Dalāmība

Kims Georgs Pavlovs

1 Ievads

Šajā materiālā tiks aplūkota dalāmība un ar to saistīta teorija un tās pielietojumi dažādu uzdevumu risināšanā. Vispirms atgādināsim lasītājam par dažām definīcijām un apzīmējumiem

- **pirmskaitlis** – naturāls skaitlis, kas dalās **tikai** ar skaitli 1 un pats sevi. Pirmie desmit mazākie pirmskaitļi ir $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$. Skaitlis 1 nav pirmskaitlis.
- **salikts skaitlis** – naturāls skaitlis, kurš nav pirmskaitlis. Tas nozīmē, ka, ja skaitlis n ir salikts skaitlis, tad eksistē naturāli skaitļi $a > 1, b > 1$ ar īpašību, ka $ab = n$. Piemēram, salikti skaitļi ir $4 = 2 \cdot 2$, $52 = 4 \cdot 13$ u.c.
- Ja vesels skaitlis a dalās ar veselu skaitli b, tad tas tiek pierakstīts kā $b \mid a$. Piemēram, $3 \mid 6$, $25 \mid 100$, $-13 \mid 13$ u.c. Savukārt, ja skaitlis a nedalās ar skaitli b, tad tas tiek pierakstīts kā $b \nmid a$. Piemēram, $2 \nmid 3$, $5 \nmid 103$, $110 \nmid 2$ u.c.

2 Dalāmības pamati

Katrā sadaļā tiks aplūkota viena vai vairākas idejas noderīgas teorijas idejas.

2.1 Pirmskaitļi un to īpašības

1.teorēma. Ir bezgalīgi daudz dažādu pirmskaitļu.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka pirmskaitļu skaits ir galīgs, tas ir, visi iespējamie pirmskaitļi ir $p_1, p_2, \ldots, p_k$, kur k ir naturāls skaitlis. Aplūkosim skaitli $n = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$. Tas nevar būt pirmskaitlis, jo pretējā gadījumā mēs būsim atraduši jaunu pirmskaitli, kas ir atšķirīgs no $p_1, p_2, \ldots, p_k$, līdz ar to tas ir salikts skaitlis. Bet tā kā vienīgie pirmskaitļi, ar ko tas var dalīties ir $p_1, p_2, \ldots, p_k$, tad tam ir jādalās ar kādu no pirmskaitļiem p_i. Ievērosim, ka $\frac{n}{p_i} = p_1 p_2 \cdots p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdots p_k + \frac{1}{p_i}$. Tā kā visi pirmskaitļi ir lielāki par 1, tad skaitlis $\frac{1}{p_i}$ nav vesels un skaitlis $p_1 p_2 \cdots p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdots p_k + \frac{1}{p_i}$ arī nav vesels. Šis ir pretrunā ar to, ka skaitlis n dalās ar p_i. Līdz ar to mūsu pieņēmums, ka pirmskaitļu skaits ir galīgs, ir aplams, un patiesībā pirmskaitļu skaits ir bezgalīgs.

1.fakts. Doti veseli skaitļi a, b un pirmskaitlis p. Ja $p \mid ab$, tad vismaz viens no skaitļiem a vai b dalās ar skaitli p.

Šis fakts tiks atstāts bez pierādījuma. Ir svarīgi atzīmēt, ka šis fakts **neizpildās**, ja p nav pirmskaitlis. Piemēram, $4 \mid 12 = 2 \cdot 6$, taču $4 \nmid 2$ un $4 \nmid 6$.

2.teorēma (Aritmētikas pamatteorēma). Katru naturālu skaitli $n > 1$ var izteikt unikālā veidā kā pirmskaitļu reizinājumu (*daži no pirmskaitļiem var būt vienādi, un vienādo pirmskaitļu secība nav svarīga*).

