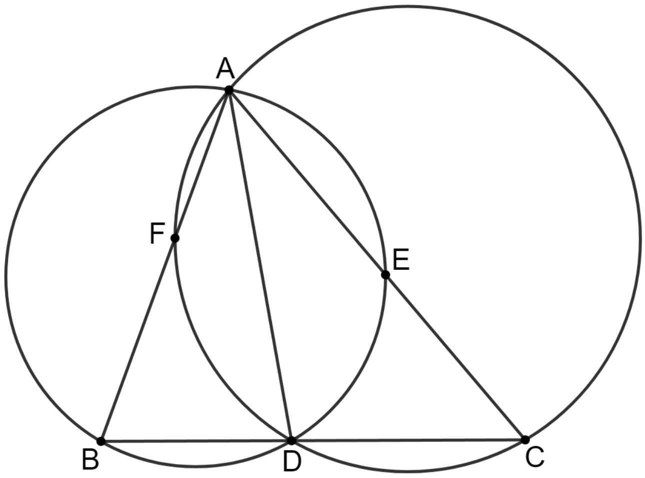
1.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums Dots trijstūris ABC, kurā ir novilkta bisektrise AD. Trijstūra ADB apvilktā riņķa līnijas krusto nogriezni AC punktā E, savukārt trijstūra ADC apvilktā riņķa līnija krusto taisni AB punktā F. Pierādīt, ka $CE = BF$.



Atrisinājums. No punkta pakāpes izriet, ka

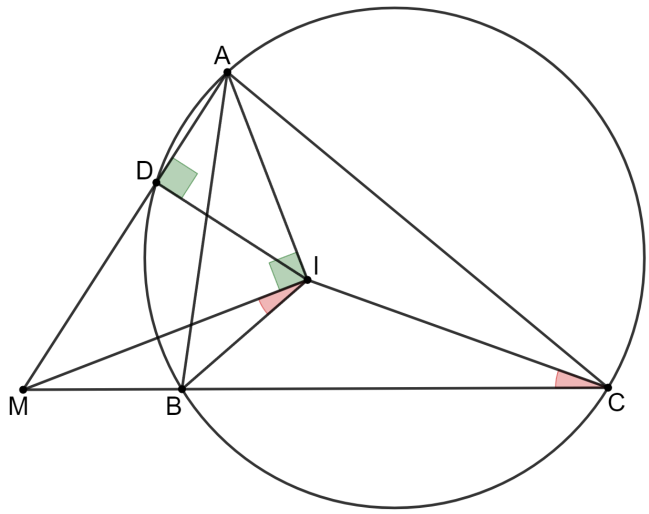
$$CE \cdot CA = CD \cdot CB \quad \text{un} \quad BF \cdot BA = BD \cdot BC$$

Izdalot abas sakarības, iegūstam, ka

$$\frac{CE}{BF} \cdot \frac{CA}{BA} = \frac{CD}{BD}$$

No bisektrises īpašības trijstūrī ABC mēs zinām, ka $\frac{CA}{BA} = \frac{CD}{BD}$, tāpēc secinām, ka $\frac{CE}{BF} = 1$, kas nozīmē, ka $CE = BF$.

2.uzdevums Dots trijstūris ABC, kura ievilktās riņķa līnijas centrs ir punkts I. Taisne, kas vilkta caur punktu I, perpendikulāri taisnei AI krusto taisni BC punktā M. Punkts D ir augstuma pamats, kas vilkts no I pret taisni AM. Pierādīt, ka punkts D atrodas uz trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas.



