājam, kurš nav pazīstams ar leņķu pamatkonceptiem, ir jāsāk ar pagājušā gada materiāla rūpīgu caurskatīšanu. Mājasdarbā būs uzdevumi gan par šī gada, gan par pagājušā gada materiālos aplūkotajām tēmām.

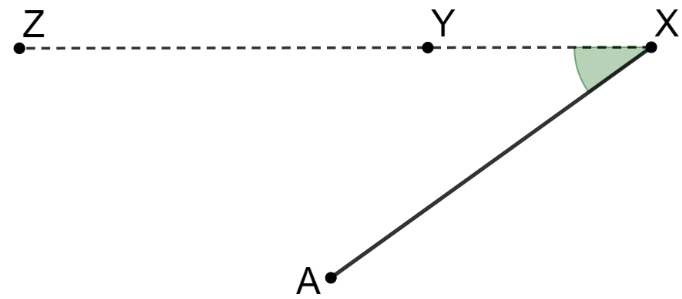
2 Trīs punkti uz vienas taisnes

Bieži kādos uzdevumos ir jāpierāda, ka trīs punkti atrodas uz vienas taisnes. Pieņemsim, ka mēs gribam pierādīt, ka punkti X, Y, Z atrodas uz vienas taisnes tieši šāda secībā. Ir divi populāri veidi kā to var izdarīt:

- pierādīt, ka $\angle XYZ = 180°$;



- kādam citam patvaļīgam punktam A pierādīt, ka $\angle AXY = \angle AXZ$.



Abi veidi ir diezgan efektīvi, taču izmantojot tos vienmēr ir jābūt ļoti uzmanīgam, lai visā spriedumu gaitā nejauši neizmantot to, ka punkti X, Y, Z atrodas uz vienas taisnes. Šādos gadījumos bieži var palīdzēt atsevišķi uzzīmēt zīmējuma daļu tā, lai punkti X, Y, Z nebūtu kolineāri, kas ļaus nejauši nepieņemt faktus, kas vēl nav pierādīti.

3 Riņķa līniju pieskaršanās

3.1 Teorija

Kaut kādos uzdevumos ir jāpierāda, ka divas riņķa līnijas pieskaras. Ir divi acīmredzami veidi, kā varētu mēģināt šādus uzdevumus risināt:

- pierādīt, ka abu riņķa līniju centri un divu riņķa līniju kopīgais punkts atrodas uz vienas taisnes;
- pierādīt, ka, ja novelk pieskari vienai no riņķa līnijām abu riņķa līniju kopīgajā punktā, tad novilktā taisne ir arī pieskare otrai riņķa līnijai.

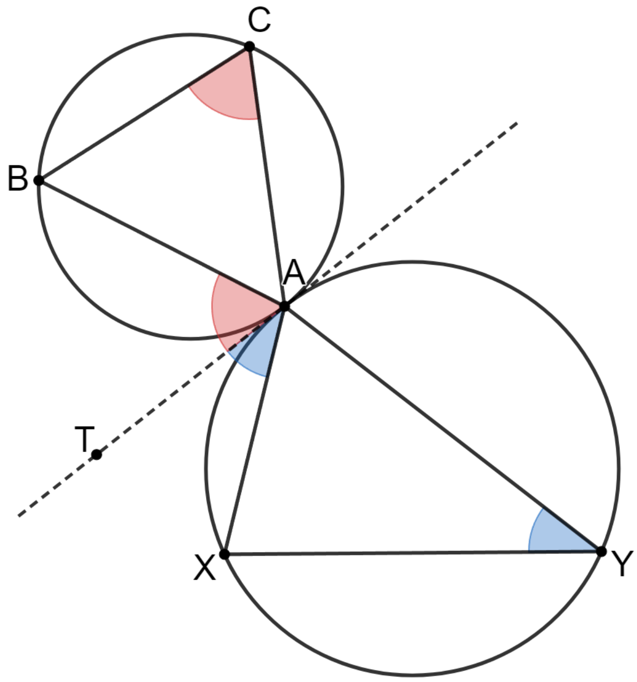
Pirmais veids nav tik populārs un efektīvs kā otrais veids, bet tas nenozīmē, ka to vajag pilnībā izslēgt, kad apsver, kā varētu pierādīt prasīto. Visos uzdevumos šajā materiālā mēs diemžēl izmantosim tikai otro veidu. Ievērosim sekojošas lietas

- ja uzdevumā prasīts pierādīt, ka trijstūru AXY un ABC apvilktās riņķa līnijas pieskaras, tad mēs vilksim pieskari trijstūra AXY apvilktai riņķa līnijai punktā A un mēģināsim pierādīt, ka iegūtā taisne ir pieskare arī trijstūra ABC apvilktai riņķa līnijai

- ja uzdevumā prasīts pierādīt, ka trijstūra XYZ un ABC apvilktās riņķa līnijas pieskaras, tad vispirms mums ir jāatrod un ir jāpierāda, ka šīm divām riņķa līnijām ir kopīgs punkts. Šis kopīgais punkts visticamāk tiks definēts neatkarīgi no abām riņķa līnijām jeb, citiem vārdiem sakot, tas būs dotās uzdevuma konfigurācijas *īpašais/svarīgais/maģiskais* punkts, kas ir jādefinē. Tālāk ir jāpierāda, ka trijstūra XYZ un ABC apvilktās riņķa līnija iet caur šo punktu un pēc tam var pierādīt prasīto, novelkot pieskari vienai no riņķa līnijām kopīgajā punktā un pierādot, ka tā ir pieskare arī otrai riņķa līnijai.

Lemma, ko aplūkosim tālāk būtība ir saīsinājums (modernāk gan būtu teikt *shortcut*) argumentam, kā var pierādīt, ja ir pieskare vienai riņķa līnijai, tad ir pieskare arī otrai riņķa līnijai.

Lemma. Doti divi trijstūri AXY un ABC. Ja $\angle BAX = \angle BCA + \angle AYX$, tad trijstūru AXY un ABC apvilktās riņķa līnijas pieskaras.



Pierādījums. Novilksim pieskari ℓ trijstūra ABC apvilktai riņķa līnijai un uz tās atliksim punktu T kā parādīts zīmējums. No pieskares īpašības izriet, ka $\angle TAB = \angle BCA$. Ievērosim, ka

$$\angle TAX = \angle XAB - \angle TAB = \angle BCA + \angle AYX - \angle BCA = \angle AYX$$

No apgrieztās pieskares īpašības izriet, ka ℓ ir trijstūra AXY apvilktās riņķa līnijas pieskare. Tas nozīmē, ka abas riņķa līnijas pieskaras punktā A, kas arī bija jāpierāda. Ir vērts atzīmēt, ka

