Projektīvā ģeometrija

Alfrēds Saročinskis, Kims Georgs Pavlovs

1 Ievads

Projektīvā ģeometrija matemātikas olimpiādēs ir aizraujoša un intelektuāli stimulējoša tēma, kas pēdējos gados nezaudē savu popularitāti. Šī ģeometrijas nozare pēta īpašības un attiecības starp ģeometriskiem objektiem, kas saglabājas projekciju rezultātā, tādējādi atklājot dziļākas sakarības, kas nav acīmredzamas.

Projektīvā ģeometrija ļauj dalībniekiem risināt problēmas, kas saistītas ar punktiem, taisnēm un plaknēm, izmantojot projektīvus pārveidojumus. Tas nodrošina jaunas stratēģijas un pieejas problēmu risināšanā, kas var būt noderīgas matemātikas olimpiādes visos grūtības līmeņos, tajā skaitā starptautiskajā līmenī.

2 Definīcijas un pamatfakti

Definīcija. Doti četri punkti A, B, C, D, kas atrodas uz vienas taisnes. Par punktu A, B, C, D dubulto attiecību sauc izteiksmes $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \div \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$ vērtību, ko apzīmē ar $(A, B; C, D)$. Ja $(A, B; C, D) = -1$, tad $(A, B; C, D)$ sauc par harmonisko četrinieku.

Piezīme. Ar $\overrightarrow{AB}$ apzīmē nogriežņa AB garumu ar zīmi atkarībā no virziena, tas ir, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Piemēri:

- Ja punkti A, B, C, D atrodas uz vienas taisnes tieši šādā secībā, tad visiem četriem virzītiem nogriežņiem $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}$ būs vienāda zīme, jo punkti A un B atrodas vienā pusē attiecībā gan pret punktu C, gan pret punktu D, kas nozīmē, ka izteiksmes $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \div \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$ vērtība ir pozitīva.
- Ja punkti A, C, B, D atrodas uz vienas taisnes tieši šādā secībā, tad joprojām virzītiem nogriežņiem $\overrightarrow{DA}$ un $\overrightarrow{DB}$ būtu vienāda zīme, jo punkti A un B atrodas vienā pusē attiecībā pret punktu D, bet virzītiem nogriežņiem $\overrightarrow{CA}$ un $\overrightarrow{CB}$ būtu dažādas zīmes, jo punkti A un B atrodas dažādās pusēs attiecībā pret punktu C. Līdz ar to, izteiksme $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$ ir negatīva, bet izteiksme $\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$ ir pozitīva, kas kopā nozīmē, ka izteiksmes $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \div \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$ vērtība ir negatīva.

Noderīgs novērojums. Ievērojam, ka, veicot algebriskus pārveidojumus, var dabūt sekojošas sakarības:

$$(A, B; C, D) = (B, A; D, C) = (C, D; A, B) = (D, C; B, A)$$

$$(A, B; D, C) = (D, A; C, D) = (C, D; B, A) = (D, C; A, B) = \frac{1}{(A, B; C, D)}$$

Ievērojam arī, ka visas šīs izteiksmes ir vienādas ar -1, tiklīdz kaut viena no tām ir vienāda ar -1.

1.fakts. Ja punkti A, B, C, D, D' atrodas uz vienas taisnes tieši šajā secībā un $(A, B; C, D) = (A, B; C, D')$, tad punkti D un D' sakrīt.

Pierādījums. Ja $(A, B; C, D) = (A, B; C, D')$, tad no definīcijas izriet, ka

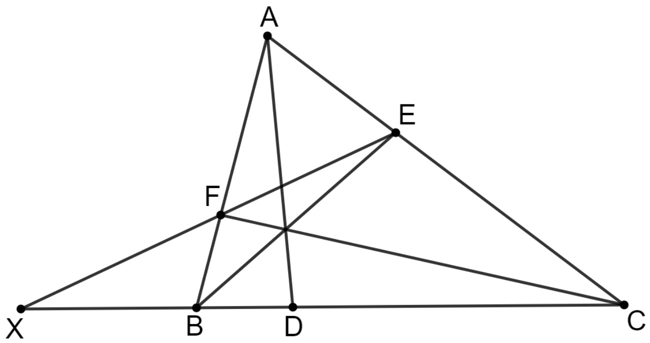
$$\frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD'}{BD'} \implies \frac{AD}{BD} = \frac{AD'}{BD'}$$

Tā kā mēs zinām punktu savstarpējo novietošanu, mēs varam pārrakstīt doto vienādību sekojoši:

$$\frac{AB + BD}{BD} = \frac{AB + BD'}{BD'} \implies \frac{AB}{BD} + 1 = \frac{AB}{BD'} + 1 \implies BD = BD' \implies D = D'.$$

Piezīme. Līdzīgi var pierādīt, piemēram, to, ka, ja $(A, B, C, D) = (A, B, C', D)$ un punkti A, B, C, C', D atrodas uz vienas taisnes tieši šādā secībā, tad punkti C un C' sakrīt.

2.fakts. Dots trijstūris $\triangle ABC$. Punkti D, E, F atrodas attiecīgi uz nogriežņiem BC, CA, AB. Ar X apzīmēsim taišņu BC un EF krustpunktu. Tad $(X, D; B, C) = -1$, tad un tikai tad, ja taisnes AD, BE, CF krustojas vienā punktā.



