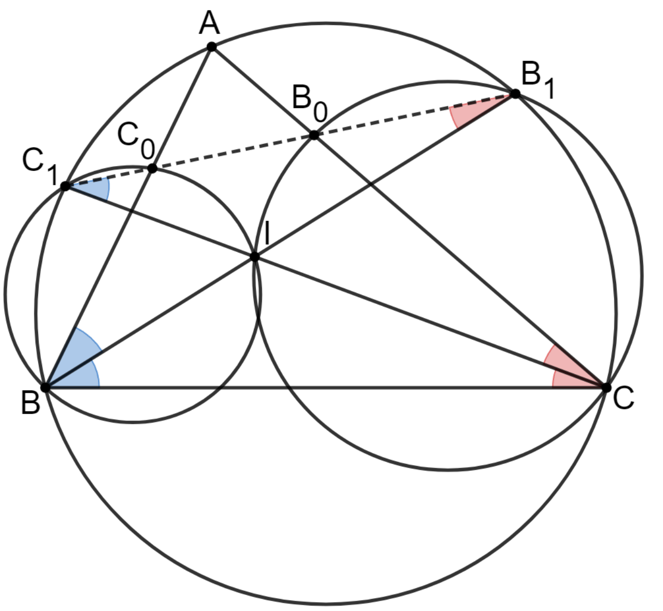
1.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums Dots trijstūris ABC. Bisektrises BI un CI krusto trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju attiecīgi punktos B_1, C_1. Trijstūra BIC_1 apvilktā riņķa līnija krusto nogriezni AB punktā C_0, savukārt trijstūra CIB_1 apvilktā riņķa līnija krusto nogriezni AC punktā B_0. Pierādīt, ka punkti B_0, B_1, C_0, C_1 atrodas uz vienas taisnes.



Atrisinājums. Pierādīsim, ka punkts B_0 atrodas uz taisnes B_1C_1. Ievērojam, ka mums pietiek pierādīt, ka $\angle IB_1C_1 = \angle IB_1B_0$.

Tā kā taisne CI ir leņķa $\angle ABC$ bisektrise, tad $\angle ICA = \angle ICB$. Pēc uzdevuma nosacījuma četrstūris B_0B_1CI ir ievilkts, kas nozīmē, ka $\angle IB_1B_0 = \angle ICB_0$. Līdz ar to

$$\angle IB_1B_0 = \angle ICB_0 = \angle ICA = \angle ICB = \angle C_1CB$$

Atceramies, ka četrstūris BCB_1C_1 ir ievilkts, no kā izriet, ka

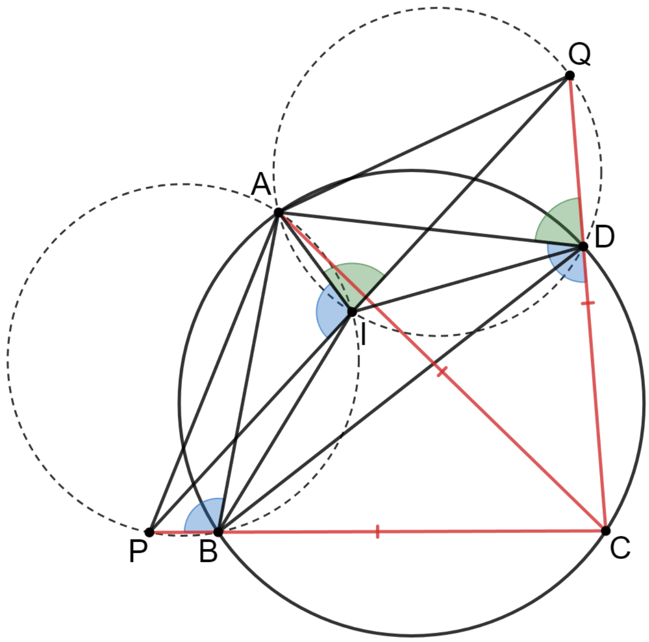
$$\angle C_1CB = \angle C_1B_1B = \angle C_1B_1I$$

līdz ar ko $\angle IB_1C_1 = \angle IB_1B_0$ jeb punkts B_0 atrodas uz taisnes B_1C_1.