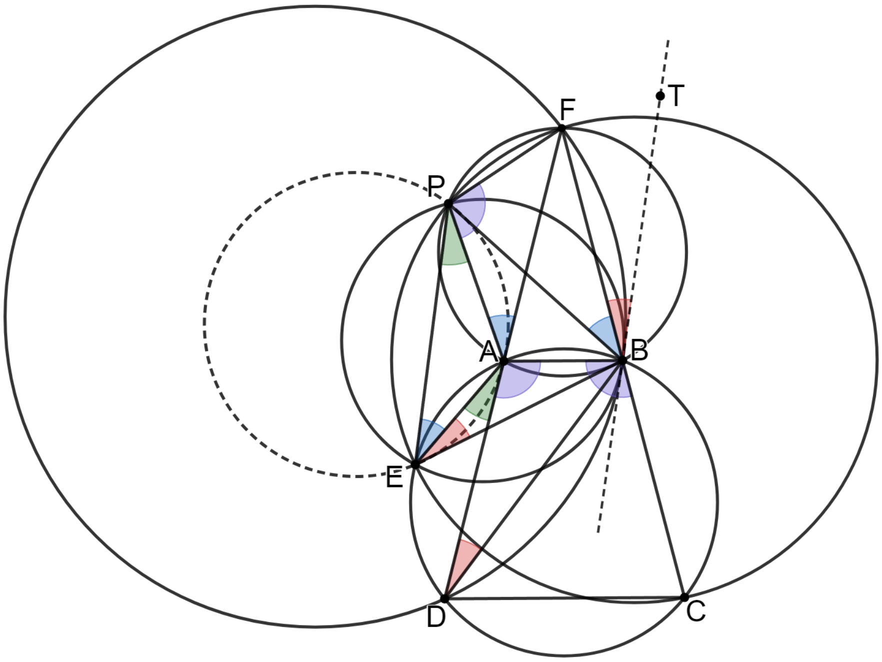
- lemma strādā arī otrā virzienā, ja trijstūru AXY un ABC apvilktās riņķa līnijas pieskaras, tad $\angle BAX = \angle BCA + \angle AYX$

- alternatīvi lemma strādā arī, ja pierāda, ka $\angle CAY = \angle CBA + \angle AXY$.

Zinot lemmu, risinājums reducējas uz "*ja es pierādu, ka šis leņķis ir to divu leņķu summa, tad uzdevums ir atrisināts*", bet tikpat labi var vienkārši *pa stulbo* pierādīt, ka, ja mums ir pieskare vienai riņķa līnijai, tad tā ir arī pieskare otrai riņķa līnijai. Konceptuāli zināt lemmu nav tik svarīgi – tas ir tikai neliels *shortcut*.

3.2 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs Punkti A, B, C, D un E atrodas uz vienas riņķa līnijas ar īpašību, ka $AD = BC$. Taisnes AD un BC krustojas punktā F. Trijstūru CEF un ABF apvilktās riņķa līnijas krustojas punktā P. Pierādīt, ka trijstūru BDF un BEP apvilktās riņķa līnijas pieskaras.



Atrisinājums. Vispirms pierādīsim sekojošu apgalvojumu.

Apgalvojums. Taisne FD ir trijstūra PAE apvilktās riņķa līnijas pieskare.
Pierādījums Pierādīsim, ka $\angle EAD = \angle APE$, kas pierādīs prasīto. Apzīmējam $\angle BAE = \alpha$ un $\angle BAD = \beta$. Ievērosim, ka tā kā AD un BC, tad $ABCD$ vienādsānu trapece no kurienes izriet, ka $\angle BAD = \angle ABC = \angle FPA$, kur mēs vēl papildus izmantojām to, ka ap četrstūri $FPAB$ var apvilkt riņķa līniju. Taču $\angle BCE = \angle FCE = 180° - \alpha$, jo ap četrstūri $ABCE$ var apvilkt riņķa līniju, tāpēc $\angle FPE = \alpha$, jo ap četrstūri $FPEC$ var apvilkt riņķa līniju. Secinām, ka

$$\angle APE = \angle FPE - \angle FPA = \alpha - \beta = \angle BAE - \angle BAD = \angle DAE,$$

ko mēs arī gribējām pierādīt.

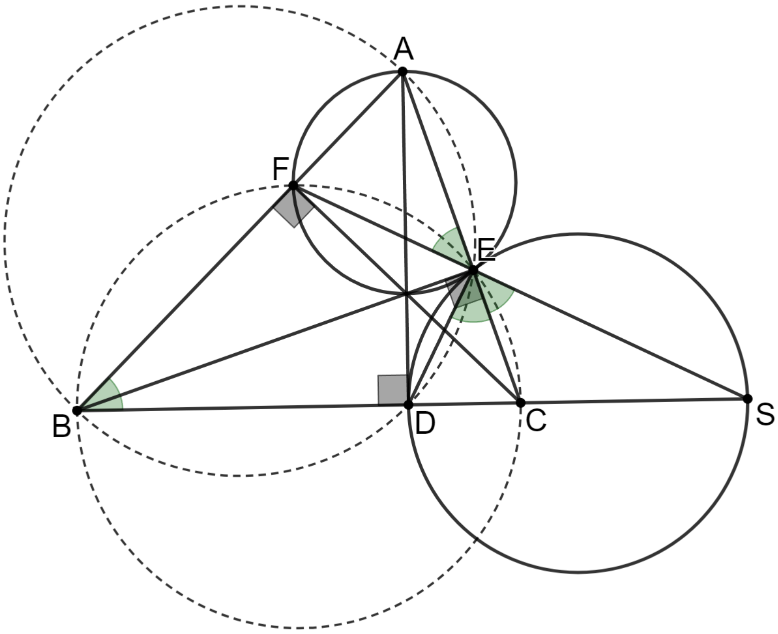
Pieņemsim, ka taisne ℓ ir trijstūra BDF apvilktās riņķa līnijas pieskare punktā B un uz tās atliksim punktu T kā attēlots zīmējumā. Ievērosim, ka $\angle TBF = \angle BDF = x$. Apzīmēsim $\angle PBF = y$. Ja mēs pierādīsim, ka $\angle TBP = \angle BEP$, tad taisne ℓ ir trijstūra BEP apvilktās riņķa līnijas pieskare, kas nozīmē, ka šīs abas riņķa līnijas pieskaras.

Ievērosim, ka $\angle BDF = \angle BDA = \angle BEA = x$ un $\angle FBP = \angle FAP = \angle AEP = y$, kur mēs izmantojām to, ka FD ir trijstūra PAE apvilktās riņķa līnijas pieskare. Secinām, ka

$$\angle BEP = \angle BEA + \angle AEP = x + y = \angle TBF + \angle PBF = \angle TBP,$$

kas arī bija jāpierāda.

2.piemērs Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kuram $AB > AC$. Punkti D, E, F ir augstumi pamati, kas vilkti attiecīgi no virsotnēm A, B, C. Punkts S ir taišņu EF un BC krustpunkts. Pierādīt, ka trijstūru AEF un DES apvilktās riņķa līnijas pieskaras.



Atrisinājums. No lemmas izriet, ka mums pietiek pierādīt, ka $\angle DEF = \angle BAC + \angle ESD$. Izteiksim šos trīs leņķus ar $\angle A, \angle B, \angle C$.