Atrisinājums. Ievērosim, ka trijstūris AIM ir taisnleņķa un ID ir augstums tajā, tāpēc no Eiklīda teorēmas izriet, ka

$$MA \cdot MD = MI^2$$

Atcerēsimies, ka no ievilktās riņķa līnijas centra īpašības seko, ka $\angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB$. Tas nozīme, ka $\angle MIB = \angle AIB - 90° = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle BCI$, līdz ar to taisne IM ir trijstūra BIC apvilktās riņķa līnijas pieskare. No pieskares īpašības izriet, ka

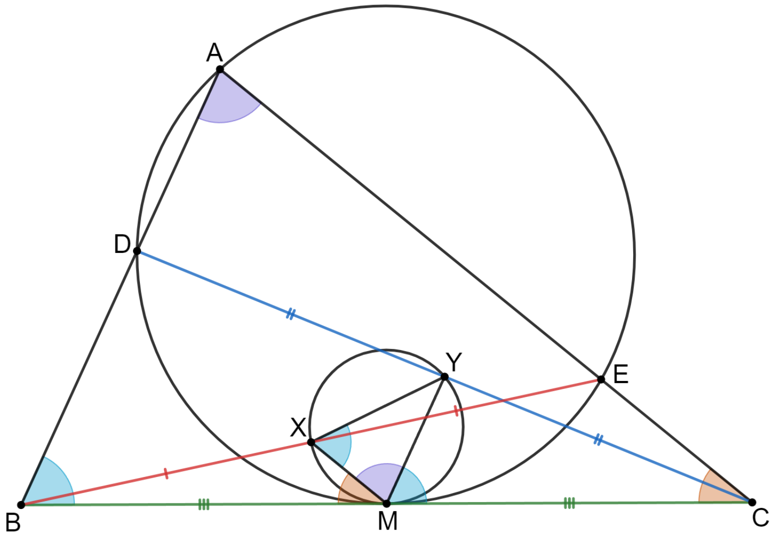
$$MI^2 = MB \cdot MC$$

Secinām, ka

$$MI^2 = MB \cdot MC = MA \cdot MD$$

No apgrieztās īpašības izriet, ka ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju, kas nozīmē, ka punkts D atrodas uz trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas, kas arī bija jāpierāda.

3.uzdevums Dots trijstūris ABC. Punkts M ir nogriežņa BC viduspunkts. Riņķa līnija ω iet caur punktiem M un A, pieskaras taisnei BC punktā M un krusto nogriežņus AB un AC attiecīgi punktos D un E. Punkti X un Y ir attiecīgi nogriežņu BE un CD viduspunkti. Pierādīt, ka trijstūra MXY apvilktā riņķa līnija un ω pieskaras.



Atrisinājums. No pieskares īpašības izriet, ka

$$BM^2 = BD \cdot BA \quad \text{un} \quad CM^2 = CE \cdot CA$$

Tā kā M ir nogriežņa BC viduspunkts, tad $BM = MC$. Līdz ar to secinām, ka

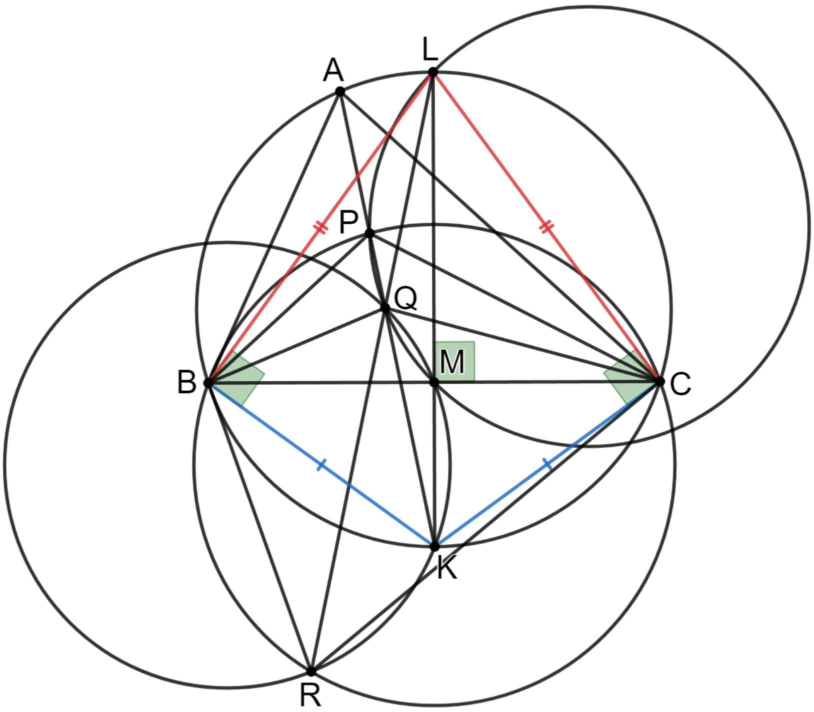
$$BM^2 = BA \cdot BD = CE \cdot CA \implies \frac{AB}{AC} = \frac{CE}{BD}$$