Pierādījums. Vispirms pierādīsim, ja taisnes AD, BE, CF krustojas vienā punktā, tad $(X, D, B, C) = -1$. No Menelaja teorēmas trijstūrim $\triangle ABC$ un punktiem E, F, X izriet, ka

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CE}{AE} = 1 \qquad (1)$$

Savukārt no Čevas teorēmas taisnēm AD, BE, CF izriet, ka

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1 \qquad (2)$$

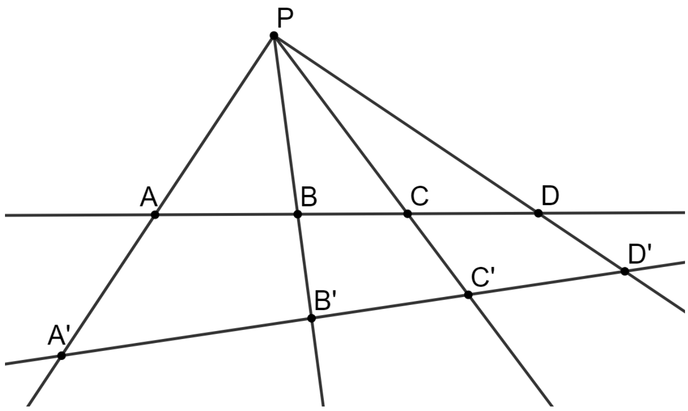
Izdalot izteiksmi (1) ar izteiksmi (2), iegūsim, ka

$$\frac{BX}{CX} \div \frac{BD}{CD} = 1,$$

un tā kā mēs zinām punktu X, D, B, C savstarpējo novietojumu, mēs varam secināt, ka $(X, D; B, C) = -1$, kas arī bija jāpierāda.

Ja $(X, D; B, C) = -1$, tad pierādīt to, ka taisnes AD, BE, CF krustojas vienā punktā var izmantojot apgriezto Čevas teorēmu. Detaļas paliek lasītājam kā vingrinājums.

3.fakts. Doti četri punkti A, C, B, D, kas visi atrodas uz taisnes l_1 tieši šādā secībā. Dots patvaļīgs punkts P, kas neatrodas uz l_1 un patvaļīga taisne l_2, kas neiet caur P. Pieņemsim, ka taisnes PA, PB, PC, PD krustojas ar l_2 attiecīgi punktos A', B', C', D'. Tad $(A, B; C, D) \overset{P}{=} (A', B', C', D')$



Pierādījums. Izmantojot sinusu teorēmu trijstūriem $\triangle APC, \triangle APD, \triangle BPC, \triangle BPD$, var iegūt sekojošas sakarības:

$$\frac{AC}{AP} = \frac{\sin(\angle APC)}{\sin(\angle ACP)}, \frac{AP}{AD} = \frac{\sin(\angle ADP)}{\sin(\angle APD)}, \frac{BP}{BC} = \frac{\sin(\angle BCP)}{\sin(\angle BPC)}, \frac{BD}{BP} = \frac{\sin(\angle BPD)}{\sin(\angle BDP)}$$

Tā kā $\sin(\angle ACP) = \sin(\angle BCP)$ un $\sin(\angle ADP) = \sin(\angle BDP)$, sareizinot visas četras sakarības un saīsinot, iegūstam, ka

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(\angle APC)}{\sin(\angle BPC)} : \frac{\sin(\angle APD)}{\sin(\angle BPD)}$$

taču no punktu A', B', C', D' definīcijas seko, ka $\angle APC = \angle A'PC', \angle BPC = \angle B'PC', \angle APD = \angle A'PD', \angle BPD = \angle B'PD'$, kas nozīmē, ka

$$\frac{\sin(\angle APC)}{\sin(\angle BPC)} : \frac{\sin(\angle APD)}{\sin(\angle BPD)} = \frac{\sin(\angle A'PC')}{\sin(\angle B'PC')} : \frac{\sin(\angle A'PD')}{\sin(\angle B'PD')}$$

Taču veicot līdzīgus spriedumus uz citu pusi, sanāks, ka

$$\frac{\sin(\angle A'PC')}{\sin(\angle B'PC')} : \frac{\sin(\angle A'PD')}{\sin(\angle B'PD')} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = (A', B'; C', D')$$

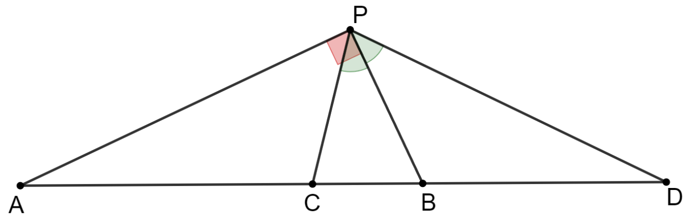
Tā kā punktu savstarpējais novietojums nemainās, tad nemainās arī dubulto attiecību zīme, līdz ar ko $(A, B; C, D) \overset{P}{=} (A', B'; C', D')$ kas bija jāpierāda.

Piezīme 1. Šīs rezultāts ir ļoti svarīgs uz bieži izmantojams, it īpaši, kad $(A, B; C, D)$ ir harmoniskais četrinieks. Ar citiem vārdiem šo faktu var saprast sekojoši: projicējot caur fiksēto punktu četrus punktus no vienas taisnes uz otro, to dubultas attiecības nemainās.

Piezīme 2. Ja kādi punkti, teiksim A, B, C, D, tiek projicēti caur kādu punktu, teiksim P, rezultātā dabūjot punktus A', B', C', D', dubulto attiecību saglabāšanu pierakstā parasti virs vienādības zīmes raksta punktu, caur kuru tika veikta projicēšana. To uzskata par labu stilu un palīdz vieglāk uztvert uzrakstīto.