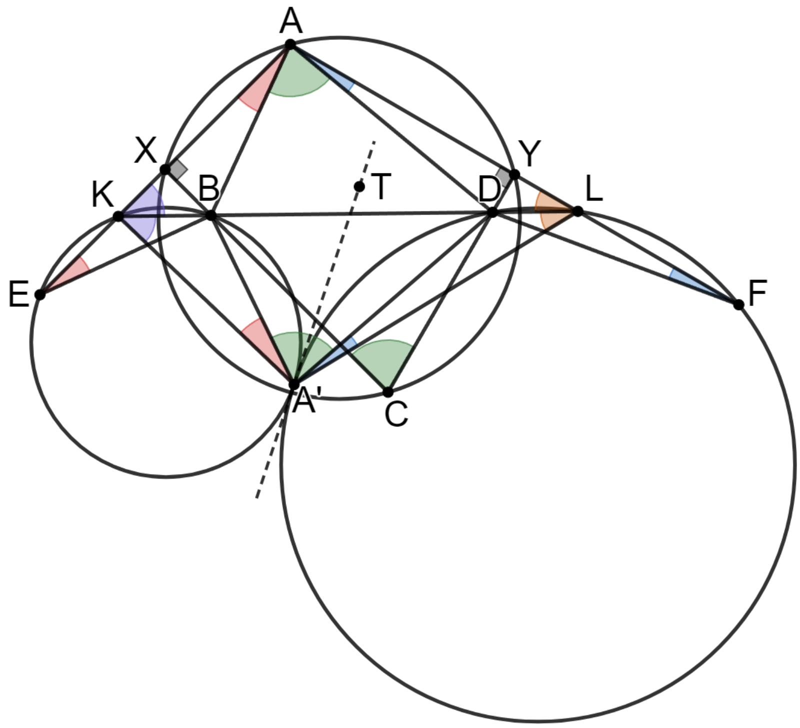
- No trijstūra ECS ārējā leņķa īpašības izriet, ka $\angle C = \angle CES + \angle ESD$, kas nozīmē, ka $\angle ESD = \angle C - \angle CES = \angle C - \angle AEF$. Ievērosim, ka ap četrstūri $BCEF$ var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle BEC = \angle BFC = 90°$, tāpēc $\angle AEF = \angle ABC = \angle B$. Līdz ar to secinām, ka $\angle ESD = \angle C - \angle B$;
- Pēc definīcija $\angle BAC = \angle A$;
- Ievērosim, ka $\angle DEF = 180° - \angle DEC - \angle AEF$. Esam ieguvuši, ka $\angle AEF = \angle B$. Piedevām ap četrstūri $ABDE$ var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle AEB = \angle ADB = 90°$, tāpēc $\angle DEC = \angle ABD = \angle B$. Secinām, ka $\angle DEF = 180° - 2\angle B$.

Līdz ar mums pietiek pārliecināties, ka

$$\angle DEF = \angle BAC + \angle ESD$$
$$180° - 2\angle B = \angle A + \angle C - \angle B$$
$$180° = \angle A + \angle C + \angle B$$

Pēdējā vienādība ir patiesa no trijstūra ABC leņķu summas.

3.piemērs Dots izliekts četrstūris $ABCD$, kuram $\angle ABC > 90^\circ$, $\angle CDA > 90^\circ$ un $\angle DAB = \angle BCD$. Punkti E un F ir attiecīgi punkta A attēlojumi pāri BC un CD. Taisnes AE un AF krusto attiecīgi taisni BD punktos K un L. Pierādīt, ka trijstūra BEK un DFL apvilktās riņķa līnijas pieskaras.



Atrisinājums. Ar A' apzīmēsim punkta A attēlojumu pāri BD. Vispirms pierādīsim, ka A' atrodas uz $\odot(BKE)$ un $\odot(DFL)$. Tā kā BD ir AA' vidusperpendikuls, no simetrijas secinām, ka $\angle DA'L = \angle LAD$. Dots arī, ka punkti A un F ir simetriski pret taisni CD, tādēļ no simetrijas $\angle LAD = \angle DFL$. Tātad $\angle DA'L = \angle DFL$, kas nozīmē, ka A' atrodas uz vienas riņķa līnijas ar punktiem D, F, L. Analoģiski var iegūt, ka A' pieder riņķa līnijai $\odot(BKE)$.

Pagarināsim CB līdz krustpunktam ar AE, ko apzīmēsim ar X, un CD līdz krustpunktam ar AF, ko apzīmēsim ar Y. No simetrijas (vidusperpendikuli) tad $\angle CYA = \angle AXC = 90^\circ$, tādēļ četrstūrim $YAXC$ var apvilkt riņķa līniju. Tālāk izsakām leņķus, izmantojot trijstūru ārējos leņķus un ievilktu četrstūru īpašības

$$\begin{aligned}\angle ALD + \angle AKB &= (\angle ADB - \angle LAD) + (\angle ABD - \angle BAK) = \\ &= (\angle ADB + \angle ABD) - \angle LAD - \angle BAK = 180^\circ - \angle DAB - \angle LAD - \angle BAK = \\ &= 180^\circ - \angle LAK = 180^\circ - \angle YAX = \angle YCX = \angle DCB = \angle BAD.\end{aligned}$$

No simetrijas zināms, ka $\angle BA'D = \angle BAD$, tādēļ varam secināt, ka $\angle BA'D = \angle ALD + \angle AKB$. Papildus no simetrijas arī iegūstam, ka $\angle A'LD = \angle ALD$ un $\angle A'KB = \angle AKB$. Tad varam izteikt

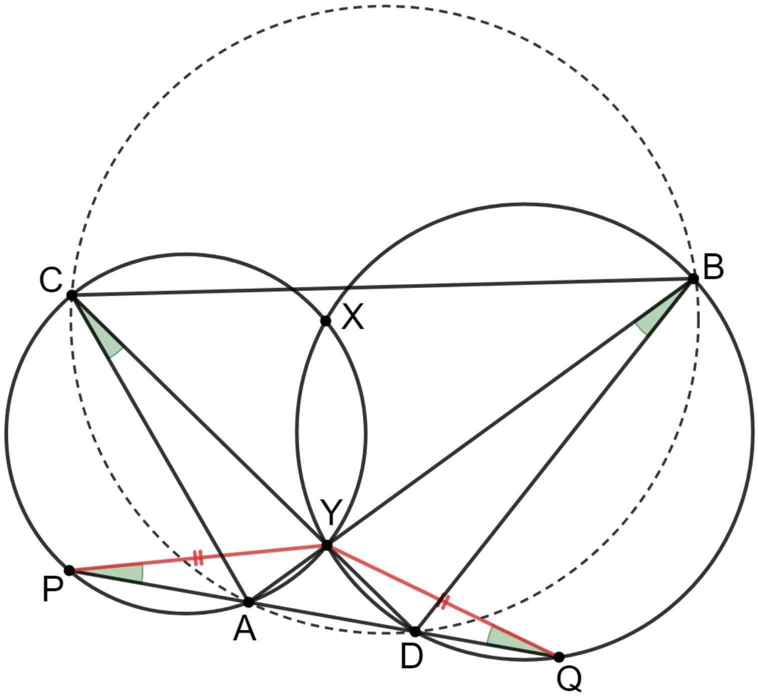
$$\angle BA'D = \angle A'LD + \angle A'KB.$$

Pieņemsim, ka $\odot(FLDA')$ novilkta pieskare TA' punktā A'. Tad $\angle TA'D = \angle A'LD$ no hordas-pieskares leņķa. Izsakot

$$\angle BA'T = \angle BA'D - \angle TA'D = \angle BA'D - \angle A'LD = \angle A'KB,$$

no lemmas izriet prasītais.

4. piemērs Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 krustojas punktos X un Y. Caur punktu Y ir novilktas divas taisnes, kas krusto ω_1 un ω_2 punktos A, B un C, D attiecīgi. Taisne AD krusto riņķa līnijas ω_1 un ω_2 attiecīgi punktos P un Q. Ja zināms, ka $YP = YQ$, tad pierādīt, ka trijstūru BCY un PQY apvilktās riņķa līnijas pieskaras.