Analoģiski, tā kā četrstūri C_0C_1BI un BCB_1C_1 ir ievilkti, tad līdzīgi mēs varam pierādīt, ka $\angle IC_1B_1 = \angle IC_1C_0$ jeb punkts C_0 atrodas uz taisnes B_1C_1.

Tādējādi punkti B_0 un C_0 abi atrodas uz taisnes B_1C_1, kas nozīmē, ka punkti B_0, B_1, C_0, C_1 atrodas uz vienas taisnes, kas bija jāpierāda.

2.uzdevums Dots riņķa līnijās ievilkts četrstūris $ABCD$. Punkts P ir izvēlēts uz taisnes CB ar īpašību, ka $CP = CA$ un punkts B atrodas starp punktiem C un P. Punkts Q ir izvēlēts uz taisnes CD ar īpašību, ka $CQ = CA$ un punkts D atrodas starp punktiem C un Q. Pierādīt, ka trijstūra ABD ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz taisnes PQ.



Atrisinājums. Ievērosim, ka $\angle BCA = \angle BDA = \alpha$ kā ievilktie leņķi. Tā kā $CP = CA$, tad $\angle CPA = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Ar I apzīmēsim trijstūra ABD ievilktās riņķa līnijas centru. Ievērosim, ka no lemmas par incentra leņķi izriet, ka

$$\angle BIA = 90° + \frac{\angle BDA}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$$

Secinām, ka

$$\angle CPA + \angle BIA = 90° - \frac{\alpha}{2} + 90° + \frac{\alpha}{2} = 180°$$

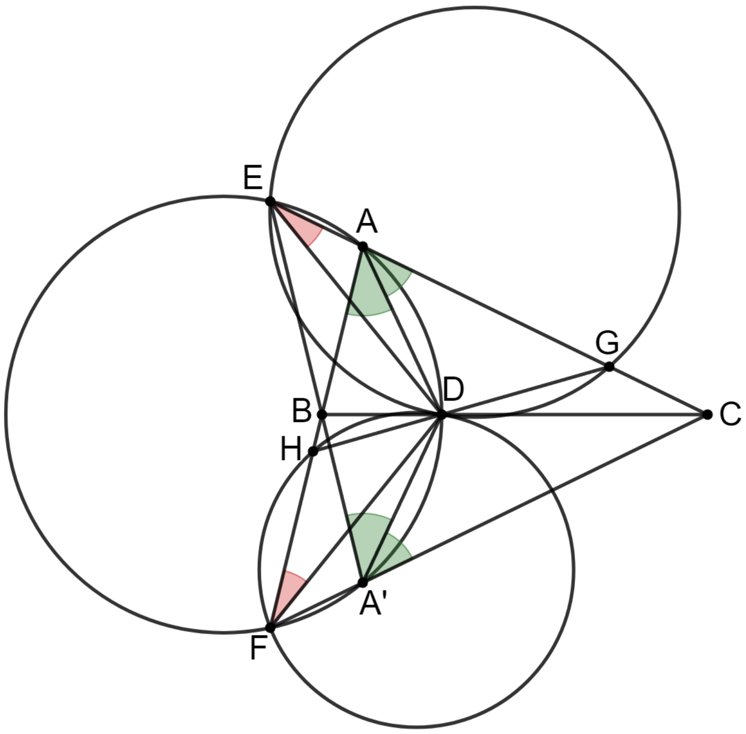
Līdz ar to ap četrstūri $IBPA$ var apvilkt riņķa līniju. Līdzīgi var pierādīt, ka ap četrstūri $ADQI$ var apvilkt riņķa līniju.

