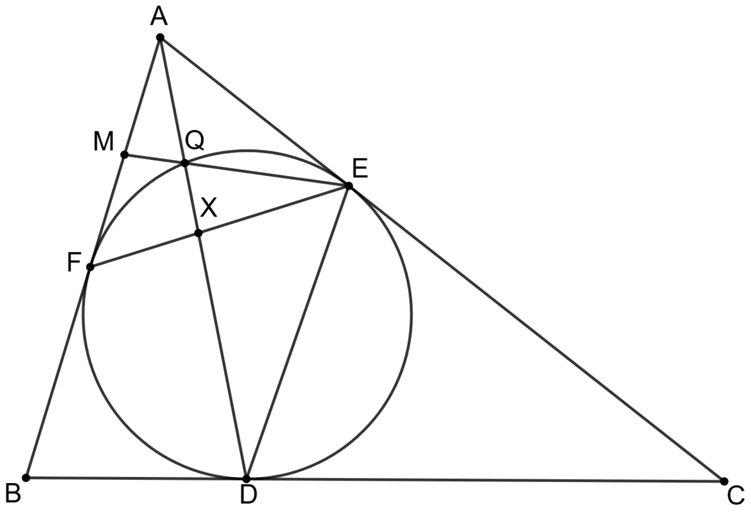
1.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums Ievilktā riņķa līnija trijstūrī ABC pieskaras malām BC, CA un AB attiecīgi punktos D, E un F. Ar Q apzīmēsim otru AD un ievilktās riņķa līnijas krustpunktu. Pierādiet, ka taisne EQ iet caur nogriežņa AF viduspunktu tad un tikai tad, ja $AC = BC$.



Atrisinājums. Pieņemsim, ka taisne EQ krusto nogriezni AF punktā M. Ar X apzīmēsim nogriežņu EF un AD krustpunktu. Pamanīsim, ka četrstūris $QEDF$ ir harmoniskais, kas nozīmē, ka $(D, Q; X, A) = -1$. Projicējot šos punktus uz taisni AB caur punktu E, iegūtam, ka

$$-1 = (D, Q; X, A) \stackrel{E}{=} (P, M; F, A),$$

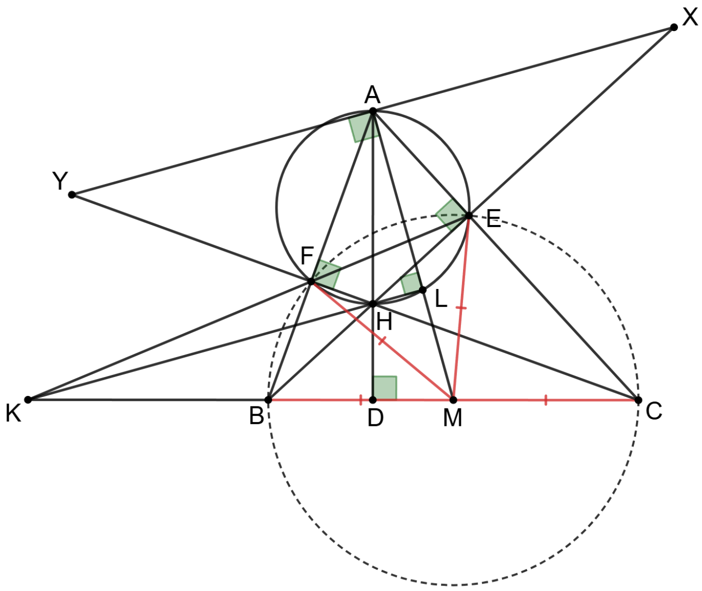
kur P ir taišņu AB un ED krustpunkts. Tas nozīmē, ka $(P, M; F, A)$ ir harmoniskais četrinieks. Sanāk, ka punkts M ir nogriežņa AF viduspunkts, tad un tikai tad, ja P ir punkts bezgalībā uz taisnes AB, jeb $AB \parallel ED$.

Tādējādi, mums paliek pierādīt, ka $AB \parallel ED$, tad un tikai tad, ja $AC = BC$. Tā kā CE un CD ir pieskares, tad $CE = CD$.