Atrisinājums. No lemmas izriet, ka mums ir pietiekami pierādīt, ka $\angle CYP = \angle YQP + \angle YBC$. Ievērosim, ka $\angle ACY = \angle YPQ = \angle YQP = \angle YBD$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $ACBD$ var apvilkt riņķa līniju. Piedevām $\angle YQP + \angle YBC = \angle YBD + \angle YBC = \angle CBD$. Taču tā kā ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle CAD = 180° - \angle CBD$, kas nozīmē, ka $\angle CYP = \angle CBD = \angle YQP + \angle YBC$, izmantojot to, ka ap četrstūri $CAPY$ var apvilkt riņķa līniju.

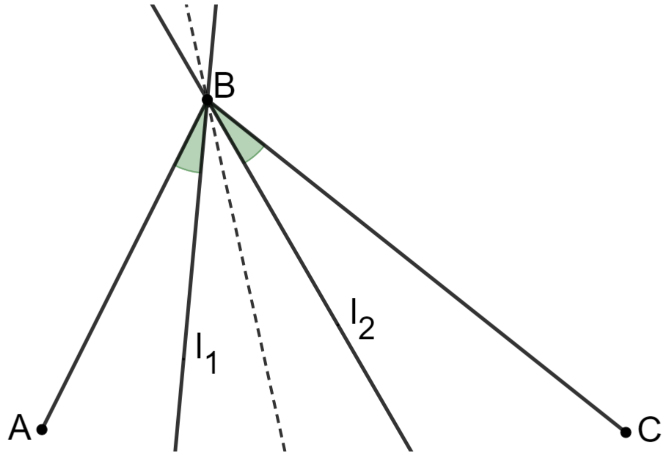
4 Izogonāles

4.1 Definīcijas un teorēmas

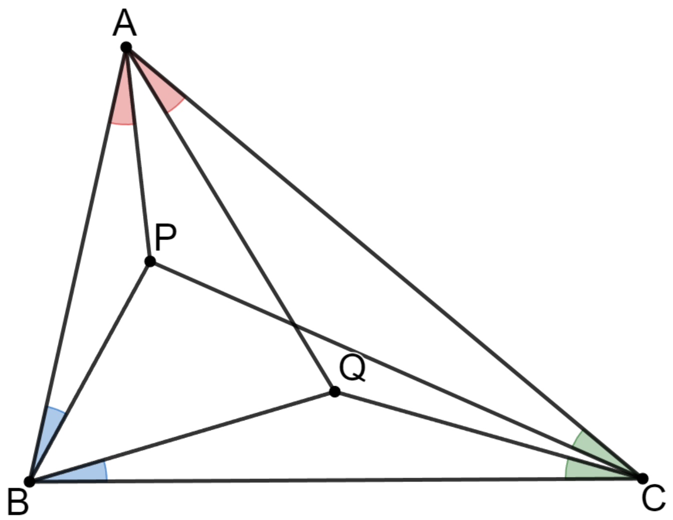
Izogonāles ir piemērs lietai, kur koncepts, ko tā paskaidro ir ļoti vienkāršs, bet matemātiķi nolēma kā vienmēr izcelties un šim konceptam dod sarežģītu un atbaidošu nosaukumu. Pieņemsim, ka mums ir dots leņķi $\angle ABC$.

Definīcija. Taisnes l_1 un l_2 ir **izogonāles** attiecībā pret leņķi $\angle ABC$, ja tās iet caur leņķa virsotni B un leņķis starp taisnēm BA un l_1 ir vienāds ar leņķi starp taisnēm BC un l_2. Citiem vārdiem sakot, taisnēm l_1 un l_2 ir jābūt simetriskiem attiecībā pret leņķa $\angle ABC$ bisektrisi.

Jā, mēs (šī materiāla autori) zinām, ka šī definīcija ir attiecībā pret leņķ $\angle B$ un ka zīmējumā virsotne B ir augšā. Atvainojiet par sagādātajām neērtībām.

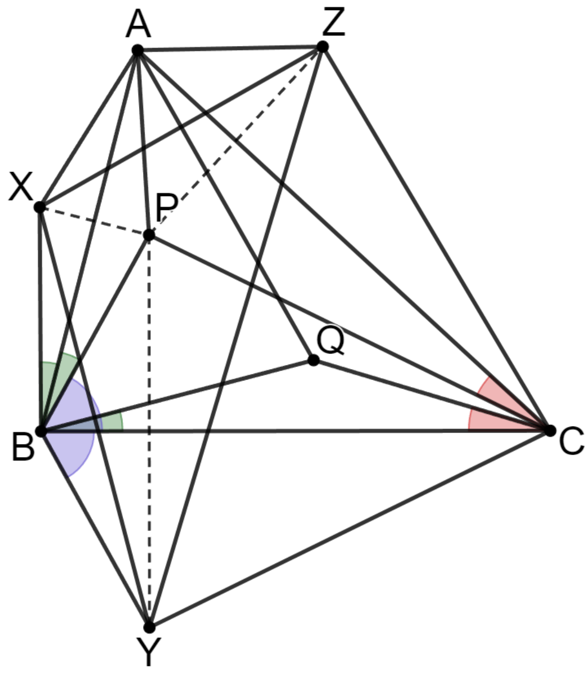


Definīcija. Punkti P un Q ir **izogonāli konjugēti** attiecībā pret trijstūri ABC, ja taisnes AP un AQ ir izogonāles attiecībā pret leņķi $\angle BAC$, taisnes BP un BQ ir izogonāles attiecībā pret leņķi $\angle ABC$ un taisnes CP un CQ ir izogonāles attiecībā pret leņķi $\angle ACB$.



Izogonāli konjugēti punkti ir ļoti laba lieta, jo, ja mums tie parādās uzdevumā, tad mums ir doti trīs vienādu leņķu pāri (skatīt zīmējumu). Bet vispirms mums ir jāpierāda, ka šādi brīnumi vispār eksistē.

Teorēma. Pieņemsim, ka ir dots trijstūris ABC un patvaļīgs punkts P. Tad punktam P eksistē unikāls izogonāli konjugēts punkts trijstūrī ABC.



Pierādījums. Novilksim divas taisnes – vienu, kas ir simetriska taisnei BP attiecībā pret leņķa $\angle ABC$ bisektrisi, un otru, kas ir simetriska taisnei CP attiecībā pret leņķa $\angle ACB$ bisektrisi. Šo divu taišņu krustpunktu apzīmēsim ar Q. Ievērosim, ka taisnes BP un BQ ir izogonāles attiecībā pret leņķi $\angle ABC$ un taisnes CP un CQ ir izogonāles attiecībā pret leņķi $\angle ACB$ pēc konstrukcijas.

Pierādīsim, ka taisnes AP un AQ ir izogonāles attiecībā pret leņķi BAC. Ar X, Y, Z attiecīgi apzīmēsim punkta P attēlojumu attiecībā pret taisnēm AB, BC, CA. No punktu X un Y definīcijām seko, ka $\angle ABX = \angle ABP = \angle CBQ$ un $\angle CBY = \angle CBP = \angle ABQ$. Līdz ar to

$$\angle XBQ = \angle ABX + \angle ABQ = \angle CBQ + \angle CBY = \angle YBQ$$

Tā kā $BX = BP = BY$, mēs secinām, ka BQ ir bisektrise vienādsānu trīsstūrī BXY, kas nozīmē, ka punkts Q atrodas uz nogriežņa XY vidusperpendikula. Veicot analoģiskus spriedumus, mēs varam dabūt, ka punkts Q atrodas arī uz nogriežņa YZ vidusperpendikula. Līdz ar to punkts Q ir trīsstūra XYZ apvilktās riņķa līnijas centrs. Tādēļ punkts Q atrodas uz nogriežņa XZ vidusperpendikula.