Ievērosim, ka MX un MY ir trijstūru BEC un BDC viduslīnijas, tāpēc $CE = 2MX$ un $BD = 2MY$. Secinām, ka

$$\frac{AB}{AC} = \frac{CE}{BD} = \frac{2MX}{2MY} = \frac{MX}{MY}$$

Piedevām $MX \parallel AC$ un $MY \parallel AB$, tāpēc $\angle BMX = \angle ACB$ un $\angle CMY = \angle ABC$. Tas nozīmē, ka $\angle XMY = \angle BAC$. No iegūtajiem rezultātiem izriet, ka $\triangle MXY \sim \triangle ABC$ pēc pazīmes *mlm*. Līdz ar to $\angle MXY = \angle ABC = \angle YMC$, kas nozīmē, ka taisne BC ir trijstūra MXY apvilktās riņķa līnijas pieskares. Taču taisne BC ir arī ω pieskare punktā M, tāpēc secinām, ka trijstūra MXY un ω apvilktās riņķa līnijas pieskaras.

4.uzdevums Dots trijstūris ABC. Punkts M ir nogriežņa BC viduspunkts. Nogriežņa BC vidusperpendikuls krusto trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju punktos K aun L ar īpašību, ka punkti K un A atrodas taisnes BC pretējās pusēs. Riņķa līnija, kas iet caur punktiem L un M krusto taisni AK punktos P un Q ar īpašību, ka punkts P atrodas uz nogriežņa AQ. Taisne LQ krusto trijstūra KMQ apvilkto riņķa līniju punktā R. Pierādīt, ka ap četrstūri $BPCR$ var apvilkt riņķa līniju.



Atrisinājums. Ievērosim, ka $KB = KC$ un $LB = LC$, jo tie atrodas uz nogriežņa BC vidusperpendikula. Piedevām KL ir nogriežņa ir trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas diametrs un $KL \perp BC$. Līdz ar to trijstūris KCL ir taisnleņķa trijstūris un CM ir augstums tajā, tāpēc no Eiklīda teorēmas izriet, ka

$$KB^2 = KC^2 = KM \cdot KL$$

No punkta pakāpes izriet, ka

$$KM \cdot KL = KP \cdot KQ$$

Secinām, ka

$$KC^2 = KP \cdot KQ = KB^2,$$

līdz ar to no apgrieztās īpašības izriet, ka KB un KC ir attiecīgi trijstūru BPQ un CPQ apvilkto riņķa līniju pieskares, kas nozīmē, ka

$$\angle KBQ = \angle KPB = \alpha \quad \text{un} \quad \angle KCQ = \angle KPC = \beta$$

No otras puses no Eiklīda teorēmas arī izriet, ka

$$LB^2 = LC^2 = LM \cdot LK$$

No punkta pakāpes izriet, ka

$$LM \cdot LK = LQ \cdot LR$$

Secinām, ka

$$LB^2 = LC^2 = LQ \cdot LR,$$

līdz ar to no apgrieztās īpašības izriet, ka LB un LC ir attiecīgi trijstūru RBQ un RCQ pieskares, kas nozīmē, ka

$$\angle LCQ = \angle CRQ = \gamma \quad \text{un} \quad \angle LBQ = \angle LRB = \delta$$