Pierādījums. Vispirms pierādīsim, ka katru naturālu skaitlim n tiešām var izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu. Tas tiks darīts, izmantojot indukciju. Ievērosim, ka $n = 2$ ir pirmskaitlis, tāpēc izpildās indukcijas bāze. Pieņemsim, ka visus naturālus skaitļus, kas ir mazāki par n, var izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu. Ja n ir pirmskaitlis, tad prasītais ir pierādīts. Pretējā gadījumā n ir salikts skaitlis, līdz ar to eksistē naturāli skaitļi a, b, kam izpildās $1 < a < n$, $1 < b < n$ un $ab = n$. No induktīva pieņēmuma skaitļus a un b var izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu, līdz ar to skaitli $n = ab$ arī var izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu. Induktīvā pāreja izpildās, līdz ar to secinām, ka prasītais izpildās visiem naturāliem skaitļiem n.

Tagad pierādīsim, ka katru naturālu skaitli var izteikt unikālā veidā kā pirmskaitļu reizinājumu. Pieņemsim pretējo, ka eksistē kaut kāds naturāls skaitlis, kuru var izteikt divos dažādos veidos, un aplūkosim mazāko šādu skaitli. Apzīmēsim to ar n, tad $n = p_1p_2 \dots p_j = q_1q_2 \dots q_k$, kur $p_1, p_2, \dots, p_j$ un $q_1, q_1, \dots, q_k$ ir pirmskaitļi. Ievērosim, ka $p_1 \mid p_1p_2 \dots p_j = q_1 \dots q_k$. Tas nozīmē, ka eksistē $p_1 \mid q_i$ kaut kādam i. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $p_1 \mid q_1$. Tā kā q_1 ir pirmskaitlis, tad secinām, ka $q_1 = p_1$. Tādā gadījumā

$$n = p_1p_2 \dots p_j = q_1q_2 \dots q_k \implies p_2 \dots p_j = q_2 \dots q_k$$

Tā ir pretruna, jo mēs esam atraduši mazāku skaitli, kuru var izteikt divos dažādos veidos kā pirmskaitļu reizinājumu. Secinām, ka mūsu pieņēmums ir aplams, līdz ar to katru skaitli var izteikt unikālā veidā kā pirmskaitļu reizinājumu.

No aritmētikas pamatteorēmas izriet, ka katru naturālu skaitli $n > 1$ var uzrakstīt kā $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kur $p_1 < p_2 < \dots p_k$ ir pirmskaitļi un $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ir naturāli skaitļi. To sauc par skaitļa **kanonisko reprezentāciju**. Piemēram, skaitļu $100, 1001, 99$ kanoniskās reprezentācijas ir attiecīgi $100 = 2^2 \cdot 5^2$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ un $99 = 3^2 \cdot 11$.

2.2 Dalāmības īpašības

Bieži vien uzdevumā būs dots, ka kaut kādas divas izteiksmes dalās ar kopīgu skaitli. Nākamais fakts ļauj mums iegūt jaunas izteiksmes, kas dalās ar doto skaitli.

2.fakts. Aplūkosim veselus skaitļus a, b, c ar īpašību, ka $c \mid a$ un $c \mid b$. Visiem veseliem skaitļiem x un y izpildās $c \mid ax + by$.

Pierādījums. Tā kā $c \mid a$ un $c \mid b$, tad $c \mid ax$ un $c \mid by$. Līdz ar to $c \mid ax + by$, kas arī bija jāpierāda.

3.fakts Doti veseli skaitļi a, b, c, d ar īpašību, ka $a \mid b$ un $c \mid d$, tad $ac \mid bd$.
4.fakts Doti veseli skaitļi $a \neq 0$, b, c ar īpašību, ka $ab \mid ac$, tad $b|c$.
5.fakts. Doti veseli skaitļi $a \neq 0$ un $b \neq 0$ ar īpašību, ka $b \mid a$, tad $|a| \geq |b|$.

Pierādījums. Vispirms pierādīsim 3. faktu. Ja $a \mid b$ un $c \mid d$, tad $ax = b$ un $cy = d$, kur x un y ir veseli skaitļi. Reizinot kopā abas iegūtā sakarības iegūsim, ka $axcy = bd$ jeb $\frac{bd}{ac} = xy \in \mathbb{Z}$, kas nozīmē, ka skaitlis bd dalās ar skaitli ac, kas arī bija jāpierāda.