- ja $AB \parallel ED$, tad $\angle CED = \angle CAB$ un $\angle DCE = \angle BCA$, kas nozīmē, ka trijstūri DCE un BCA ir līdzīgi, no kā seko, ka $AC = BC$.
- ja $AC = BC$, tad no $CE = CD$ un $\angle DCE = \angle BCA$ seko, ka trijstūri DCE un BCA ir līdzīgi, no kā seko, ka $AB \parallel ED$.

Prasītais ir pierādīts.

2.uzdevums Dots šaurleņķa trijstūris ABC ar ortocentru H. Punkts M ir malas BC viduspunkts. Taisnes BH un CH krustojas ar taisni, kas vilkta caur punktu A un ir perpendikulāra AM, punktos X un Y, attiecīgi. Pierādiet, ka $AX = AY$.



Atrisinājums. Ar D, E un F apzīmēsim augstumu pamatus, kas ir vilkti attiecīgi no punktiem A, B un C. Sanāk, ka $\angle AFH = \angle AEH = 90°$, kas nozīmē, ka punkti A, E, H, F atrodas uz riņķa līnijas ar diametru AH. Nosauksim to par ω. Ar K apzīmēsim taišņu BC un EF krustpunktu un ar L apzīmēsim taisnes KH un ω krustpunktu.

No 2. fakta izriet, ka $(K, D; B, C) = -1$. Projicēsim šos punktus uz ω caur punktu H. Iegūstam, ka

$$-1 = (K, D; B, C) \stackrel{H}{=} (L, A; E, F).$$

Tā kā $\angle BFC = \angle BEC = 90°$, tad punkti B, F, E, C atrodas uz riņķa līnijas ar centru M. Ievērojam, ka

$$\angle FEM = \angle FEB + \angle BEM = \angle FCB + \angle EBM = \angle HCB + \angle HBC = 180° - \angle BHC =$$

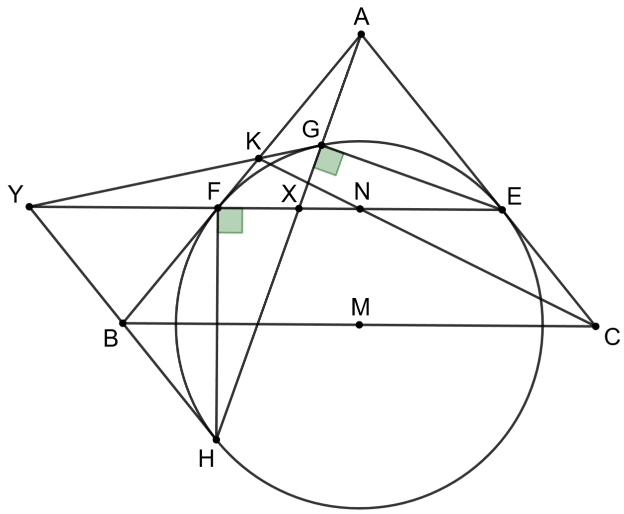
$$= 180° - \angle EHF = \angle EAF,$$

kur mēs izmantojām, ka $BM = EM$ kā rādiusi. Līdzīgi, $\angle EFM = EAF$, kas nozīmē, ka ME un MF pieskaras ω. Tā kā $LFAE$ ir harmoniskais četrstūris, tad punkti A, L, M atrodas uz vienas taisnes. Pamanīsim, ka $\angle ALH = 90°$, jo tas balstās uz diametru, no kā izriet, ka $KL \perp AM$. Tas nozīmē, ka $KL \parallel XY$, jo šīs abas taisnes ir perpendikulāras taisnes AM. Projicēsim punktus L, A, E, F uz taisni XY caur punktu H. Iegūstam, ka

$$-1 = (L, A; E, F) \stackrel{H}{=} (\infty_{XY}, A; X, Y)$$

kas nozīmē, ka punkts A ir nogriežņa XY viduspunkts, kas bija jāpierāda.

3.uzdevums Dots vienādsānu trijstūris ABC, kur $AB = AC$. Riņķa līnija Γ, kuras centrs atrodas malas BC viduspunktā M, pieskaras taisnēm AB un AC attiecīgi punktos F un E. Punkts G ir izvēlēts uz Γ tā, ka $\angle AGE = 90°$. Pieskares Γ, kas vilktas no punktiem G un F krustojas punktā K. Pierādiet, ka CK dala nogriezni EF uz pusēm.