Ievērosim, ka $\angle CDA = \angle PBA = \angle PIA$, kur mēs izmantojām to, ka ap četrstūriem $ABCD$ un $IBPA$ var apvilkt riņķa līnijas. Tā kā ap četrstūri $ADQI$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle AIQ = 180° - \angle CDA$. Secinām, ka

$$\angle PIQ = \angle PIA + \angle AIQ = \angle CDA + \angle 180° - \angle CDA = 180°,$$

kas nozīmē, ka punkts I atrodas uz taisnes PQ, kas arī bija jāpierāda.

3.uzdevums Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kuram $AC > AB$ un AD ir leņķa BAC bisektrise. Taišņu AB un AC attēlojumi pāri taisnei BC krusto attiecīgi taisnes AC un AB punktos E un F. Taisne, kas iet caur punktu D, krusto attiecīgi taisnes AC un AB punktos G un H ar īpašību, ka punkts G atrodas starp punktiem A un C un punkts H atrodas star punktiem B un F. Pierādīt, ka trijstūru $\triangle EDG$ un $\triangle FDH$ apvilktās riņķa līnijas pieskaras.



Atrisinājums. Ar A' apzīmēsim punkta A attēlojumi pāri taisnei BC. Ievērosim, ka no punktu E un F definīcijas izriet, ka C, A', F un B, A', E atrodas uz vienas taisnes.

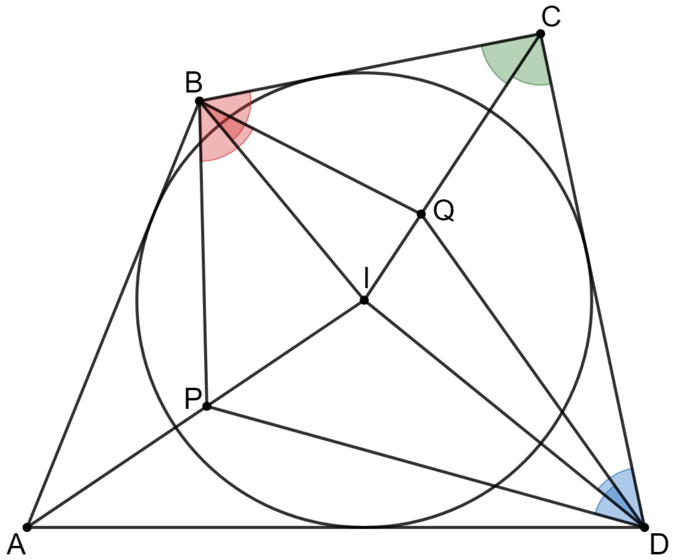
Apgalvojums. Ap piecstūri $EADA'F$ var apvilkt riņķa līniju.
Pierādījums. Ievērosim, ka $\angle DAC = \angle BAD = \angle BA'D = \angle EA'D$, kur mēs izmantojam to, ka AD ir leņķa BAC bisektrise un simetriju. Secinām, ka ap četrstūri $EADA'$ var apvilkt riņķa līniju. Ievērosim arī, ka no simetrijas $\angle BAC = \angle BA'C$, kas nozīmē, ka $\angle EAF = \angle EA'F$ kā atbilstošie blakusleņķi. Secinām, ka ap četrstūri $EAA'F$ var apvilkt riņķa līniju. Tā kā abiem četrstūriem ir trīs kopīgi punkti E, A, A', tad secinām, ka ap piecstūri $EADA'F$ var apvilkt riņķa līniju.

No lemmas izriet, ka mums ir pietiekami pierādīt , ka $\angle EDH = \angle AGD + \angle DFH$. Ievērosim, ka $\angle DFH = \angle DFA = \angle DEG$, jo ap četrstūri $EADF$ var apvilkt riņķa līniju. Tādā gadījumā mums ir jāpierāda, ka

$$\angle EDH = \angle AGD + \angle DFH = \angle AGD + DEG$$

Pēdējā vienādība ir patiesa no trijstūra EGD ārējā leņķa īpašības.

4.uzdevums Dots četrstūris $ABCD$, kurā ir ievilkta riņķa līnija ar centru I. Uz nogriežņiem AI un CI ir izvēlēti punkti P un Q ar īpašību, ka $2\angle PBQ = \angle ABC$. Pierādīt, ka $2\angle PDQ = \angle ADC$.