Tagad pierādīsim 4. faktu. Ja $ab \mid ac$, tad $abx = ac$, kur x ir vesels skaitlis. Tas nozīmē, ka $bx = c$ jeb $\frac{c}{b} = x \in \mathbb{Z}$, kas nozīmē, ka skaitlis c dalās ar skaitli b, kas arī bija jāpierāda.

Tagad pierādīsim 5. faktu. Ja $b \mid a$, tad $a = bk$ kaut kādam veselam skaitlim $k \neq 0$. Tas nozīmē, ka

$$|a| = |bk| = |k||b| \geq |b|,$$

jo $|k| \geq 1$. Tas pierāda prasīto.

Atzīmēsim, ka šis fakts nestrādā pretējā virzienā. Tas ir, ja $|a| \geq |b|$, tad **ne** obligāti $b \mid a$. Piemēram, $101 > 3$, taču $3 \nmid 101$. Ievērosim, ka no 3.fakta izriet, ka vienīgais veselais skaitlis, kas dalās ar pēc patikas lieliem skaitļiem, ir skaitlis 0. Kopumā 3.fakts ir noderīgs rīks, kā iegūt pretrunu dalāmības uzdevumos.

2.3 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs Doti naturāli skaitļi a, b ar īpašību, ka $11 \mid 3a + 7b$ un $11 \mid 2a + 5b$. Pierādīt, ka $121 \mid a^2 + b^2$. **b)** Doti naturāli skaitļi a, b ar īpašību, ka $7 \mid 2a + 3b$. Pierādīt, ka $7 \mid a + 5b$.

Atrisinājums. **a)** No dotā iegūstam, ka $11 \mid 3(2a+5b)$ un $11 \mid 2(3a+7b)$, līdz ar to pēc 2.fakta mums ir

$$11 \mid 3(2a + 5b) - 2(3a + 7b) = b$$

Līdzīgi iegūstam, ka

$$11 \mid 5(3a + 7b) - 7(2a + 5b) = a$$

Balstoties uz 3.faktu, secinām ka $121 \mid a^2$ un $121 \mid b^2$, līdz ar to $121 \mid a^2 + b^2$.

b) Ievērosim, ka $7 \mid 7a$ un $7 \mid 7b$, līdz ar to no 2. fakta izriet, ka

$$7 \mid 4(2a + 3b) - 7a - 7b = a + 5b,$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

2.piemērs Doti naturāli skaitļi a, b, c, d ar īpašību, ka skaitlis $ab-cd$ dalās ar skaitli $a+b+c+d$. Pierādīt, ka skaitlis $a + b + c + d$ ir salikts skaitlis.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka $a + b + c + d = p$, kur p ir pirmskaitlis. Ievērosim, ka $p|d \mid p$ jeb $p \mid d(a + b + c + d)$, līdz ar to no dotā un 2. fakta izriet, ka

$$\begin{aligned} p \mid ab - cd + d(a + b + c + d) &= \\ = ab + ad + bd + cd + d^2 - cd &= \\ = a(b + d) + d(b + d) &= \\ = (a + d)(b + d) & \end{aligned}$$

No 1. fakta izriet, ka $p \mid a + d$ vai arī $p \mid b + d$. Taču tādā gadījumā no 5. fakta mēs zinām, ka būtu jāizpildās $a + d \geq a + b + c + d$ vai $b + d \geq a + b + c + d$, kas acīmredzami neizpildās, jo a, b, c, d ir naturāli skaitļi.

3.piemērs Atrast visus naturālus skaitļus n, kuriem ir spēkā, ka jebkuram skaitļa n dalītājam $d > 1$ izpildās, ka $d^2 + n \mid n^2 + d$.