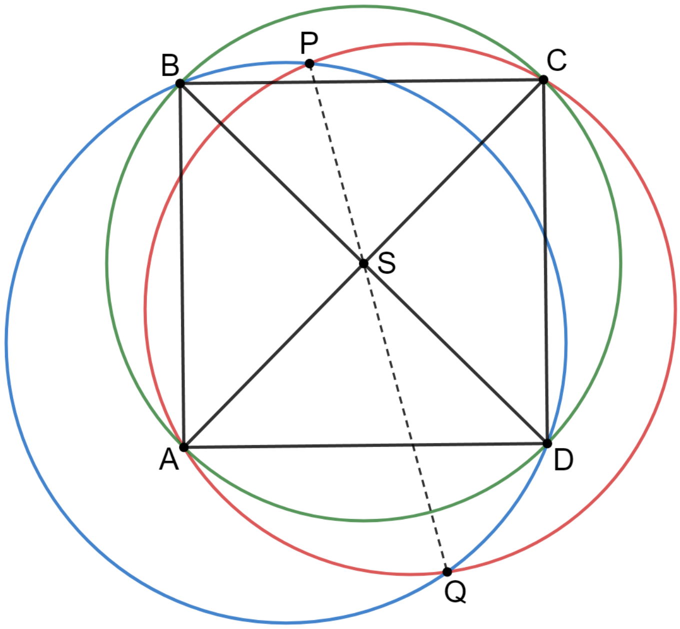
Ievērosim, ka

$$\begin{gathered}180^\circ = \angle LBK + \angle LCK = \\ = \angle LBQ + \angle KBQ + \angle LCQ + \angle KCQ = \\ = \alpha + \beta + \gamma + \delta = \\ = \angle BPK + \angle CPK + \angle BRQ + \angle BRQ = \\ = \angle BPC + \angle BRC,\end{gathered}$$

kas nozīmē, ka ap četrstūri $BPCR$ var apvilkt riņķa līniju, kas arī bija jāpierāda.

2.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums Dots kvadrāts $ABCD$, kura diagonāles krustojas punktā S. Riņķa līnijas k_1, k_2 iet attiecīgi caur punktiem A, C un B, D.Šīs divas riņķa līnijas krustojas divos dažādos punktos P un Q. Pierādīt, ka punkts S atrodas uz taisnes PQ.

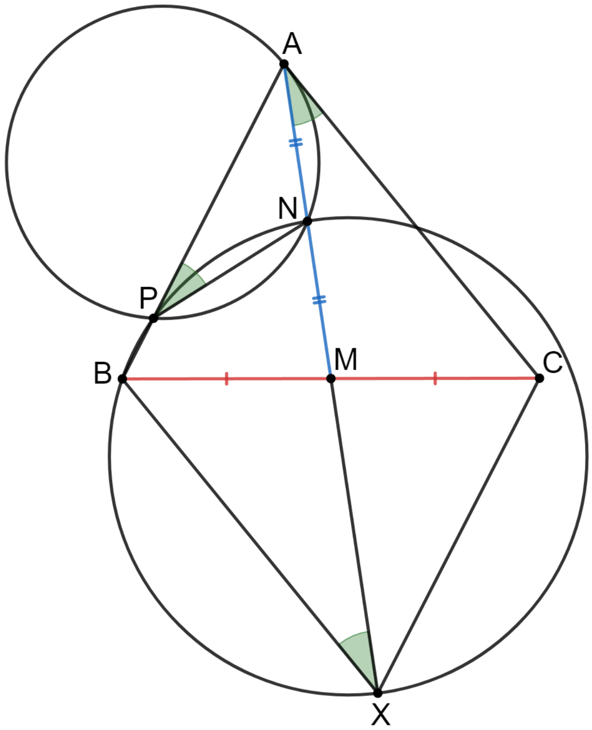


Atrisinājums. Ievērojam, ka ap kvadrātu $ABCD$ var apvilt riņķa līniju. No ievilkta četrstūra īpašības izriet, ka