4.fakts. Doti punkti A, C, B, D, kas visi atrodas uz vienas taisnes tieši šādā secībā un punkts P, kas uz tās neatrodas. Tad, ja jebkuri divi apgalvojumi ir patiesi, tad trešais arī ir patiess:

- $(A, B; C, D)$ ir harmoniskais četrinieks. (1)
- PB ir leņķa $\angle CPD$ bisektrise. (2)
- $\angle APB = 90°$. (3)



Pierādījums.

- Pierādīsim, ka $(1), (2) \implies (3)$. No iepriekšēja pierādījuma, mēs zinām, ka

$$(A, B; C, D) = \frac{\sin(\angle APC)}{\sin(\angle BPC)} : \frac{\sin(\angle APD)}{\sin(\angle BPD)}$$

  Tātad, ja $(A, B; C, D) = -1$ un $\angle BPC = \angle BPD$, tad $\sin(\angle APC) = \sin(\angle APD)$. Tā kā šie leņķi acīmredzami nav vienādi, secinām, ka $\angle APC = 180^\circ - \angle APD$. Līdz ar to

$$180^\circ = \angle APC + \angle APD = \angle APC + (\angle APC + \angle CPD) = 2\angle APC + 2\angle BPC = 2\angle APB$$

  kas nozīmē, ka $\angle APB = 90^\circ$.

- Pierādīsim, ka $(2), (3) \implies (1)$. Ja $\angle APB = 90^\circ$ un $\angle BPC = \angle BPD$, tad

$$\angle APC + \angle APD = \angle APC + (\angle APC + \angle CPD) = 2\angle APC + 2\angle BPC = 2\angle APB = 180^\circ$$

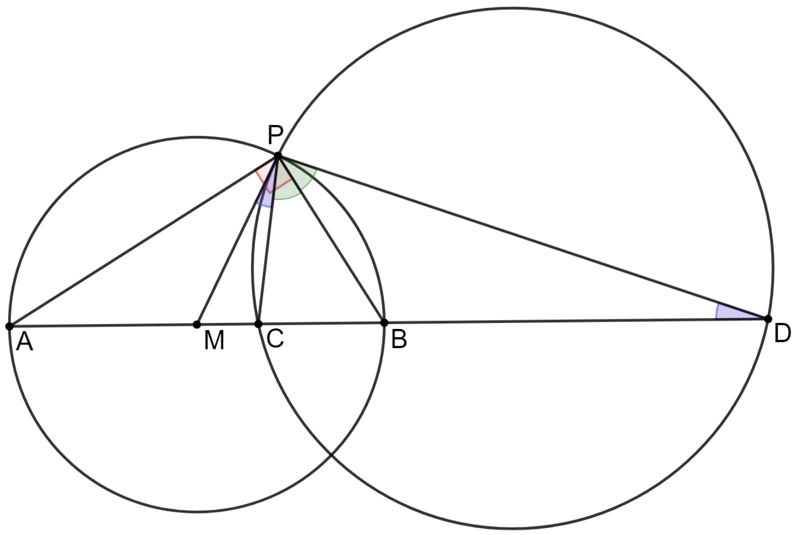
  jeb $\sin(\angle APC) = \sin(\angle APD)$, kas kopā ar $\angle BPC = \angle BPD$ dod, ka

$$1 = \frac{\sin(\angle APC)}{\sin(\angle BPC)} : \frac{\sin(\angle APD)}{\sin(\angle BPD)} = (A, B; C, D)$$

  kas nozīmē, ka $(A, B; C, D)$ ir harmoniskais četrinieks.

- Pierādīsim, ka $(1), (3) \implies (2)$. Uz taisnes AB izvēlēsimies tādu punktu D', ka $\angle BPC = \angle BPD'$. Tad punktiem A, C, B, D' izpildās (2) un (3), kas pēc iepriekš pierādītā nozīmē, ka $(A, B; C, D') = 1 = (A, B; C, D)$. Izmantojot 1. faktu, secinām, ka $D = D'$ jeb PB ir leņķa $\angle CPD$ bisektrise.

5.fakts. Doti punkti A, C, B, D, kas atrodas uz vienas taisnes tieši šādā secībā ar īpašību, ka $(A, B; C, D)$ ir harmoniskais četrinieks. Ja punkts M ir nogriežņa AB viduspunkts, tad $AM^2 = MC \cdot MD$.



Pierādījums. Novilksim riņķa līniju ω ar centru M un rādiusu AM un atliksim uz tās patvaļīgu punktu P. Tā kā AB ir šīs riņķa līnijas diametrs un uz to balstās $\angle APB$, secinām, ka $\angle APB = 90°$. No 4. fakta izriet, ka $\angle BPC = \angle BPD$. Tā kā $AM = AP$ kā ω rādiusi, pietiek pierādīt, ka $AP^2 = MC \cdot MD$.