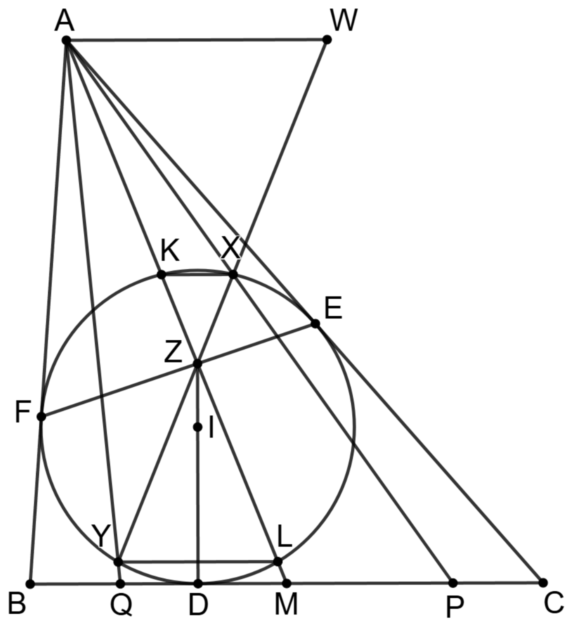
Atrisinājums. Ar H apzīmēsim punkta F attēlojumu attiecībā pret nogriezni BM. Ievērojam, ka $FH \perp BC$ un $BC \parallel FE$ (jo $AB = AC$), no kā izriet, ka $\angle EFH = \angle EGH = 90°$. Pēc uzdevuma nosacījumiem $\angle AGE = 90°$, no kā var secināt, ka punkti A, G, H atrodas uz vienas taisnes. Līdz ar to, četrstūris $FGEH$ ir harmoniskais.

Ar X apzīmēsim nogriežņu AH un EF krustpunktu. No punkta H definīcijas izriet, ka taisne BH arī pieskaras Γ. Pēc harmoniskā četrstūra īpašības, taisnes BH, KG un FE krustojās vienā punktā (nosauksim šo punktu par Y), un $(G, H; X, A) = -1$. Projicējot šos punktus caur attiecīgajiem punktiem, dabūjām, ka

$$-1 = (G, H; X, A) \stackrel{Y}{=} (K, B; F, A) \stackrel{C}{=} (N, \infty_{EF}; F, E),$$

kur N ir nogriežņu CK un EF krustpunkts. No tā izriet, ka N dala nogriezni EF uz pusēm, kas bija jāpierāda.

4.uzdevums. Trijstūrī ABC punkts M ir malas BC viduspunkts, un γ ir ievilktā riņķa līnija. Trijstūra ABC mediāna AM krusto ievilkto riņķa līniju γ divos punktos K un L. Taisnes, kas iet caur punktiem K un L un ir paralēlas BC, atkal krusto ievilkto riņķa līniju γ divos punktos X un Y. Taisnes AX un AY atkal krusto BC punktos P un Q. Pierādiet, ka $BP = CQ$.



Atrisinājums. Ar I apzīmēsim trijstūrī ABC ievilktas riņķa līnijas centru, un ar D, E, F attiecīgi apzīmēsim tās pieskaršanās punktus malām BC, CA, AB. Apzīmēsim nogriežņu AM un FE krustpunktu ar Z. No lemmas no 2. mājasdarba, 3. uzdevuma, punkts Z atrodas uz taisnes DI. Pamanīsim, ka taisne XY ir taisnes KL atspoguļojums attiecībā pret taisni DI, kas, kā iepriekš pierādījām, iet caur punktu Z, kas nozīmē, ka punkts Z pieder arī taisnei XY.

Ievērojam, ka četrstūris $KELF$ ir harmoniskais, kas nozīmē, ka $(A, Z; K, L) = -1$. Ar W apzīmēsim taisnes, kas iet caur punktu A un ir paralēla taisnei BC, krustpunktu ar taisni XY. Projicējot punktus A, Z, K, L caur attiecīgajiem punktiem, iegūstam, ka

$$-1 = (A, Z; K, L) \overset{\infty_{BC}}{=} (W, Z; X, Y) \overset{A}{=} (\infty_{BC}, M; P, Q).$$