Atrisinājums. Viegli redzēt, ka, ja n ir pirmskaitlis, tad tas izpilda uzdevumā minēto īpašību. Apskatīsim saliktus skaitļus n. Jebkuru saliktu skaitli n var izteikt formā $n = ab$, kur $a > 1$ un $b > 1$. Ņemot d vietā a, iegūsim, ka

$$a^2 + ab \mid a^2b^2 + a \implies a + b \mid ab^2 + 1$$

Līdzīgi, ņemot d vietā skaitli b, iegūsim, ka

$$b^2 + ab \mid a^2b^2 + b \implies a + b \mid a^2b + 1$$

Saskaitot iepriekš iegūtās sakarības, secinām, ka:

$$a + b \mid ab^2 + 1 + a^2b + 1 = ab(a + b) + 2$$

Taču mēs zinām, ka $a+b \mid ab(a+b)$, līdz ar to pēc 2. fakta izriet, ka $a+b \mid ab(a+b)+2-ab(a+b) = 2$. Tas nav iespējams, jo $a + b > 2$. Līdz ar to saliktie skaitļi neapmierina uzdevuma nosacījumus.

4.piemērs Dots pirmskaitlis p un naturāli skaitļi $a, b, c < p$. Zināms, ka izpildās sakarības

$$p^2 \mid a + (n-1)b$$
$$p^2 \mid b + (n-1)c$$
$$p^2 \mid c + (n-1)a.$$

Pierādīt, ka n nevar būt pirmskaitlis.

Atrisinājums. Vispirms apskatīsim gadījumu, kad $p = 2$. Tā kā $a, b, c < 2$, tad $a = b = c = 1$, tad secinām, ka:

$$4 = p^2 \mid a + (n-1)b = 1 + n - 1 = n$$

Tas nozīmē, ka n dalās ar 4, līdz ar to acīmredzami nevar būt pirmskaitlis.

Apskatīsim tagad gadījumu, kad p ir nepāra pirmskaitlis un pieņemsim pretējo, ka n ir pirmskaitlis. Saskaitot kopā uzdevumā dotas sakarības, iegūsim, ka

$$p^2 \mid (a + b + c) + (n-1)(a + b + c) = n(a + b + c)$$

Ievērosim, ka $a+b+c$ nevar dalīties ar p^2, jo, ja skaitlis $a+b+c$ dalītos ar p^2, tad no 3. fakta izriet, ka

$$a + b + c \geq p^2$$

Taču mēs zinām, ka $p > a, b, c$, līdz ar to, $3p > a + b + c \geq p^2 \implies 3p > p^2 \implies 3 > p$ - pretruna ar to, ka p ir nepāra pirmskaitlis. Tas nozīmē, ka n jādalās ar p. Tā kā n ir pirmskaitlis, tad $n = p$. Līdz ar to:

$$p \mid p^2 \mid a + (p-1)b = a - b + pb$$

Tas nozīmē, ka $p \mid a - b$. Taču mēs zinām, ka $a, b < p$, līdz ar to $|a - b| < p$, tāpēc no 5. fakta izriet, ka $|a - b| = 0$ jeb $a = b$. Līdz ar to

$$p^2 \mid a + (p-1)b = pb$$

Ievērosim, ka $p^2 > pb$, tāpēc pb nevar dalīties ar p^2. Esam ieguvuši pretrunu, kas nozīmē, ka mūsu sākotnējais pieņēmums ir aplams un n nevar būt pirmskaitlis, kas arī bija jāpierāda.

5.piemērs Atrast visus naturālu skaitļu pārus (x, y) ar īpašību, ka skaitlis $x^2y + x + y$ dalās ar skaitli $xy^2 + y + 7$.

Atrisinājums. Ievērosim, ka no 2. fakta izriet, ka

$$xy^2 + y + 7 \mid y(x^2y + x + y) - x(xy^2 + y + 7) = y^2 - 7x$$

Apskatīsim visus iespējamos gadījumus:

- Ja $y^2 - 7x > 0$, tad no 3. fakta izriet, ka $y^2 - 7x \geq xy^2 + y + 7 \implies$
  $y^2 \geq xy^2 + y + 7 + 7x$. Ievērosim, ka

  $$y^2 \geq xy^2 + y + 7 + 7x \geq y^2 + y + 7 + 7 = y^2 + y + 14,$$

  kas ir acīmredzama pretruna.