$$SA \cdot SC = SB \cdot SD$$

taču $SA \cdot SC$ ir punkta S pakāpe attiecībā pret k_1 un $SB \cdot SD$ ir punkta S pakāpe attiecībā pret k_2. Tas nozīmē, ka punktam S ir vienāda pakāpe attiecībā pret k_1 un k_2, Līdz ar to punkt S atrodas uz k_1 un k_2 radikālas ass, kas ir taisne PQ pēc radikālas ass teorēmas. Prasītais ir pierādīts.

2.uzdevums Dots trijstūris ABC. Punkts M ir nogriežņa BC viduspunkts, savukārt punkts N ir nogriežņa AM viduspunkts. Riņķa līnijas, kas iet caur punktu N un pieskaras taisnei AC punktā A, krusto nogriezni AB punktā P. Pierādīt, ka trijstūra BPM apvilktā riņķa līnija pieskaras taisnei AM.



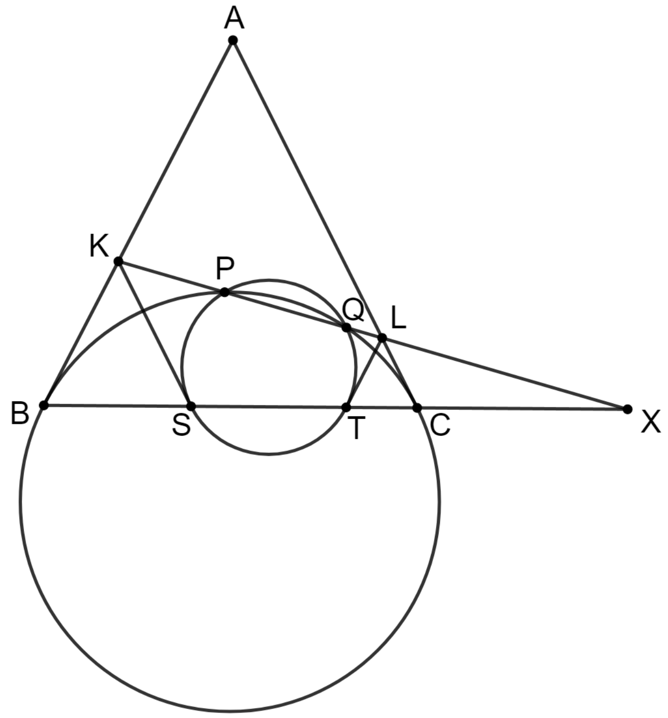
Atrisinājums. Atliksim tādu punktu X, ka $ABXC$ ir paralelograms. Tādā gadījumā punkts X atrodas uz taisnes AM un punkts M ir nogriežņa AX viduspunkts.

No pieskares īpašības izriet, ka $\angle APN = \angle CAN = AXB$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $PBXN$ var apvilkt riņķa līniju. No punkta pakāpes izriet, ka

$$AP \cdot AB = AN \cdot AX = AN \cdot 2AM = AM^2,$$

kur mēs izmantojām to, ka N ir nogriežņa AM viduspunkts, tāpēc $AM = 2AN$ un to, ka punkts M ir nogriežņa AX viduspunkts, tāpēc $AX = 2AM$. No apgrieztās pieskares īpašības izriet, ka AM ir trijstūra BPM apvilktās riņķa līnijas pieskare, kas arī bija jāpierāda.