Atrisinājums. Sāksim ar to, ka punkts I ir vienādā attālumā no visām četrstūra $ABCD$ malām. Tas nozīmē, ka taisnes AI, BI, CI, DI ir attiecīgi leņķu $\angle BAD, \angle CBA, \angle DCB, \angle ADC$ bisektrises. Līdz ar to $\angle ABI = \angle CBI$, kas nozīme, ka $\angle PBQ = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle CBI$.
Apgalvojums. $\angle AIB + \angle CID = 180°$.
Pierādījums. Ievērojām, ka jebkura četrstūra leņķu summa ir vienāda ar $360°$. Pamanīsim, ka

$$\angle AIB + \angle CID = (180° - \angle BAI - \angle ABI) + (180° - \angle DCI - \angle CDI) =$$

$$= 360° - (\angle BAI + \angle ABI + \angle DCI + \angle CDI)$$

taču no mūsu sakuma novērojuma, mēs varam secināt, ka

$$\angle AIB + \angle CID = 360° - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle CBA + \angle DCB + \angle ADC) = 360° - 180° = 180°$$

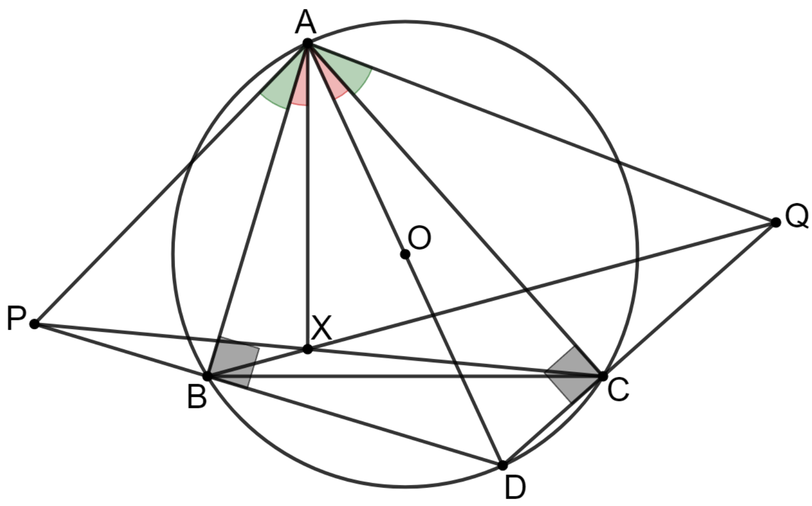
Ievērojam, ka pierādītais apgalvojums ir ekvivalents ar $\angle PIB + \angle CID = 180°$, kas nozīme, ka punktam I eksistē izogonāli konjugēts punkts četrstūrī $BCDP$. Tā kā $\angle PBQ = \angle CBI$ un $\angle BCQ = \angle DCI$, tad šis punkts ir Q. Tādējādi taisnes DI un DQ ir izogonāles leņķī $\angle PDC$. No tā izriet, ka

$$2\angle PDQ = 2\angle CID = \angle ADC$$

Prasītais ir pierādīts.

2.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums Dots šaurleņķu trīsstūris $\triangle ABC$. Punkti P un Q ir izvēlēti trīsstūra $\triangle ABC$ ārpusē tā, ka $\angle BAP = \angle CAQ$ un $\angle ABP = \angle ACQ = 90°$. Ar X apzīmēsim taišņu BQ un CP krustpunktu. Pierādīt, ka $AX \perp BC$.



Atrisinājums. Ar D apzīmēsim taišņu BP un CQ krustpunktu. Tā kā $\angle ABD = \angle ACD = 90°$, tad ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju, kuras diametrs ir AD. Ar O apzīmēsim šīs riņķa līnijas centru.