Tā kā $AX = AP = AZ$, mēs secinām, ka taisne AQ ir leņķa XAZ bisektrise jeb $\angle XAQ = \angle ZAQ$. No punktu X un Z definīcijām seko, ka $\angle BAX = \angle BAP$ un $\angle CAP = \angle CAZ$. Līdz ar to

$$\angle ZAQ = \frac{1}{2}\angle ZAX = \frac{1}{2}(\angle BAX + \angle BAP + \angle CAP + \angle CAZ) = \angle BAP + \angle CAZ$$

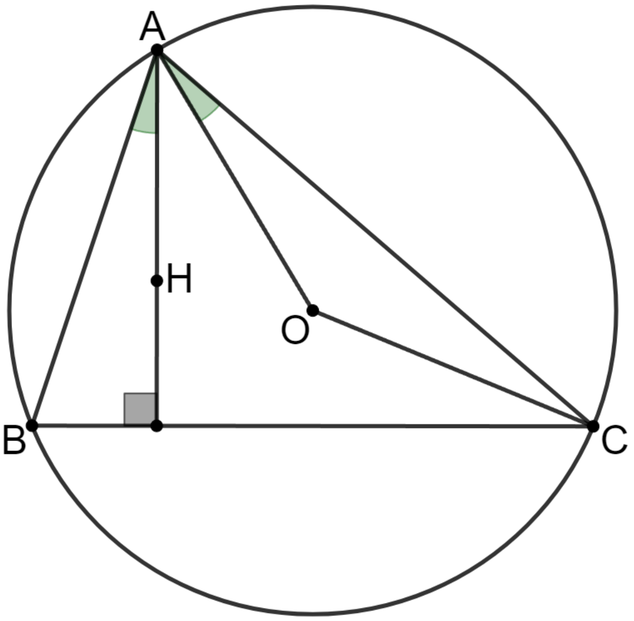
kas nozīmē, ka

$$\angle CAQ = \angle ZAQ - \angle CAZ = \angle BAP$$

Tādējādi, taisnes AP un AQ arī ir izogonāles attiecībā pret leņķi $\angle BAC$. Līdz ar to punkts Q ir izogonāli konjugēts punktam P. Ievērojām arī, ka punkts Q vienmēr eksistē un ir unikāls. Prasītais ir pierādīts.

Nākamais fakts ilustrē to, ka izogonāli konjugēti punktus var atrast, ja aplūko trijstūrī ABC diez ko zināmu punktu pāri.

Noderīgs fakts. Dots trīsstūris $\triangle ABC$. Ar H un O attiecīgi apzīmēsim trīsstūra ABC augstumu krustpunktu un apvilktās riņķa līnijas centru. Tad punkti H un O ir izogonāli konjugēti trijstūrī ABC.

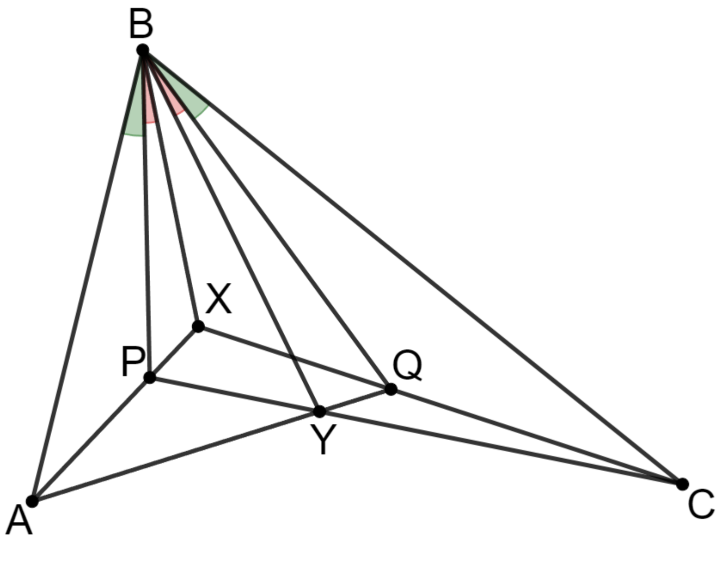


Atrisinājums. Tā kā $AH \perp BC$, mēs zinām, ka $\angle BAH = 90° - \angle ABC$. No apvilktās riņķa līnijas centra īpašībām seko, ka trīsstūris AOC ir vienādsānu un $\angle AOC = 2\angle ABC$. Līdz ar to, $\angle CAO = \frac{1}{2}(180° - \angle AOC) = 90° - \angle ABC = \angle BAH$. Tas nozīmē, ka taisnes AH un AO ir izogonāles attiecībā pret leņķi $\angle BAC$.

Spriežot analoģiski, var dabūt, ka taisnes BH un BO ir izogonāles attiecībā pret leņķi $\angle ABC$ un taisnes CH un CO ir izogonāles attiecībā pret leņķi $\angle ACB$. Līdz ar to punkti H un O ir izogonāli konjugēti trijstūrī ABC, kas arī bija jāpierāda.

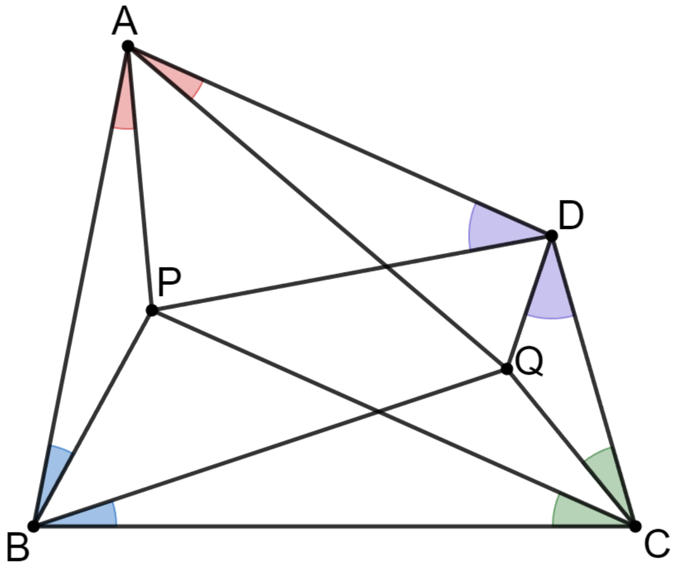
Nākamā lemma ir ļoti noderīga, jo no viena pāra ar izogonālēm taisnēm mēs varam uzkonstruēt vēl vienu pāri ar izogonālēm taisnēm. Lemmu nepierādīsim, taču to ir ļoti svarīgi zināt.

Izogonāļu lemma. Pieņemsim, ka ir dots, ka taisnes BP un BQ ir izogonāles leņķī $\angle ABC$. Ar X apzīmēsim taišņu AP un CQ krustpunktu, un ar Y apzīmēsim taišņu AQ un CP krustpunktu. Tad taisnes BX un BY ir izogonāles leņķī $\angle ABC$.



Tālāk vispārināsim izogonāli konjugētu punktu konceptu no trijstūra uz četrstūri.

Definīcija. Punkti P un Q ir izogonāli konjugēti četrstūrī $ABCD$, ja taisnes AP un AQ ir izogonāles attiecībā pret leņķi $\angle BAD$, taisnes BP un BQ ir izogonāles attiecībā pret leņķi $\angle ABC$, taisnes CP un CQ ir izogonāles attiecībā pret leņķi $\angle BCD$, taisnes DP un DQ ir izogonāles attiecībā pret leņķi $\angle ADC$.