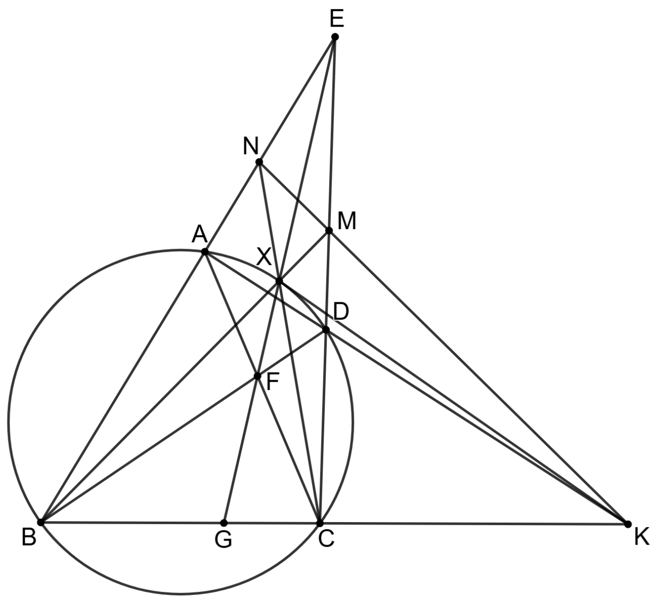
Tā kā $(\infty_{BC}, M; P, Q) = -1$, tad punkts M ir nogriežņa PQ viduspunkts jeb $MP = MQ$. Pēc uzdevuma nosacījumiem $BM = CM$, no kā izriet, ka

$$BP = BM + MP = CM + MQ = CQ,$$

kas bija jāpierāda.

2.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums Četrstūris $ABCD$ ir ievilts riņķa līnijā ω. Punkts F ir taišņu AC un BD krustpunkts, un punkts E ir taišņu AB un CD krustpunkts. Nogrieznis EF krustojas ar ω punktā X. Punkts M ir taišņu BX un CD krustpunkts, un punkts N ir taišņu CX un AB krustpunkts. Pierādiet, ka taisnes MN un BC krustojas uz ω pieskares, kas vilkta caur punktu X.

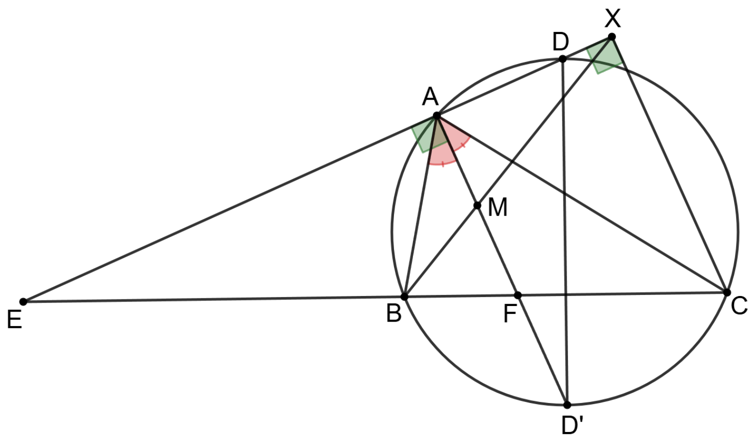


Atrisinājums. Ar G un H attiecīgi apzīmēsim taisnes EF krustpunktu ar taisni BC un ω. Uz taisnes BC atliksim tādu punktu K, ka $(B,C;G,K) = -1$. Tā kā trijstūri BEC čeviānas BD, EG un CA krustojas vienā punktā, tad taisnes AD un BC krustojās tādā punktā K', ka $(B,C;G,K') = -1$. No dubulto attiecību īpašības izriet, ka $K = K'$. Secinām, ka taisne AD krusto taisni BC punktā K. Līdzīgi dabūjam, ka arī taisne MN krusto taisni BC punktā K.

Paliek pierādīt, ka KX pieskaras ω. Pēc Brokara teorēmas taisne EF ir polāre punktam K, un tā kā punkts X ir taisnes EF un ω krustpunkts, tad KX ir pieskare ω, kas bija jāpierāda.

Piezīme. Vairāk par Brokara teorēmu var palasīt šeit.

2.uzdevums Dots trijstūris ABC. Punkts D ir loka BAC viduspunkts trijstūra ABC apvilktai riņķa līnijā. Punkts X atrodas uz taisnes AD tā, ka $\angle CXA = 90°$. Leņķa $\angle BAC$ bisektrise krusto malu BC punktā F. Pierādiet, ka BX dala nogriezni AF uz pusēm.