Ievērojam, ka arī $MP = MB$ kā ω rādiusi, līdz ar ko $\angle MPB = \angle MBP$. Taču $\angle MBP$ ir trijstūra BPC ārējais leņķis, kas nozīmē, ka $\angle MBP = \angle BPD + \angle BDP$. Neaizmirstot, par to, ka $\angle BPC = \angle BPD$, sanāk, ka

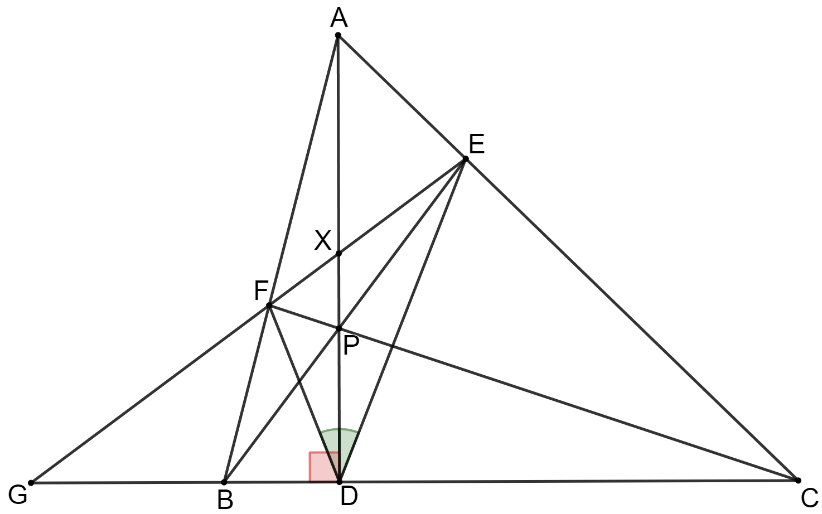
$$\angle MPC + \angle BPC = \angle MPB = \angle MBP = \angle BPD + \angle BDP$$

$$\angle MPC = \angle BDP$$

kas nozīmē, ka AP ir pieskare riņķa līnijai, kas ir apvilkta trijstūrim $\triangle CPD$ jeb $AP^2 = MC \cdot MD$. Prasītais ir pierādīts.

3 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs. Dots šaurleņķu trijstūris ABC ar augstumu AD, uz kura ir atlikts punkts P. Taisnes BP un CP krusto taisnes AC un AB attiecīgi punktos E un F. Pierādīt, ka $\angle ADE = \angle ADF$.



Atrisinājums. Pieņemsim, ka taisne EF krusto taisnes AD un BC attiecīgi punktos X un G. Tā kā uzdevuma konstrukcijā parādās 3. fakts, secinām, ka $(B, C; D, G) = -1$.

Tagad izmantojot 4. fakta rezultātu, projicēsim punktus B, C, D, G uz taisni EF caur punktu A. Taisnes AB, AC, AD krustojas ar taisni EF attiecīgi punktos F, E, X, kas kopumā nozīmē, ka pēc šādas projicēšanas punktu B, C, D attiecīgie projicēšanas punkti ir F, E, X. Ievērojam, ka punktam G attiecīgi būtu jāprojicējas uz taišņu AG un EF krustpunktu, kas arī ir punkts G, kas nozīmē kā ar šādu projicēšanu punkts G projicējas pats uz sevi.

Saliekot visu kopā un atceroties, ka pēc projicēšanas dubultas attiecības nemainās (4. fakts), secināsim, ka

$$(F, E; X, G) \stackrel{A}{=} (B, C; D, G) = -1$$

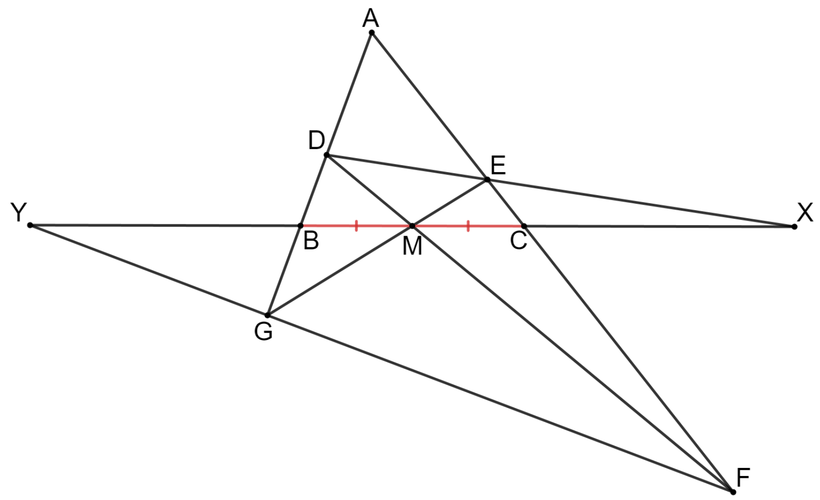
līdz ar ko

$$(G, X; F, E) = \frac{1}{(F, E; X, G)} = -1$$

kas kopā ar to, ka $\angle XDG = 90°$ pēc 5.fakta dod mums $\angle ADE = \angle XDE = \angle XDF = \angle ADF$, kas bija jāpierāda.

Piezīme. Tā kā zīmējumā parādās kaut kas līdzīgs 5. faktam, tas motivē dabūt tam nepieciešamus nosacījumus. Tā kā $\angle XDG = 90°$ un uzdevumā tiek prasīts pierādīt, ka $\angle ADE = \angle ADF$, ir vērts sākumā mēģināt pierādīt, ka $(G, X; F, E) = -1$. Taču kā to izdarīt pa taisno nav saprotams, kas motivē sākumā atrast kādu citu harmonisko četrinieku un tad veikt dažādas projekcijas, kas iedotu mums prasīto rezultātu.