Vispārinot izogonāli konjugētu punktu konceptu no trijstūra uz četrstūri, mēs diemžēl nevaram vairāk apgalvot, ka katram punktam P eksistē unikāls izogonāli konjugēts punkts Q.

Teorēma. Dots punkts P, kas atrodas četrstūra $ABCD$ iekšpusē. Punktam P eksistē izogonāli konjugēts punkts četrstūri $ABCD$ tad un tikai tad, ja $\angle APB + \angle CPD = 180°$.

Šo teorēmu nepierādīsim, taču interesanti var iepazīties ar tās pierādījumu Vikipēdijas lapā. Lai labāk saprastu šo teorēmu, apskatīsim sekojošo piemēru:

Apzīmēsim nosacījumu $\angle APB + \angle CPD = 180°$ ar $(*)$. Pieņemsim, ka mums ir šāda konstrukcija: izliekta četrstūra $ABCD$ iekšpusē ir atlikti punkti P un Q tā, ka $\angle BAP = \angle DAQ$, $\angle ABP = \angle CBQ$ un punktam P izpildās nosacījums $(*)$.

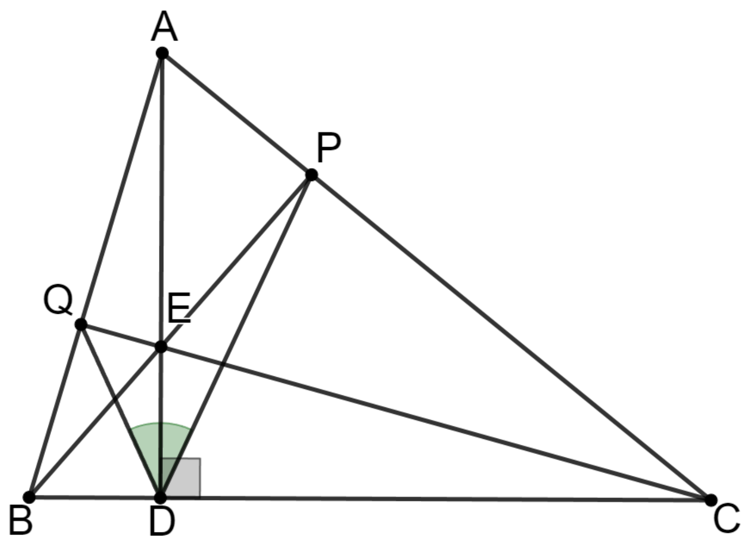
No $(*)$ izriet, ka punktam P eksistē tāds punkts P', ka punkti P un P' ir izogonāli konjugēti četrstūrī $ABCD$. Tāpēc $\angle BAP = \angle DAP'$ un $\angle ABP = \angle CBP'$. Tas nozīmē, ka $\angle DAQ = \angle DAP'$ un $\angle CBQ = \angle CBP'$, līdz ar ko taisnes AQ un AP' sakrīt, un taisnes BQ un BP' sakrīt. Tāpēc to krustpunkts arī sakrīt jeb $P' = Q$, no kā seko, ka punkti P un Q ir izogonāli konjugēti četrstūrī $ABCD$. Līdz ar to $\angle BCP = \angle DCQ$ un $\angle ADP = \angle CDQ$ un tā kā punktam Q eksistē izogonāli konjugēts punkts četrstūrī $ABCD$, tad

$$\angle AQB + \angle CQD = 180°$$

kas ir nosacījums $(*)$ punktam Q.

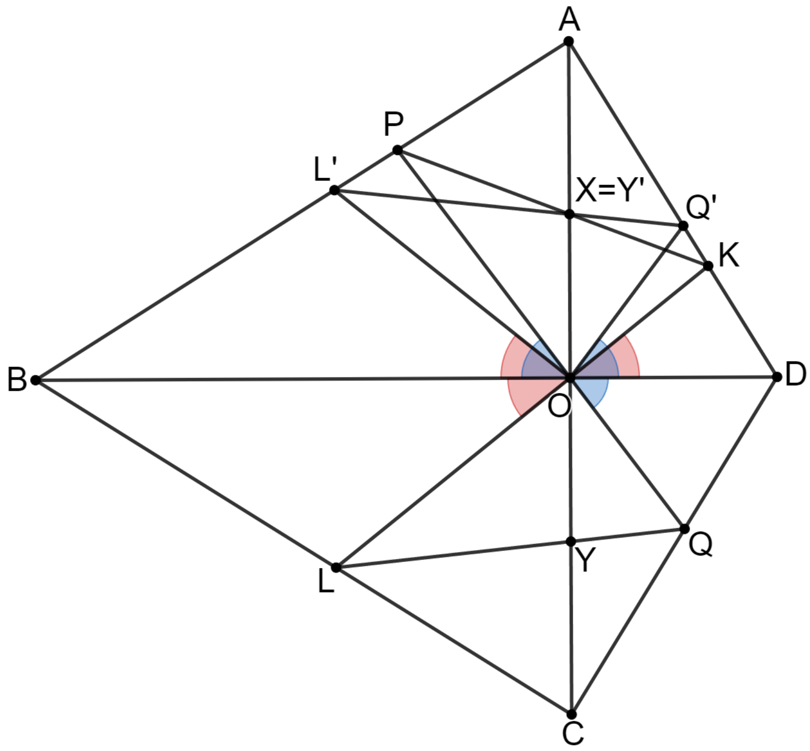
4.2 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs. Dots šaurleņķu trijstūris $\triangle ABC$ ar augstumu AD. Uz nogriežņa AD ir izvēlēts punkts E. Taisnes BE un CE krusto nogriežņus AC un AB attiecīgi punktos P un Q. Pierādīt, ka AD ir leņķa $\angle PDQ$ bisektrise.



Atrisinājums. Ievērojam, ka $\angle ADB = \angle EDC = 90°$. Tas nozīmē, ka taisnes DA un DE ir izogonāles leņķī $\angle BDC$. Tā kā punkts P ir taišņu AC un BE krustpunkts, un punkts Q ir taišņu AB un CE krustpunkts, izmantojot izogonāļu lemmu, secinām, ka taisnes DP un DQ ir izogonāles leņķī $\angle BDC$. Līdz ar to taisnes DP un DQ ir simetriskās attiecībā pret leņķa $\angle BDC$ bisektrisi, kas ir taisne DA. Citiem vārdiem sakot, $\angle ADP = \angle ADQ$, kas arī bija jāpierāda.

2. piemērs Dots četrstūris $ABCD$ ar īpašību, ka $AB = BC$ un $CD = DA$. Punkts O ir nogriežņu AC un BD krustpunkts. Caur punktu O novilktas divas taisnes - pirmā krusto nogriežņus AB un CD attiecīgi punktos P un Q, bet otrā krusto nogriežņus AD un BC attiecīgi punktos K un L. Taisnes PK un QL krusto nogriezni AC attiecīgi punktos X un Y. Pierādīt, ka $OX = OY$.