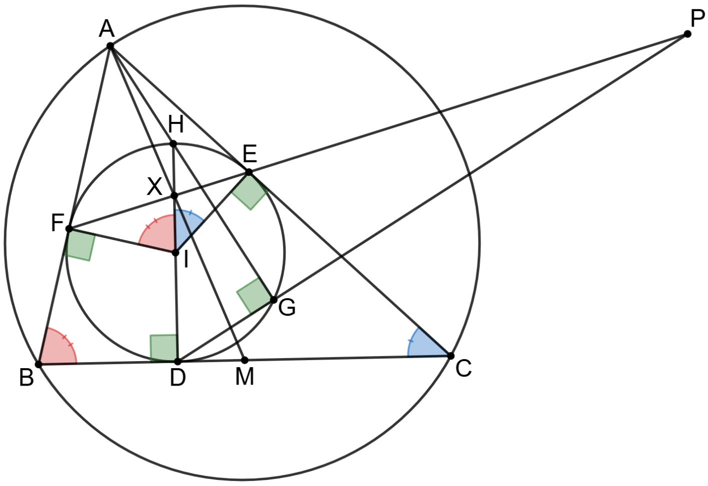
Atrisinājums. Ar E apzīmēsim nogriežņa XA pagarinājuma krustpunktu ar taisni BC, un ar D' apzīmēsim nogriežņa AF pagarinājuma krustpunktu ar trijstūram ABC apvilktajai riņķa līnijai. Tā kā AD' ir leņķa $\angle BAC$ bisektrise, tad D' ir loka BC viduspunkts. Tādējādi D un D' ir pretēji punkti trijstūram ABC apvilktajā riņķa līnijā. Līdz ar to, $\angle DAD' = 90°$.

Tātad $\angle EAF = 90°$, $\angle BAF = \angle CAF$, no kā izriet, ka $(E, F; B, C) = -1$. Tā kā $AF \parallel AX$ un pēc uzdevuma nosacījumiem arī $AF \parallel XC$, tad $AF \perp XC$. Līdz ar to, projicējot punktus E, F, B, C caur punktu X uz taisni AF sanāk, ka

$$-1 = (E, F; B, C) \stackrel{X}{=} (A, F; M, \infty_{AF}),$$

kur M ir nogriežņu AF un BX krustpunkts. Esam ieguvuši, ka $(A, F; M, \infty_{AF}) = -1$, kas nozīmē, ka punkts M ir nogriežņa AF viduspunkts, kas pierada prasīto.

3.uzdevums Dots dažādmalu trijstūris ABC. Ievilktā riņķa līnija trijstūrī ABC pieskaras malām BC, CA un AB punktos D, E un F, attiecīgi. Punkts G atrodas uz trijstūra ABC ievilktās riņķa līnijas tā, ka $\angle AGD = 90°$. Ja taisnes DG un EF krustojas punktā P, pierādiet, ka $AP \parallel BC$.



Atrisinājums. Ar H apzīmēsim punkta D atspoguļojums attiecība pret trijstūrī ABC ievilktas riņķa līnijas centram. Tad DH ir tās diametrs, kas nozīmē, ka $\angle DGH = 90° = \angle AGD$. Līdz ar to punkts H atrodas uz nogriežņa AG.

Pamanīsim, ka četrstūris $GEHF$ ir harmoniskais, jo AE un AF ir pieskares. No tā izriet, ka $(H, G; E, F) = -1$. Pieņemsim, ka taisnes AP un BC krustojas punktā Y. Projicējot punktus H, G, E, F caur attiecīgajiem punktiem, sanāk

$$-1 = (H, G; E, F) \stackrel{D}{=} (X, P; E, F) \stackrel{A}{=} (M, Y; C, B),$$

kur M ir taišņu AX un BC krustpunkts. Ievērojam, ka ja $Y = \infty_{BC}$, tad $AP \parallel BC$.