2.piemērs. Dots šaurleņķu trijstūris ABC. Punkts M ir nogriežņa BC viduspunkts. Uz nogriežņiem AB un AC attiecīgi atlikti punkti D un E. Taisnes DM un EM krusto taisnes AC un AB attiecīgi punktos F un G. Punkti X un Y ir attiecīgi taišņu DE un FG krustpunkti ar taisni BC. Pierādīt, ka $MX = MY$.



Atrisinājums. Projicēsim punktus B, C, M, X uz taisni AC caur punktu D. Šie punkti attiecīgi projicēsies uz punktos A, C, F, E. Izmantojot 3.faktu, mēs varam izsecināt, ka

$$(B, C; M, X) \stackrel{D}{=} (A, C; F, E)$$

Līdzīgi spriežot, projicēsim tālāk punktus A, C, F, E uz taisni AB caur punktu M un rezultējošos punktus projicēsim uz taisni BC caur punktu F. Līdz ar ko, kopā sanāk, ka

$$(A, C; F, E) \stackrel{M}{=} (A, B; D, G) \stackrel{F}{=} (C, B; M, Y)$$

kas nozīmē, ka $(B, C; M, X) = (C, B; M, Y)$. Izmantojot definīciju, pārrakstīsim šo sakarību:

$$\frac{BM}{CM} \div \frac{BX}{CX} = \frac{CM}{BM} \div \frac{CY}{BY}$$

Ievērojam, ka $BM = CM$, jo M ir nogriežņa BC viduspunkts. Līdz ar to

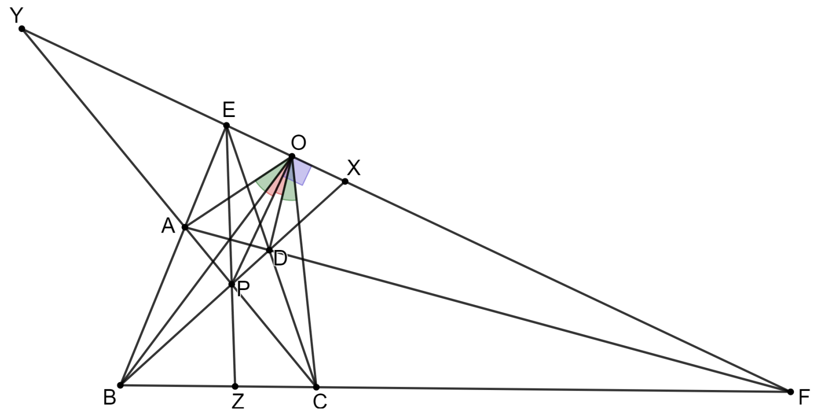
$$\frac{BX}{CX} = \frac{CY}{BY}$$

Tā kā mēs zinām punktu savstarpējo novietošanu, mēs varam pārrakstīt doto vienādību sekojoši:

$$\frac{BC + CX}{CX} = \frac{BC + BY}{BY}$$
$$\frac{BC}{CX} + 1 = \frac{BC}{BY} + 1$$
$$\frac{BC}{CX} = \frac{BC}{BY}$$
$$CX = BY$$
$$MC + CX = MB + BY$$
$$MX = MY$$

kas bija jāpierāda.

3.piemērs. Dots četrstūris $ABCD$. Punkts E ir taišņu AB un CD krustpunkts, savukārt punkts F ir taišņu BC un AD krustpunkts. Diagonāles AC un BD krustojas punktā P. Ar O apzīmēsim punkta P projekciju uz taisni EF. Pierādīt, ka $\angle BOC = \angle AOD$.



Atrisinājums. Apzīmēsim taišņu BP un CP krustpunktus ar taisni EF attiecīgi ar X un Y. Ar Z apzīmēsim taišņu BC un EP krustpunktu. Tā kā trīsstūrī $\triangle BEC$ nogriežņi BD, EZ, CA krustojas vienā punktā, secinām, ka $(B, C; Z, F) = -1$. Projicējot caur punktu E uz taisni BD, dabūsim, ka

$$-1 = (B, C; Z, F) \stackrel{E}{=} (B, D; P, X)$$

kas kopā ar to, ka $\angle POX = 90°$ dod, ka $\angle BOP = \angle DOP$ (4.fakts). Tagad analoģiski projicējot $(B, C; Z, F)$ caur punktu E uz taisni AC iegūsim, ka

$$-1 = (B, C; Z, F) \stackrel{E}{=} (A, C; P, Y)$$

līdz ar ko, analoģiski $\angle AOP = \angle COP$. Saliekot visu kopā, sanāks, ka

$$\angle BOC = \angle BOP + \angle COP = \angle DOP + \angle AOP = \angle AOD$$

Prasītais ir pierādīts.

4 Punkts bezgalībā

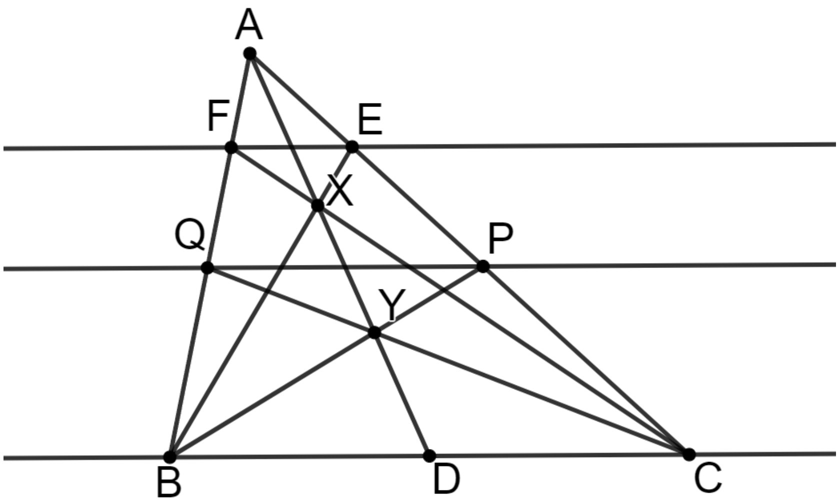
Definīcija. Dota taisne l. Par punktu bezgalībā uz taisnes l sauksim punktu, kas atrodas uz l bezgalīgi tālu. Šo punktu apzīmēsim ar ∞_l.