- Ja $y^2 = 7x$. Tad y^2 dalās ar 7, kas nozīmē, ka $y = 7k$, kur k ir kaut kāds naturāls skaitlis. Tādā gadījumā $x = 7k^2$. Viegli pārbaudīt, ka pāri $(x, y) = (7k^2, 7k)$ apmierina uzdevuma nosacījumus.

- Ja $y^2 - 7x < 0$, tad no 3. fakta izriet, ka $7x - y^2 \geq xy^2 + y + 7$. To var pārveidot formā

$$7x - y^2 \geq xy^2 + y + 7 \implies x(7 - y^2) \geq y^2 + y + 7 \geq 0$$

Tas nozīmē, ka $x(7 - y^2) \geq 0$. Tā kā skaitļi x un y ir naturāli, tad secinām, ka $y = 1$ vai $y = 2$.

Ja $y = 1$, tad uzdevumā dotais nosacījums pārvēršas par x^2+x+1 dalās ar skaitli $x+1+7 = x+8$. Ievērosim, ka $x \equiv -8 \pmod{x+8}$. Līdz ar to

$$0 \equiv x^2 + x + 1 \equiv 64 - 8 + 1 \equiv 57 \pmod{x+8}$$

Līdz ar to $x + 8 \mid 57$, kas nozīmē, ka $x = 49$, vai $x + 8 = 19$, kas nozīmē, ka $x = 11$. Viegli pārliecināties, ka abi šie pāri der.

Ja $y = 2$, tad uzdevumā dotais nosacījums pārvēršas par $2x^2 + x + 2$ dalās ar skaitli $4x + 9$. To var uzrakstīt arī kā $16x^2 + 8x + 16 \equiv 0 \pmod{4x+9}$. Līdz ar to $4x \equiv -9 \pmod{4x+9}$ un:

$$0 \equiv 16x^2 + 8x + 16 \equiv 81 - 18 + 16 \equiv 79 \pmod{4x+9}$$

Tādā gadījumā $4x + 9 \mid 79$, kas nozīmē, ka $x = \frac{35}{2}$, kas neder, jo x jābūt naturālam skaitlim.

3 Lielākais kopīgais dalītājs

Nākamajās sadaļās mēs iepazīsimies ar lielāko kopīgo dalītāju un tā īpašībām, kas bieži vien ir noderīgs rīks dalāmības uzdevumu analīzē.

3.1 Lielākais kopīgais dalītājs un tā īpašības

Definīcija. Veselu skaitļu a, b lielākais kopīgais dalītājs, ko apzīmē ar $\gcd(a, b)$, ir lielākais naturālais skaitlis d, ar ko dalās gan skaitlis a, gan skaitlis b.

Piemēram, $\gcd(42, 56) = 7$, $\gcd(20, 130) = 10$, $\gcd(0, 101) = 101$ un $\gcd(2, 3) = 1$.

Ja diviem veseliem skaitļiem a un b izpildās, ka $\gcd(a, b) = 1$, tad saka, ka skaitļi a un b ir **savstarpēji pirmskaitļi**. Piemēram, $\gcd(9, 10) = 1$, $\gcd(3, 65) = 1$ u.c.

4.fakts Aplūkosim divus naturālus skaitļus a, b, tad $\gcd(a, b) = \gcd(b, a-kb)$, kur k ir patvaļīgs vesels skaitlis.

Pierādījums. Pieņemsim, ka $d_1 = \gcd(a, b)$ un $d_2 = \gcd(b, a-kb)$. Ievērosim, ka $d_1 \mid a$ un $d_1 \mid b$, kas nozīmē, ka $d_1 \mid a - kb$. Līdz ar to, ja mēs aplūkojam skaitļus $b, a - kb$, tad tie abi dalās ar d_1, līdz ar to to lielākais kopīgais dalītājs d_2 ir vismaz d_1, tas ir, $d_2 \geq d_1$.

Ievērosim, ka $d_2 \mid b$ un $d_2 \mid a - kb$, kas nozīmē, ka $d_2 \mid a - kb + kb = a$. Līdz ar to, ja mēs aplūkojam skaitļus a, b, tad tie abi dalās ar d_2, līdz ar to šo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs d_1 ir vismaz d_2, tas ir, $d_1 \geq d_2$.