3.uzdevums Dota riņķa līnija ω. No punkta A ir novilktas pieskares AB un AC. Taisne ℓ krusto nogriežņus AB un AC attiecīgi punktos K un L, savukārt riņķa līniju ω punktos P un Q. Punkti S un T ir izvēlēti uz nogriežņa BC ar īpašību, ka $KS \parallel AC$ un $LT \parallel AB$. Pierādīt, ka ap četrstūri $PQST$ var apvilkt riņķa līniju



Atrisinājums. Vispirms aplūkosim gadījumu, kad taisne KL nav paralēla ar BC. Ar X apzīmēsim taišņu KL un BC krustpunktu. Ievērosim, ka

$$XP \cdot XQ = XB \cdot XC$$

Tā kā $AB \parallel LT$, tad no Talesa teorēmas trijstūrī XBK izriet, ka

$$\frac{XT}{XB} = \frac{XL}{XK}$$

Tā kā $AC \parallel KS$, tad no Talesa teorēmas trijstūrī XKS izriet, ka

$$\frac{XC}{XS} = \frac{XL}{XK}$$

Secinām, ka

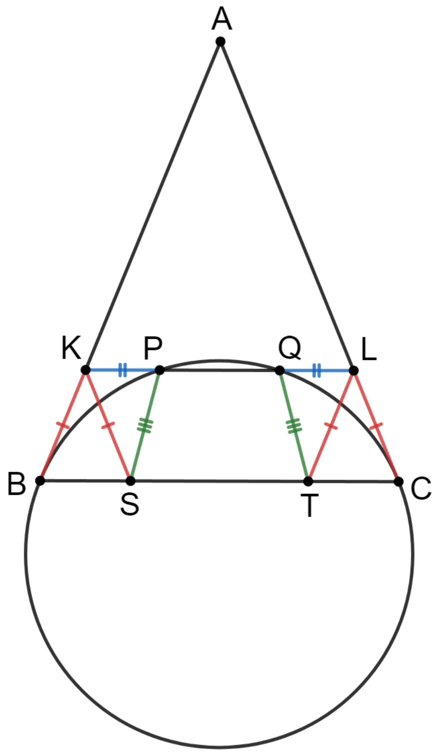
$$\frac{XL}{XK} = \frac{XC}{XS} = \frac{XT}{XB} \implies XB \cdot XC = XS \cdot XT$$

Līdz ar to

$$XP \cdot XQ = XB \cdot XC = XS \cdot XT$$

No apgrieztās īpašības izriet, ka ap četrstūri $PQST$ var apvilkt riņķa līniju, kas arī bija jāpierāda.

Aplūkosim gadījumu, kad $KL \parallel BC$.



Ievērojam, ka trijstūris ABC ir vienādsānu un pēc Talesa teorēmas trijstūris AKL arī ir vienādsānu, jo $\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AL}$. Tādēļ no simetrijas izriet, ka $KP = LQ$.

Tā kā $KS \parallel AC$ un $LT \parallel AB$, tad

$$\angle ABC = \angle ACB = \angle KSB$$

kas nozīmē, ka trijstūris BKS ir vienādsānu. Līdzīgi var pierādīt, ka arī trijstūris CLS ir vienādsānu. Līdz ar to

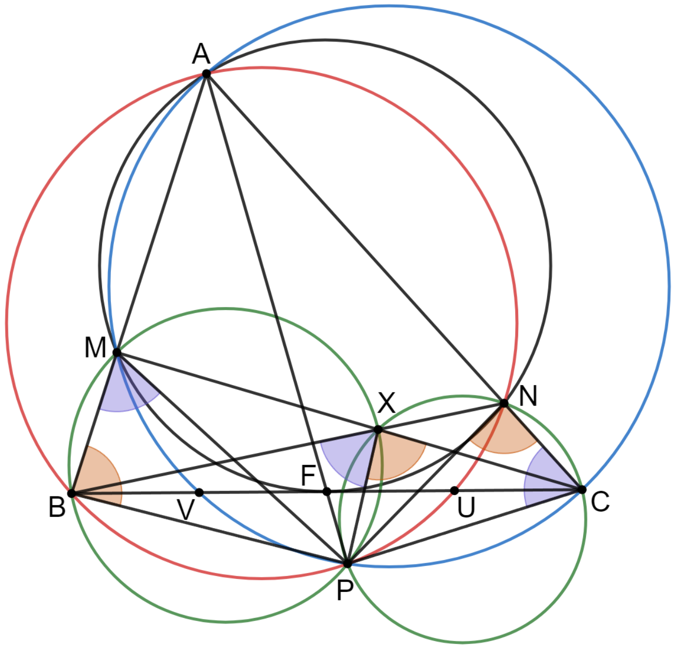
$$KS = KB = AB - AK = AC - AL = LC = LT$$