Piemērs. Doti četri punkti A, B, C, D, kas visi atrodas uz taisnes l tieši šādā secībā. Pieņemsim, kas $D = \infty_l$. Uzrakstīsim dubultas attiecības $(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \div \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$. Redzam, ka pirmā daļa ir normāla, savukārt otra izskatās dīvaini. Bet padomāsim par to šādi: ja D ir tālu tālu no punktiem A un B, tad $\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$ ir gandrīz precīzi vienāds ar 1. Tātad "robežā" būtu saprātīgi teikt, ka, ja $D = \infty_l$, tad $\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$ faktiski ir vienāds ar 1. Tādējādi, ja $D = \infty_l$, tad $(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$.

Fakts. Doti trīs punkti A, B, C, kas visi atrodas uz taisnes l. Tad $(A, B; C, \infty_l)$ ir harmoniskais četrinieks tad un tikai tad, ja C ir nogriežņa AB viduspunkts.

Pierādījums. No definīcijas $(A, B; C, \infty_l)$ ir harmoniskais četrinieks tad un tikai tad, ja $(A, B; C, \infty_l) = -1$, taču izmantojot rezultātu no iepriekšēja piemēra, mēs redzam, ka $-1 = (A, B; C, \infty_l) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$, jeb $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}$, un tā kā punkti A, B un C atrodas uz vienas taisnes, secinām, ka C ir nogriežņa AB viduspunkts. Līdzīgi spriedumi strādā arī uz citu pusi.

4.piemērs. Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kuram uz malas BC ir atlikts punkts D. Uz nogriežņa AD ir izvēlēti divi punkti X, Y. Taisnes BX un CX krusto taisnes AC un AB attiecīgi punktos E un F, un taisnes BY un CY krusto taisnes AC un AB attiecīgi punktos P un Q. Pierādīt, ka $BD = CD$, ja $EF \parallel PQ$.

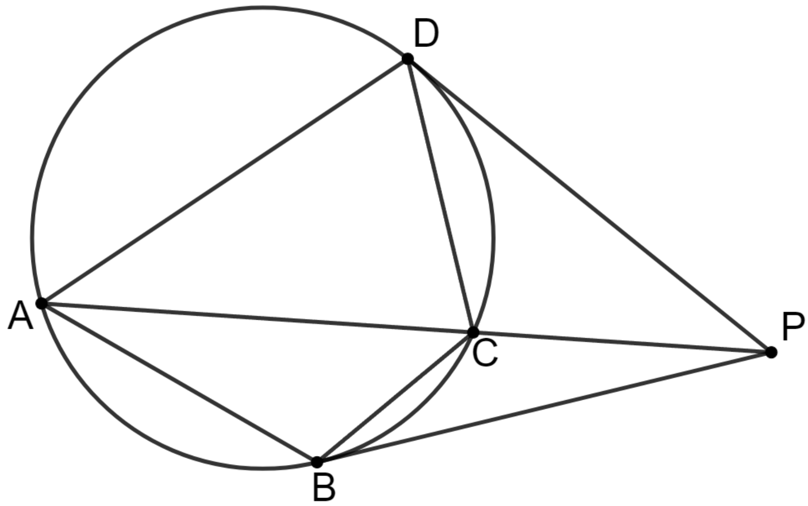


Atrisinājums. Ar D' apzīmēsim tādu punktu uz BC, ka $(D', D, B, C) = -1$. Tā kā šīs punkts ir unikāls, mēs varam secināt, ka visas trīs taisnes BC, EF, PQ krustojas punktā D', jo pēc konfigurācijas, tā kā gan AD, BE, CF krustojas vienā punktā, gan AD, BP, CQ krustojas vienā punktā, taisnēm EF un PQ jākrustojas ar BC punktā ar tādu pašu īpašību. Taču $EF \parallel PQ$, kas nozīme, ka $D' = \infty_{BC}$, kas kopā ar $(D', D, B, C) = -1$ dod mums, ka D ir nogriežņa BC viduspunkts, kas bija jāpierāda.

5 Harmoniskais četrstūris

Definīcija. Četrstūri $ABCD$ sauc par harmonisko četrstūri, ja tas ir ievilkts un $AB \cdot CD = AC \cdot BD$.

Harmoniskā četrstūra pazīme. Dots ievilkts četrstūris $ABCD$ un punkts P ar īpašību, ka PB un PD pieskaras četrstūra $ABCD$ apvilktai riņķa līnijai. Četrstūris $ABCD$ ir harmoniskais tad un tikai tad, ja P atrodas uz taisnes AC.