Esam ieguvuši, ka $d_2 \geq d_1 \geq d_2$, kas nozīmē, ka $d_1 = d_2$ jeb $\gcd(a, b) = \gcd(b, a - kb)$, kas arī bija jāpierāda.

4.fakts ļauj ērtā veidā aprēķināt divu skaitļu vai algebrisku izteiksmju lielāko kopīgo dalītāju. Aplūkosim pāris piemērus

- Atradīsim $\gcd(42, 105)$. Izmantojot 4. faktu, iegūstam sekojošas identitātes:

$$\begin{gathered}\gcd(105, 42) = \gcd(42, 105 - 2 \cdot 42) = \\ = (42, 21) = \gcd(21, 42 - 2 \cdot 21) = \\ = \gcd(21, 0) = 21\end{gathered}$$

- Atradīsim $\gcd(n^2+n+1, n+2)$, kur n ir patvaļīgs naturāls skaitlis. Izmantojot 4. faktu, iegūstam sekojošas identitātes

$$\begin{gathered}\gcd(n^2 + n + 1, n + 2) = \gcd(n + 2, n^2 + n + 1 - n(n + 2)) = \\ = \gcd(n + 2, -n + 1) = \gcd(n + 2, n - 1) = \\ = \gcd(n - 1, n - 1 - (n + 2)) = \gcd(n - 1, -3) = \gcd(n - 1, 3)\end{gathered}$$

  Ja $n-1$ dalās ar 3, tad $\gcd(n^2+n+1, n+2) = \gcd(n-1, 3) = 3$, pretējā gadījumā $\gcd(n^2+n+1, n+2) = 1$.

Acīgs lasītājs var ievērot, ka $\gcd(a, b) = (b, a \pmod b)$. Pieņemsim, ka $a \equiv r \pmod b$, kur $0 \leq r < b$. Tas nozīmē, ka skaitli a var uzrakstīt formā $a = qb + r$. Izvēloties $k = q$, iegūstam, ka

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a - qb) = \gcd(b, r) = \gcd(b, a \pmod b)$$

Šis rezultāts ļauj relatīvi efektīvi aprēķināt divu skaitļu lielāko kopīgo dalītāju, izmantojot programmēšanu.

5.fakts Doti veseli skaitļi a un b ar īpašību, ka $c \mid ab$ un $\gcd(a, c) = 1$, tad $c \mid b$.

Pierādījums. Tā kā $\gcd(a, c) = 1$, tad tas nozīmē, ka skaitļiem a un c nav kopīgu pirmreizinātāju. Līdz ar to neviena skaitļa c pirmreizinātāja pakāpe nevar dalīt skaitli a, taču mēs zinām, ka $c \mid ab$, tāpēc, lai šī dalāmība izpildītos, mēs secinām, ka jebkurai skaitļa c pirmreizinātāja pakāpei ir jādala skaitlis b. Tas nozīmē, ka $c \mid b$, kas arī bija jāpierāda.

6.fakts Doti naturāli skaitļi a un b ar īpašību, ka $\gcd(a, b) = 1$ un skaitlis ab ir vesela skaitļa kvadrāts. Tad katrs no skaitļiem a un b ir vesela skaitļa kvadrāts.

Pierādījums. Pieņemsim, ka $ab = x^2$. Aplūkosim skaitļa x kanonisko reprezentāciju, tas ir, $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, kur $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ ir pirmskaitļi un $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ir naturāli skaitļi. Tādā gadījumā

$$ab = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k}$$

Tas nozīmē, ka $a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ un $b = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$. Ievērosim, ka $\beta_i + \gamma_i = 2\alpha_i$ katram $1 \leq i \leq k$. Ja kaut kādam i ir spēkā, ka $\beta_i > 0$ un $\gamma_i > 0$, tad $p_i \mid a$ un $p_i \mid b$, kas nozīmē, ka $\gcd(a, b) \neq 1$, taču tas ir pretrunā ar doto. Tas nozīmē, ka kāds no skaitļiem β_i un γ_i ir vienāds ar $2\alpha_i$, bet otrs ar 0. Līdz ar to skaitlis a ir kaut kādu pirmskaitļu pakāpju reizinājums, kurā katram pirmreizinātājam ir pāra kāpinātājs, kas nozīmē, ka skaitlis a ir vesela skaitļa kvadrāts. Līdzīgi varam iegūt, ka skaitlis b ir vesela skaitļa kvadrāts.