Pamanīsim, ka taisnes AB un AC ir izogonāles leņķī $\angle PAQ$. Tā kā $X = BQ \cap CP$ un $D = BP \cap CQ$, tad no izogonāļu lemmas izriet, ka taisnes AX un AD ir izogonāles leņķī $\angle PAQ$, kā arī leņķī $\angle BAC$, jo $\angle BAP = \angle CAQ$. Līdz ar to $\angle BAX = \angle CAD = \angle CAO$.

Ievērojam, ka

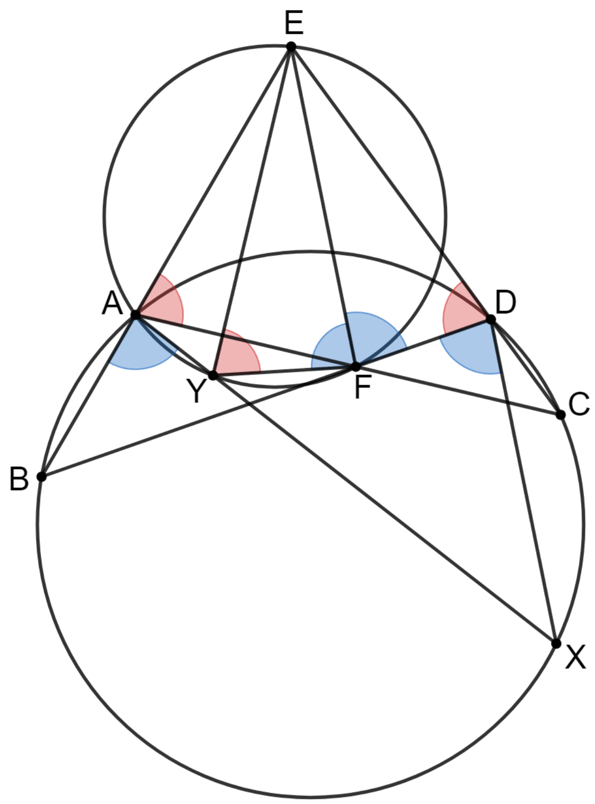
$$\angle BAX = \angle CAO = \frac{1}{2}(180° - \angle AOC)$$

taču $\angle AOC = 2\angle ABC$ kā centra leņķis. Līdz ar to

$$\angle BAX = \frac{1}{2}(180° - 2\angle ABC) = 90° - \angle ABC$$

kas nozīmē, ka leņķis starp taisnēm AX un BC ir $\angle ABC + \angle BAX = 90°$ jeb $AX \perp BC$, kas bija jāpierāda.

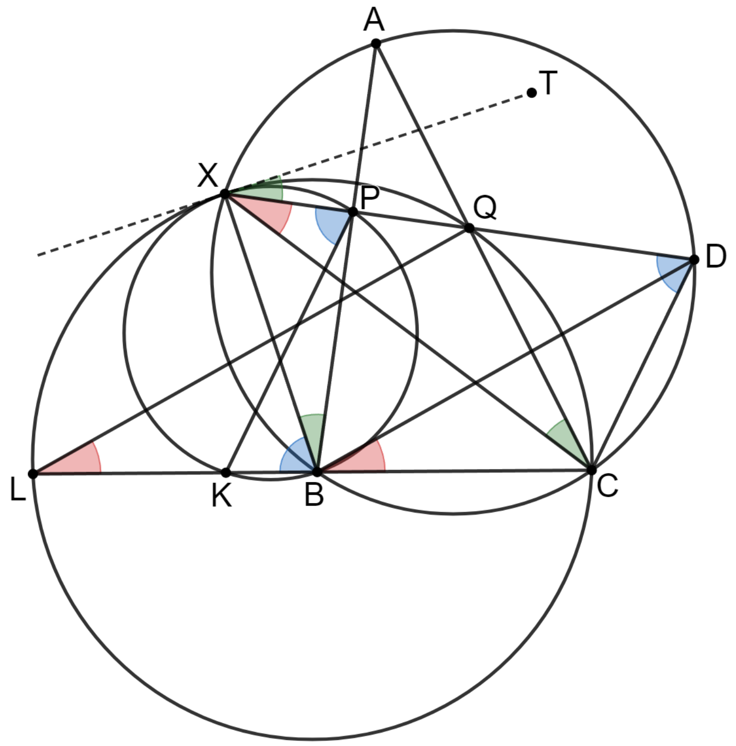
2. uzdevums. Dots riņķa līnijā ω ievilkts četrstūris $ABCD$. Taisnes AB un CD krustojas punktā E ar īpašību, ka punkts A atrodas starp punktiem B un E, savukārt taisnes BD un AC krustojas punktā F. Punkts $X \neq D$ atrodas uz ω ar īpašību, ka $DX \parallel EF$. Punkts Y ir punkta D attēlojums pāri taisnei EF un zināms,ka punkts Y atrodas ω iekšpusē. Pierādīt, ka punkti A, X un Y atrodas uz vienas taisnes.