Pierādījums. Tā kā PB un PD ir pieskares, mēs varam secināt, ka $\triangle PAB \sim \triangle PBC$ un $\triangle PAD \sim \triangle PDC$. Uzrakstīsim atbilstošas malu sakarības:

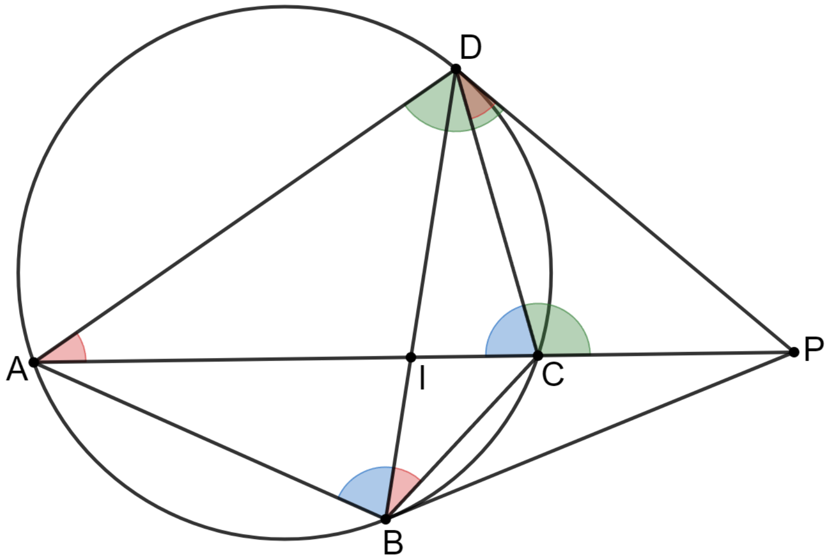
$$\frac{AB}{BC} = \frac{PA}{PB} \quad \text{un} \quad \frac{AD}{CD} = \frac{PA}{PD}$$

bet tā kā $PB = PD$ kā pieskares, mēs secinam, ka

$$\frac{AB}{BC} = \frac{PA}{PB} = \frac{PA}{PD} = \frac{AD}{CD}$$
$$AB \cdot CD = AD \cdot BC$$

kas nozīmē ka četrstūris $ABCD$ ir harmoniskais. Līdzīgie spriedumi strādā arī uz otro pusi.

Fakts. Dots harmoniskais četrstūris $ABCD$, kuram diagonāles krustojas punktā I, un punkts P ar īpašību, ka PB un PD pieskaras četrstūra $ABCD$ apvilktai riņķa līnijai. Tad $(A, C; I, P) = -1$



Pierādījums. Izmantojot trīsstūra laukuma formulu ar leņķa sinusu, iegūstam, ka

$$\frac{IA}{IC} = \frac{S_{IBA}}{S_{IBC}} = \frac{BA \cdot \sin \angle IBA}{BC \cdot \sin \angle IBC}$$

un analoģiski

$$\frac{PA}{PC} = \frac{S_{PDA}}{S_{PDC}} = \frac{DA \cdot \sin \angle PDA}{DC \cdot \sin \angle PDC}$$

Izmantojot to, ka $ABCD$ ir ievilkts, un ka PB un PD ir pieskares, mēs iegūstam, ka

$$\sin(\angle IBA) = \sin(\angle DCA) = \sin(\angle DCP) = \sin(\angle PDA)$$

$$\sin(\angle IBC) = \sin(\angle DAC) = \sin(\angle PDC)$$

Ņemot vērā punktu A, C, I, P savstarpējo novietojumi, secinām, ka

$$(A, C; I, P) = -\frac{IA}{IC} \div \frac{PA}{PC} = -\frac{BA \cdot \sin \angle IBA}{BC \cdot \sin \angle IBC} \div \frac{DA \cdot \sin \angle PDA}{DC \cdot \sin \angle PDC} = -\frac{BA \cdot DC}{BC \cdot DA}$$

Bet tā kā četrstūris $ABCD$ ir harmoniskais, mums izpildās $AB \cdot CD = AD \cdot BC$, līdz ar ko

$$(A, C; I, P) = -\frac{BA \cdot DC}{BC \cdot DA} = -1$$

kas bija jāpierāda.

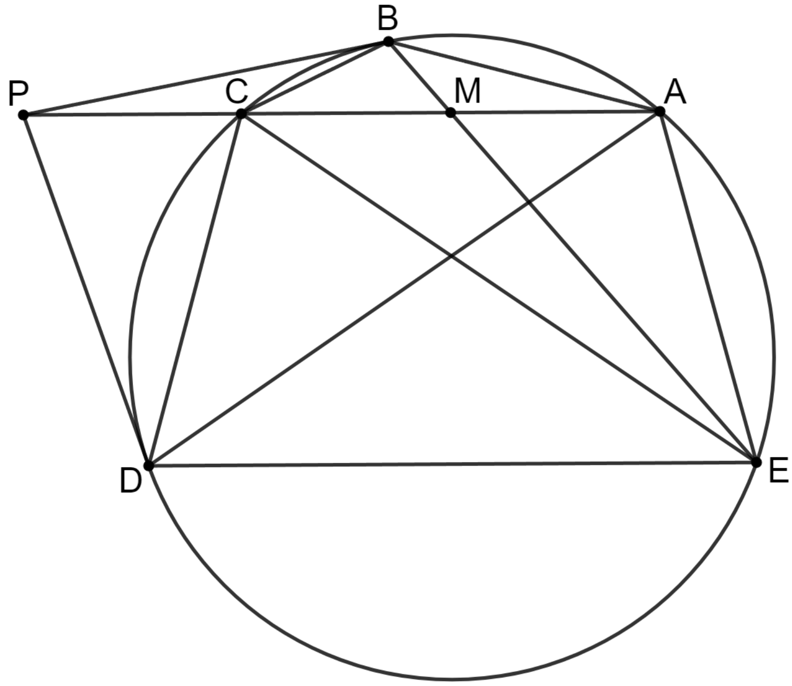
Svarīgs fakts!!! Projicējot punktus no taisnes uz riņķa līniju, dubultās attiecības nemainās, kas galvenokārt nozīmē, ka projicējot četrus punktus uz riņķa līniju caur jebkuru punktu uz šīs riņķa līnijas, projicēšanas rezultāta iegūtie punkti veidos harmonisko četrstūri tad un tikai tad, ja tie četri punkti veido harmonisko četrinieku. Kā arī otrādāk, projicējot četrus punktus, kas atrodas uz vienas riņķa līnijas uz jebkuru taisni caur jebkuru punktu, projicēšanas rezultāta iegūtie punkti veidos harmonisko četrinieku tad un tikai tad, ja tie četri punkti veido harmonisko četrstūri.