Pamanīsim arī, ka $\angle BKS = \angle BAC = \angle TLC$, jo $KS \parallel AC$ un $LT \parallel AB$. Secinām, ka

$$\angle PKS = 180^\circ - \angle AKL - \angle BKS = 180^\circ - \angle ALK - \angle TLC = \angle QLT$$

Izmantojot iegūto rezultātu var secināt, ka trijstūri PKS un QLT ir vienādi. Līdz ar to $PS = QT$. Tā kā $PQ \parallel ST$, tad $PQTS$ ir trapece, kas nozīmē, ka ap to var apvilkt riņķa līniju.

4.uzdevums Dots trijstūris ABC. Punkts F ir nogriežņa BC viduspunkts. Riņķa līnijas, kas iet caur punktu A un pieskaras taisnei BC punktā F krusto nogriežņus AB un AC attiecīgi punktos M un N. Taisnes CM un BN krustojas punktā X. Punkt P ir trijstūru BMX un CNX apvilkto riņķa līniju krustpunkts. Pierādīt, ka punkti A, F un P atrodas uz vienas taisnes.



Atrisinājums. Vispirms pierādīsim sekojošu apgalvojumu.

Apgalvojums. Ap četrstūriem $AMPC$ un $ANPB$ var apvilkt riņķa līnijas.
Pierādījums. Ievērosim, ka $\angle PCN = \angle PXB = \angle PMB$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $AMPC$ var apvilkt riņķa līniju, kur mēs izmantojām to, ka ap četrstūriem $CNXP$ un $BMXP$ var apvilkt riņķa līnijas. Līdzīgi varam iegūt, ka $\angle ABP = \angle PXC = \angle PNC$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $ABPN$ var apvilkt riņķa līniju.

Ievērosim, ka ap četrstūriem $AMPC$ un $ANPB$ apvilkto riņķa līniju radikālā ass ir taisne AP, līdz ar to, ja mēs pierādītu, ka punkts F arī atrodas uz šo divu riņķa līniju radikālās ass, tad uzdevums būtu atrisināts. Mums pietiek pierādīt, ka punkta F pakāpe attiecībā pret abām riņķa līnijām ir vienāda. Definēsim punktus U un V, kas ir nogriežņa BC un attiecīgi ap četrstūriem $ANPB$ un $AMPC$ apvilkto riņķa līniju krustpunkti. Ja mēs pierādītu, ka

$$FB \cdot FU = FV \cdot FC \iff FU = FV,$$

tad punktam F ir vienāda pakāpe pret abām riņķa līnijām un uzdevums ir atrisināts.
Ievērosim, ka no punkta B pakāpes attiecībā pret riņķa līniju, kas apvilkta ap četrstūri $AMPC$ izriet, ka

$$BM \cdot BA = BV \cdot BC$$

Savukārt no punkta B pakāpes attiecībā pret riņķa līniju, kas apvilkta ap četrstūri $AMFN$ izriet, ka

$$BM \cdot BA = BF^2$$

Secinām, ka $BF^2 = BV \cdot BC$. Līdzīgi varam iegūt, ka

$$CU \cdot CB = CF^2$$

Tā kā punkts F ir nogriežņa BC viduspunkts, tad

$$BF^2 = CF^2 = CU \cdot CB = BV \cdot BC \implies CU = BV \implies FU = FV,$$

kas arī bija jāpierāda.