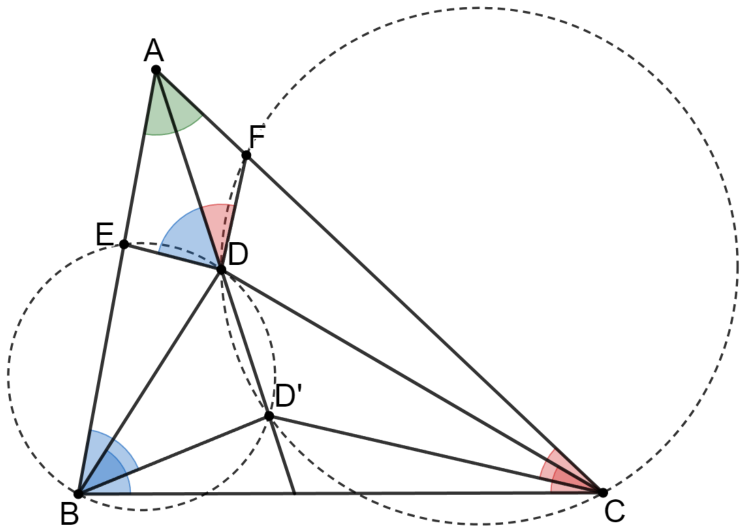
Atrisinājums. Ievērojām, ka no uzdevumā dotas īpašības izriet, ka punkts C ir simetrisks punktam A attiecībā pret taisni BD. Ar L' un Q' apzīmēsim punktu L un Q atspoguļojumus attiecībā pret taisni BD. Pēc simetrijas punkti L' un Q' atrodas attiecīgi uz nogriežņiem AB un AD. Ar Y' apzīmēsim nogriežņu PK un $Q'L'$ krustpunktu. No krustleņķu un simetrijas īpašībām seko, ka

$$\angle BOP = \angle DOQ = \angle DOQ' \text{ un } \angle KOD = \angle LOB = \angle L'OB$$

Apgalvojums. Y' atrodas uz nogriežņa AO.
Pierādījums. No leņķu sakarībām izriet, ka taisnes OP un OQ' ir izogonāles, un taisnes OK un OL' ir izogonāles leņķī $\angle BOD$. Tā kā $Y' = PK \cap Q'L'$ un $A = PL' \cap Q'K$, tad no izogonāļu teorēmas seko, ka $\angle BOY' = \angle DOA = 90°$ jeb abas taisnes AO un $Y'O$ ir perpendikulāras BD, no kā var secināt, ka Y' atrodas uz nogriežņa AO.

Tā kā punkts Y' tagad ir arī nogriežņu AO un PK krustpunkts, tad tas sakrīt ar X jeb $OX = OY'$. No otras puses, tā kā punkts Y' ir nogriežņu AO un $Q'L'$ krustpunkts, tad pēc simetrijas $OY' = OY$. Saliekot visu kopā sanāk, ka $OX = OY' = OY$. Prasītais ir pierādīts.

3.piemērs. Dots šaurleņķu trijstūris $\triangle ABC$. Uz leņķa $\angle BAC$ bisektrises ir izvēlēts punkts D, kas atrodas trijstūra $\triangle ABC$ iekšpusē. Uz nogriežņiem AB un AC izvēlēti attiecīgi tādi punkti E un F tā, ka $\angle BCD = \angle ADF$ un $\angle CBD = \angle ADE$. Pierādīt, ka punkti B, C, E, F atrodas uz vienas riņķa līnijas.



Atrisinājums. Atliksim tādu punktu D', lai punkti D un D' būtu izogonāli konjugēti trīsstūrī ABC. Tā kā pēc uzdevuma nosacījumiem punkts D atrodas uz leņķa $\angle BAC$ bisektrises, tad arī D' atrodas uz tās, kā arī $\angle ABD' = \angle CBD$ un $\angle ACD' = \angle BDC$. Līdz ar to

$$\angle EBD' = \angle ABD' = \angle CBD = \angle ADE = 180^\circ - \angle EDD'$$

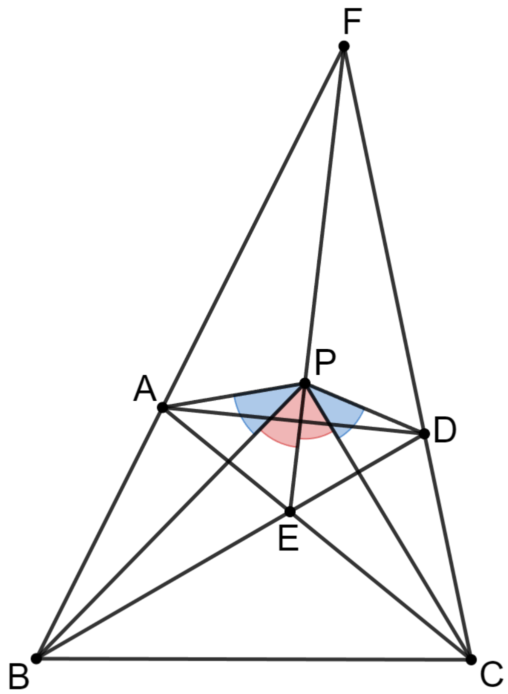
kas nozīmē, ka punkti B, E, D, D' atrodas uz viens riņķa līnijas. Spriežot analoģiski mēs varam secināt, ka punkti C, F, D, D' arī atrodas uz viens riņķa līnijas.

Izmantojot sekantes īpašību, mēs varam iegūt, ka

$$AE \cdot AB = AD \cdot AD' = AF \cdot AC,$$

kas nozīmē, ka punkti B, C, E, F atrodas uz vienas riņķa līnijas. Prasītais ir pierādīts.

4.piemērs. Dots četrstūris $ABCD$, kuram diagonāles krustojas punktā E un taisnes AB un CD krustojas punktā F. Uz taisnes EF ir izvēlēts punkt P, ka $\angle BPE = \angle CPE$. Pierādīt, ka $\angle APB = \angle CPD$.



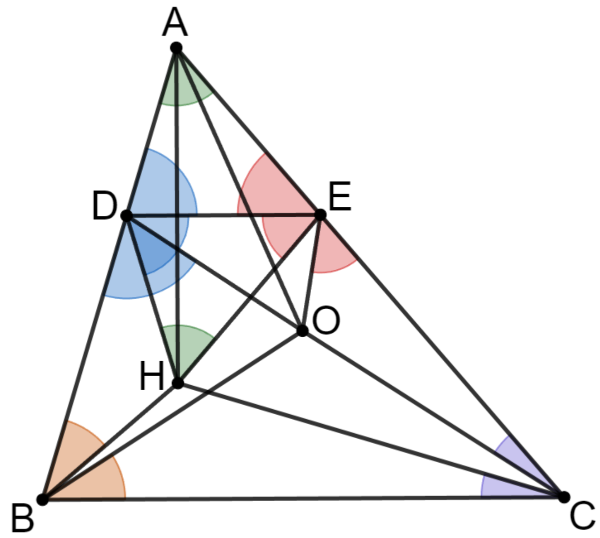
Atrisinājums. Apskatīsim leņķi $\angle BPC$. Tā kā taisne PE ir šī leņķa bisektrise un punkti E un F abi atrodas uz šīs taisnes, tad pēc definīcijas taisnes PE un PF ir izogonāles leņķī $\angle BPC$.

Ievērojam, ka punkts A ir taišņu CE un BF krustpunkts, un punkts D ir taišņu BE un CF krustpunkts. Tādēļ no izogonāļu lemmas izriet, ka taisnes PA un PD ir izogonāles leņķī $\angle BPC$. Tātad $\angle APE = DPE$. Līdz ar to

$$\angle APB = \angle APE - \angle BPE = \angle DPE - \angle CPE = \angle CPD,$$

kas bija jāpierāda.