Piezīme. Ja $ABCD$ ir harmoniskais četrstūris un pēc projicēšanas punkti A, B, C, D projicējas attiecīgi punktos A', B', C', D', tad $(A', C'; B', D') = -1$.

Piemērs. Pierādīsim iepriekšējo faktu. Apzīmēsim četrstūrim $ABCD$ apvilkto riņķa līniju ar ω.Projicēsim punktus A, C, I, P caur punktu B uz ω. Tad punkti A un C paliek, punkts I projicējas uz punktu D, bet punkts P projicējas uz B, jo taisne BP krusto ω tieši punktā B. Bet tā kā projicēšanas rezultātā iegūtie punkti veido harmonisko četrstūri, mēs varam secināt, ka punkti A, C, I, P veido harmonisko četrinieku.

6 Uzdevumu risināšanas piemēri

5.piemērs. Punkti A, B, C, D, E atrodas uz riņķa līnijas ω tieši šādā secībā un punkts P atrodas ārpus riņķa līnijas. Dotiem punktiem izpildās sekojošas īpašības: (i) taisnes PB un PD pieskaras ω, (ii) punkti P, A, C ir kolineāri un (iii) $DE \parallel AC$. Pierādīt, ka BE dala AC uz pusēm.

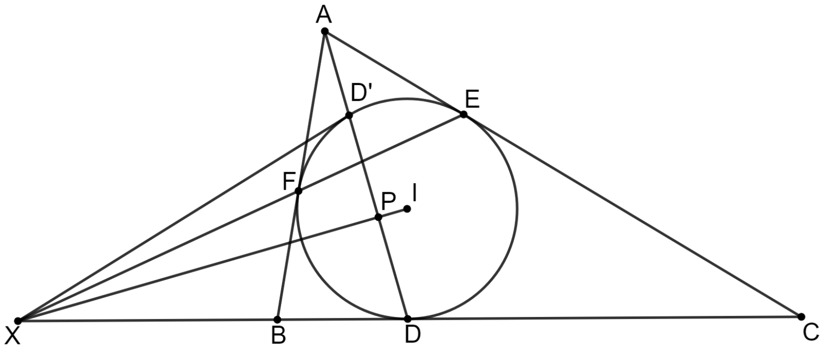


Atrisinājums. Apzīmēsim ar M taišņu AC un BE krustpunktu. Pamanīsim, ka no (i) un (ii) seko, ka $ABCD$ ir harmoniskais četrstūris. Projicēsim punktus A, C, B, D caur punktu E uz taisni AC. Punkti A un C paliek, punkts B projicējas uz M, bet punkts D projicējas uz ∞_{AC}, jo $DE \parallel AC$. Iegūstam, ka

$$-1 = (A, C; B, D) \stackrel{E}{=} (A, C; M, \infty_{AC})$$

jo harmoniskajām četrstūrim jāprojicējas uz harmonisko četrinieku. Līdz ar to secinām, ka M ir nogriežņa AC viduspunkts, kas bija jāpierāda.

6.piemērs. Dots trīsstūris ABC ar incentru I. Punkts D ir punkta I projekcija uz taisni BC un punkts P ir punkta I projekcija uz taisni AD. Pierādīt, ka $\angle BPD = \angle DPC$.



Atrisinājums. Apzīmēsim trīsstūrī ABC ievilkto riņķa līniju ar ω. Apzīmēsim taišņu AB, AC, AD krustpunktus ar ω attiecīgi ar F, E, D'. Tā kā AE un AF pieskaras ω un punkti A, D, D' ir kolineāri, secinām, ka $DFD'E$ ir harmoniskais četrstūris. Apzīmēsim taišņu BC un EF krustpunktu ar X.

Ievērojam, ka taisne XD pieskaras ω, punkti E, F, X ir kolineāri, un $DFD'E$ ir harmoniskais četrstūris, kas kopā nozīmē, ka taisne XD' pieskaras ω. Kā arī $XD = XD'$ un $ID = ID'$, kas nozīmē, ka punkts P atrodas uz taisnes IX, kas nozīmē, kas $\angle XPD = 90°$.

Tā kā $AF = AE, BD = BF$ un $CE = CD$, no Čevas teorēmas seko, ka nogriežņi AD, BE un CF krustojas vienā punktā. Līdz ar ko $(X, D; B, C) = -1$, kas kopā ar to, ka $\angle XPD = 90°$ dod mums, ka $\angle BPD = \angle DPC$ (4.fakts). Prasītais ir pierādīts.