Atrisinājums. Ievērosim, ka no simetrijas izriet, ka $\angle FDE = \angle FYE$. Tā kā ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle CDB = \angle CAB$, no kurienes izriet, ka $\angle FDE = \angle FAE$ kā atbilstošie blakusleņķi. Līdz ar t secinām, ka $\angle FYE = \angle FAE = \angle DFE$, tāpēc ap četrstūri $FYAE$ var apvilkt riņķa līniju.

No simetrijas arī izriet, ka $\angle YFE = \angle DFE$. Taču $DX \parallel EF$, tāpēc $\angle DFE = \angle XDB$. Tā kā ap četrstūri $ABCD$ var ievilkt riņķa līniju, tad $\angle XDB = \angle XAB$. No otras puses, tā kā ap četrstūri $FYAE$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle YFE = \angle YAB$. Esam ieguvuši, ka $\angle YAB = \angle XAB = \angle DFE$. Tas nozīmē, ka punkti A, X, Y atrodas uz vienas taisnes, kas arī bija jāpierāda.

3.uzdevums Dots, ka $ABCD$ ir riņķa līnijā ievilkts četrstūris un punkts P ir patvaļīgi izvēlēts uz nogriežņa AB. Taisne AC krusto taisni DP punktā Q. Taisne, kas iet caur punktu P paralēli taisnei CD krusto nogriežņa CB pagarinājumu aiz punkta B punktā K. Taisne, kas iet caur punktu Q paralēli taisnei BD krusto nogriežņa CB pagarinājumu aiz punkta B punktā L. Pierādīt, ka trijstūru BKP un CLQ apvilktās riņķa līnijas krustojas.

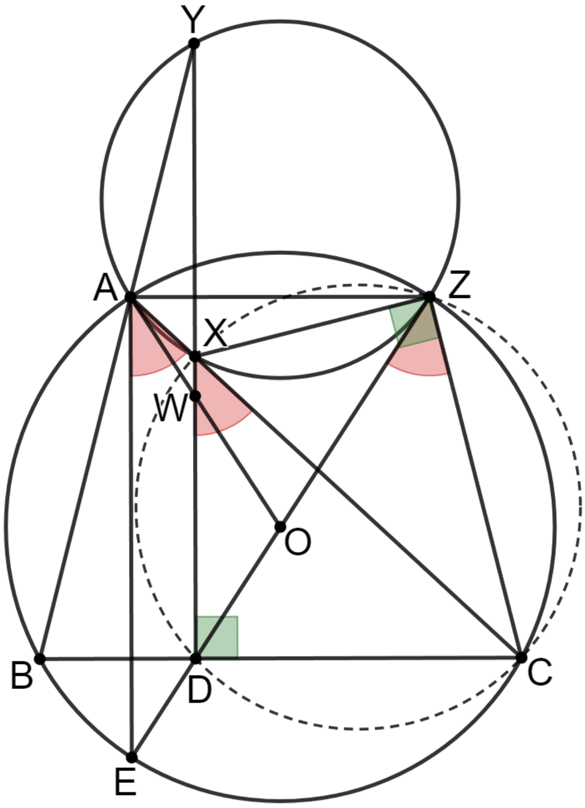


Atrisinājums. Pieņemsim, ka taisne DP krusto riņķa līniju, kurā ir ievilkts četrstūris $ABCD$, punktā X.