Pastāv vispārīgāka īpašība, ka, ja $\gcd(a, b) = 1$ un ab ir vesela skaitļa n-tā pakāpe, tad abi skaitļi a un b ir n-tās pakāpes. Pierādījums ir analoģisks.

3.2 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs Naturāliem skaitļiem a, b izpildās īpašība, ka

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

ir vesels skaitlis. Pierādīt, ka skaitļu a un b lielākais kopīgais dalītājs nav lielāks par $\sqrt{a+b}$.

Atrisinājums. Ievērosim, ka

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + a + b^2 + b}{ab}$$

ir vesels skaitlis. To var pārrakstīt sekojošā formā:

$$ab \mid a^2 + a + b^2 + b$$

Pieņemsim, ka $\gcd(a, b) = d$ un $a = dx$, $b = dy$, kur $\gcd(x, y) = 1$. Tādā gadījumā:

$$d^2 \mid d^2 xy \mid d^2(x^2 + y^2) + d(x + y)$$

Tā kā $d^2 \mid d(x + y)$, tad secinām, ka $d \mid x + y$. Līdz ar to

$$\begin{gathered} x + y \geq d \\ dx + dy \geq d^2 \\ a + b \geq d^2 \\ \sqrt{a+b} \geq d. \end{gathered}$$

2.piemērs Doti naturāli skaitļi m, n ar īpašību, ka skaitlis $m^2 + n^2 + m$ dalās ar skaitli mn. Pierādīt, ka skaitlis m ir vesela skaitļa kvadrāts.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka $\gcd(m, n) = d$ un $m = dx$, $n = dy$, kur $\gcd(x, y) = 1$. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$mn \mid m^2 + n^2 + m$$
$$d^2xy \mid d^2x^2 + d^2y^2 + dx$$
$$dxy \mid dx^2 + dy^2 + x$$

Ievērosim, ka $d \mid dxy \mid dx^2 + dy^2 + x$. Pamanīsim, ka $d \mid dx^2$ un $d \mid dy^2$, kas nozīmē, ka $d \mid x$.

Līdzīgi ievērosim, ka $x \mid dxy \mid dx^2 + dy^2 + x$. Pamanīsim, ka $x \mid dx^2$ un $x \mid x$, kas nozīmē, ka $x \mid dy^2$. Atcerēsimies, ka $\gcd(x, y) = 1$, līdz ar to x nevar nekādi dalīt y^2. Tas nozīmē, ka $x \mid d$. Esam ieguvuši, ka $d \mid x$ un $x \mid d$, līdz ar to $x = d$, kas nozīmē, ka $m = dx = d^2$.

3.piemērs Doti naturāli skaitļi x, y, kuriem izpildās $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Pierādīt, ka $x - y$ ir naturāla skaitļa kvadrāts.

Atrisinājums. Pārveidosim doto vienādojumu

$$3x^2 + x = 4y^2 + y$$
$$3(x^2 - y^2) + x - y = y^2$$
$$(x - y)((3(x + y) + 1) = y^2$$

Pieņemsim, ka $\gcd(x - y, 3(x + y) + 1) \neq 1$, tad eksistē pirmskaitlis p ar īpašību, ka $p \mid x - y$ un $p \mid 3(x + y) + 1$. Ievērosim, ka, tā kā p dala vienādojuma kreiso pusi, tad $p \mid y^2$, kas nozīmē, ka $p \mid y$. No šī varam secināt, ka $p \mid x$, jo $p \mid x - y$. Savukārt, tādā gadījumā $p \mid 1$, jo $p \mid 3(x + y) + 1$, un $p \mid x$ un $p \mid y$. Taču tā ir acīmredzama pretruna.