Lemma. Punkts M ir nogriežņa BC viduspunkts.
Pierādījums. Apzīmēsim $\angle EAX$ ar α_1 un $\angle FAX$ ar α_2. Tad

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB \cdot \sin \alpha_2}{AC \cdot \sin \alpha_1} \quad \text{un} \quad \frac{XE}{XF} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2},$$

jo $AE = AF$ kā pieskares. Līdzīgi,

$$\frac{XE}{XF} = \frac{\sin \angle XIE}{\sin \angle XIF} = \frac{\sin \angle ECD}{\sin \angle FBD} = \frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{AC},$$

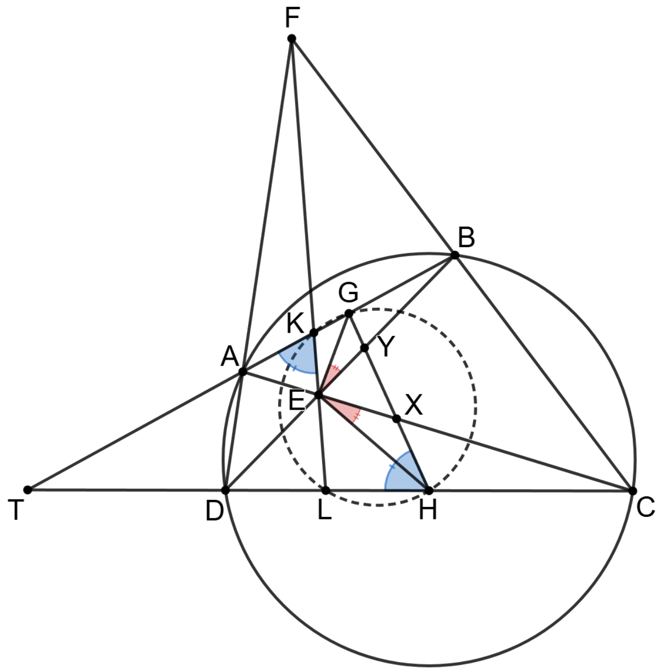
kur mēs izmantojam, ka $IE = IF$ kā ievilktas riņķa līnijas rādiusi, un ka četrstūri $BFID$ un $CEID$ ir ievilkti. Sanāk, ka

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{XF}{XE} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1,$$

no kā izriet, ka $MB = MC$ jeb M ir nogriežņa BC viduspunkts.

Tā kā $(M, Y; C, B) = -1$ un M ir nogriežņa BC viduspunkts, tad Y ir ∞_{BC}, kas dod prasīto.

4.uzdevums Dots ievilts četrstūris $ABCD$. Punkts E ir taišņu AC un BD krustpunkts, un punkts F ir taišņu AD un BC krustpunkts. Nogriežņu AB un CD viduspunkti ir attiecīgi G un H. Pierādiet, ka taisne EF pieskaras trijstūrim EGH apvilktai riņķa līnijai.



Atrisinājums. Ar T apzīmēsim taišņu AB un CD krustpunktu un ar K un L attiecīgi apzīmēsim taisnes EF krustpunktu ar malām AB un CD. No 2. fakta izriet, ka $(T, L; D, C) = -1$, un projicējot šos punktus uz taisni AB caur punktu F, iegūstam

$$-1 = (T, L; D, C) \stackrel{F}{=} (T, K; A, B).$$

Pielietojot 5. faktu punktiem T, L, D, C, secinām, ka

$$TC \cdot TD = (TH + HC) \cdot (TH - HC) = TH^2 - HC^2 = TH^2 - HL \cdot HT =$$

$$= TH \cdot (TH - HL) = TH \cdot TL.$$

Līdzīgi varam dabūt, ka

$$TA \cdot TB = TK \cdot TG.$$

Taču no punkta T pakāpes attiecībā pret ap četrstūri $ABCD$ apvilkto riņķa līniju izriet, ka

$$TA \cdot TB = TC \cdot TD.$$

Secinām, ka $TH \cdot TL = TK \cdot TG$, kas nozīmē, ka četrstūris $KGHL$ ir ievilkts. No tā izriet, ka

$$\angle GHD = \angle GHL = \angle LKT.$$

Ievērojam arī, ka $\angle ABE = \angle DCE$ un $\angle BAE = \angle CDE$, kas nozīmē, ka trijstūri ABE un DEC ir līdzīgi, no kā izriet, ka $\angle CEH = \angle BEG$ kā leņķi starp attiecīgo malu un mediānu līdzīgos trijstūros. Tagad varam secināt, ka

$$\angle GHE = \angle CXH - \angle CEH = (\angle GHD - \angle ACD) - \angle CEH = (\angle LKT - \angle ABD) - \angle BEG =$$

$$= \angle BEK - \angle BEG = \angle GEF,$$

kas dod prasīto.