Apgalvojums. Ap četrstūriem $BKXP$ un $CLXQ$ var apvilkt riņķa līnijas.
Pierādījums. Tā kā $PK \parallel CD$, tad $\angle XPK = \angle XDC$. Tā kā ap četrstūri $BXDC$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle XPK = \angle XDC = \angle XBK$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $BKXP$ var apvilkt riņķa līniju. Tā kā $QL \parallel BD$, tad $\angle XQL = \angle XDB$. Tā kā ap četrstūri $XBCD$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle XQL = \angle XDB = \angle XCB$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $CLXQ$ var apvilkt riņķa līniju.

Novilksim trijstūrim BKP apvilktai riņķa līnijai pieskari ℓ punktā X un izvēlēsimies uz tās punktu T. Ievērosim, ka $\angle TXQ = \angle XBP$. Tā kā ap četrstūri $XBCA$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle XBP = \angle XCA = \angle XCQ$, kas nozīmē, ka $\angle TXQ = \angle XCQ$. Secinām, ka taisne ℓ ir arī trijstūra XCQ apvilktās riņķa līnijas pieskare, kas ir tas pats, kas trijstūra CLQ apvilktās riņķa līnijas pieskare. Tas nozīmē, ka abas riņķa līnijas pieskaras punktā X, kas arī bija jāpierāda.

4. uzdevums. Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kuram $AC > AB$ un kura apvilktās riņķa līnijas centrs ir punkts O. Uz nogriežņa BC ir izvēlēts patvaļīgs punkts D. Taisne, kas vilkta caur punktu D perpendikulāri taisnei BC, krusto taisnes AO, AC un AB attiecīgi punktos W, X un Y. Trijstūru ABC un AXY apvilktās riņķa līnijas krustojas punktā Z, kas ir atšķirīgs no punkta A. Pierādīt, ka, ja $OW = OD$, tad taisne DZ ir trijstūra AXY apvilktās riņķa līnijas pieskare.



Atrisinājums. Ar E apzīmēsim augstuma, kas vilkts no virsotnes A trijstūrī ABC, krustpunktu ar trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju. Sanāk, ka $AE \perp BC$ un $WD \perp BC$, kas nozīme, ka $AE \parallel DW$. Līdz ar to $\angle OWD = \angle OAE$ un tā kā $OA = OE$ kā trijstūrim ABC apvilktas riņķa līnijas rādiusi, tad trijstūri OWD un OAE ir līdzīgi. No tā seko, ka punkti O, D, E atrodas uz vienas taisnes.

Tā kā četrstūri $ABCZ$ un $AXZY$ ir ievilkti, tad

$$\angle CZX = \angle CZA - \angle AZX = (180^\circ - \angle ABC) - \angle AYX = 180^\circ - \angle YBD - \angle BYD = 90^\circ$$

Ievērojam, ka arī $\angle CDX = 90^\circ$, no kā izriet, ka četrstūris $CDXZ$ ir ievilkts. Izmantojot šo faktu, mēs varam secināt, ka

$$\angle CZD = \angle CXD = \angle CAE = \angle CZE$$

kas nozīmē, ka punkti Z, D, E atrodas uz vienas taisnes. Kopā ar iepriekš pierādīto rezultātu, mēs varam secināt, ka punkti Z, D, O atrodas uz vienas taisnes.

No apvilktas riņķa līnijas centra īpašības seko, ka

$$\angle AYX = 90^\circ - \angle ABC = \angle CAO = \angle XAO$$

kas nozīme, ka taisne AO pieskaras trijstūra AXY apvilktajai riņķa līnijai. Ievērojam, ka $AO = ZO$ kā rādiusi, kas nozīmē, ka taisne ZO arī ir pieskare un tā kā taisne ZO sakrīt ar taisni DZ, tad taisne DZ ir trijstūra AXY apvilktās riņķa līnijas pieskare.