5. piemērs Dots trijstūris ABC, kura augstuma krustpunkts ir punkts H un apvilktās riņķa līnijas centrs ir punkts O. Nogriežņa AH vidusperpendikuls krusto nogriežņus AB un AC attiecīgi punktos D un E. Pierādīt, ka taisne OA ir leņķa $\angle DOE$ bisektrise.



Atrisinājums. Sākumā pierādīsim, ka punkti H un O ir izogonāli konjugēti četrstūrī $BDEC$. Tā kā DE ir nogriežņa AH vidusperpendikuls, tad no simetrijas izriet, ka $\angle DHE = \angle DAE = \angle BAC$. No ortocentra definīcijas seko, ka $\angle HBC = 90° - \angle ACB$ un $\angle HCB = 90° - \angle ABC$. Tādēļ

$$\angle BHC = 180° - \angle HBC - \angle HCB = \angle ACB + \angle ABC$$

kas kopā ar iepriekšējo rezultātu dod, ka

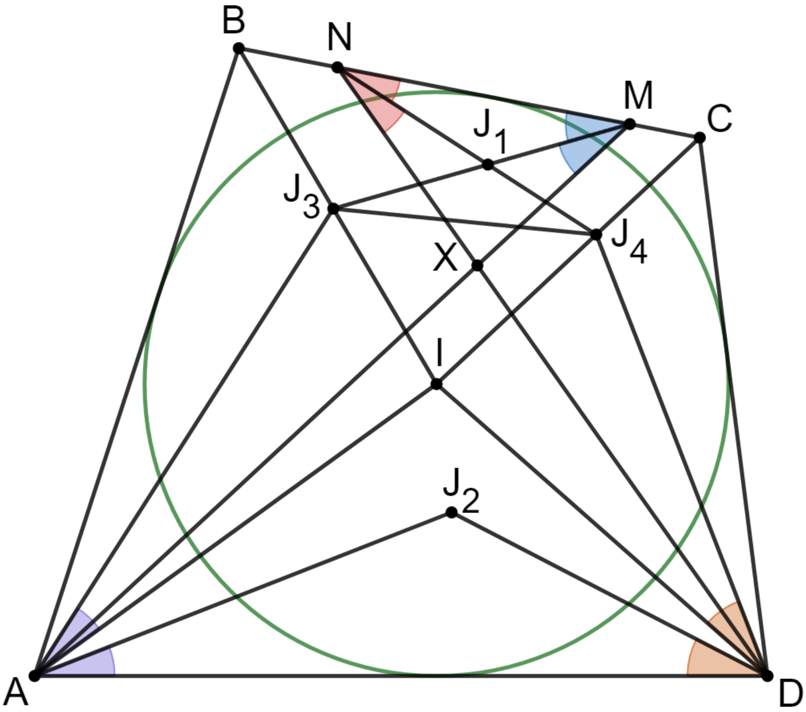
$$\angle BHC + \angle DHE = \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 180°$$

no kā izriet, ka punktam H eksistē izogonāli konjugēts punkts četrstūrī $BDEC$. Atceramies, ka trīsstūrī ABC punkti H un O vienmēr ir izogonāli konjugēti, līdz ar ko $\angle ABH = \angle CBO$ un $\angle ACO = \angle BCH$. No tā var secināt, ka četrstūrī $BDEC$ punktam H izogonāli konjugēts punkts ir tieši punkts O. Tādējādi $\angle BDO = \angle EDH = \angle EDA$ un $\angle CEO = \angle DEH = \angle DEA$.

No šādu leņķu sakarībām izriet, ka taisne DA ir leņķa $\angle ODE$ ārējā bisektrise, un taisne EA ir leņķa $\angle OED$ ārējā bisektrise. Tā kā trīsstūra ODE leņķu $\angle ODE$ un $\angle OED$ ārējās bisektrises krustojas punktā A, tad punkts A ir trīsstūrim ODE pievilktas riņķa līnijas centrs, kas nozīmē, ka taisne OA ir leņķa $\angle DOE$ bisektrise, kas bija jāpierāda.

Piezīme. Par trīsstūrim pievilktu riņķa līniju sauc tādu riņķa līniju, kas pieskaras vienai trijstūra malai no ārpuses un abu pārējo malu pagarinājumiem. Vairāk par tās īpašībām var palasīt Vikipēdijas lapā.

6. piemērs Dots četrstūris $ABCD$ ar ievilktas riņķa līnijas centru I. Uz nogriežņa BC ir izvēlēti punkti N un M tā, ka punkts N atrodas uz nogriežņa BM. Punkts X ir nogriežņu AM un DN krustpunkts. Trīsstūros MNX, ADX, ABM, CDN ievilto riņķa līniju centri ir attiecīgi punkti J_1, J_2, J_3, J_4. Pierādīt, ka punkti J_1, J_2, J_3, J_4 atrodas uz vienas riņķa līnijas.



Atrisinājums. Ievērojam, ka mums pietiek pierādīt, ka $\angle J_3J_1J_4 + \angle J_3J_2J_4 = 180°$. Tā kā ievilto riņķa līniju centri atrodas uz attiecīgo trīsstūru bisektrisēm, secinām, ka punkti M, J_1, J_3 atrodas uz vienas taisnes un punkti N, J_1, J_4 atrodas uz vienas taisnes. Tādējādi

$$\angle J_3J_1J_4 = \angle MJ_1N = 90° + \frac{1}{2}\angle MXN$$

No trijstūra AXD iegūstam, ka

$$\angle AJ_2D = 90° + \frac{1}{2}\angle AXD = 90° + \frac{1}{2}\angle MXN = \angle J_3J_1J_4$$

Tādējādi mums pietiek pierādīt, ka $\angle AJ_2D + \angle J_3J_2J_4 = 180°$ jeb ka punktam J_2 eksistē izogonāli konjugēts punkts četrstūrī AJ_3J_4D.

Apgalvojums. $\angle AIB + \angle CID = 180°$.

Pierādījums. Ievērojām, ka jebkura četrstūra leņķu summa ir vienāda ar 360°. Pamanīsim, ka

$$\angle AIB + \angle CID = (180° - \angle BAI - \angle ABI) + (180° - \angle DCI - \angle CDI) =$$

$$= 360° - (\angle BAI + \angle ABI + \angle DCI + \angle CDI)$$

taču punkts I atrodas uz visu četru četrstūra leņķu bisektrisēm, mēs varam secināt, ka

$$\angle AIB + \angle CID = 360° - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle CBA + \angle DCB + \angle ADC) = 360° - 180° = 180°$$

Tas nozīmē, ka $\angle AIJ_3 + \angle J_4ID = 180°$, no kā izriet, ka punktam I eksistē izogonāli konjugēts punkts četrstūrī AJ_3J_4D. Ņemot vērā faktu, ka ievilto riņķa līniju centri atrodas uz attiecīgo trīsstūru bisektrisēm, mēs varam dabūt, ka

$$\angle J_2AD = \frac{1}{2}\angle MAD = \frac{1}{2}\angle BAD - \frac{1}{2}\angle BAM = \angle BAI - \angle BAJ_3 = \angle IAJ_3$$

Analoģiski dabūjam vienādību $\angle J_2DA = \angle IDJ_4$. No tā izriet, ka punktam I izogonāli konjugēts punkts četrstūrī AJ_3J_4D ir punkts J_2, kas no otras puses nozīmē, ka punktam J_2 eksistē izogonāli konjugēts punkts četrstūrī AJ_3J_4D.