Secinām, ka $\gcd(x - y, 3(x + y) + 1) = 1$, kas nozīmē, ka $x - y$ ir naturāla skaitļa kvadrāts, jo $(x - y)(3(x + y) + 1) = y^2$ ir kvadrātiska izteiksme, tātad visi pirmreizinātāji ir pāra pakāpē, un pirmreizinātāji starp iekavām nepārklājas.

4.piemērs Doti naturāli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka

$$\gcd(a, b) + \gcd(a, c) + \gcd(b, c) = b + c + 2023$$

Pierādīt, ka $\gcd(b, c) = 2023$.

Atrisinājums. Ievērosim, ka, ja $b \mid a$ un $c \mid a$, tad $\gcd(a, b) = b$ un $\gcd(a, c) = c$, līdz ar to no dotās sakarības izriet, ka $\gcd(b, c) = 2023$, kas arī bija jāpierāda.

Aplūkosim gadījumu, kad $b \nmid a$ un $c \nmid a$. Tādā gadījumā $\gcd(a, b) \leq \frac{b}{2}$ and $\gcd(a, c) \leq \frac{c}{2}$, jo $\gcd(a, c) = \gcd(a \pmod c, c) \leq \frac{c}{2}$ (lielākais skaitlis, kas dala c un nav c, nevar pārsniegt $\frac{c}{2}$). Tad:

$$b + c + 2023 = \gcd(a, b) + \gcd(a, c) + \gcd(b, c) \leq \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \gcd(b, c)$$
$$b + c + 4046 \leq 2\gcd(b, c) \leq 2\min(b, c) \leq b + c$$

Pēdējā nevienādība ir acīmredzama pretruna.

Aplūkosim gadījumu, kad $b \mid a$ un $c \nmid a$. Tādā gadījumā $c \nmid b$, jo pretējā gadījumā iegūstam, ka $b \mid a$, $c \mid b$, kas nozīmē, ka $c \mid a$, kas ir pretrunā ar mūsu pieņēmumu. Ievērosim, ka $\gcd(a,b) = b$, $\gcd(a,c) \le \frac{c}{2}$ un $\gcd(b,c) \le \frac{c}{2}$. Līdz ar to iegūstam, ka

$$\begin{aligned} b + c + 2023 &= \gcd(a,b) + \gcd(a,c) + \gcd(b,c) \\ c + 2023 &= \gcd(a,c) + \gcd(b,c) \le \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c \end{aligned}$$

Pēdējā nevienādība ir acīmredzama pretruna. Līdzīgi varam apskatīt gadījumu, kad $b \nmid a$, $c \mid a$, kurā atkal iegūsim pretrunu. Visi iespējamie gadījumi ir izskatīti.

5.piemērs Zināms, ka dažādiem naturāliem skaitļiem a, b, skaitlis $ab(a+b)$ dalās ar a^2+ab+b^2. Pierādīt, ka $|a-b| \ge \sqrt[3]{ab}$.

Atrisinājums. Ievērosim, ka:

$$a^2 + ab + b^2 \mid a(a^2 + ab + b^2) - ab(a+b) = a^3$$

Analoģiski varam secināt, ka:

$$a^2 + ab + b^2 \mid b(a^2 + ab + b^2) - ab(a+b) = b^3$$

Pieņemsim, ka $\gcd(a,b) = d$ un $a = dx$, $b = dy$, kur $\gcd(x,y) = 1$. Tādā gadījumā:

$$\begin{aligned} d^2(x^2 + xy + y^2) \mid d^3x^3 &\implies x^2 + xy + y^2 \mid dx^3 \\ d^2(x^2 + xy + y^2) \mid d^3y^3 &\implies x^2 + xy + y^2 \mid dy^3 \end{aligned}$$

Pierādīsim, ka $\gcd(x^3, x^2 + xy + y^2) = 1$. Pieņemsim pretējo, ka $\gcd(x^3, x^2 + xy + y^2) \ne 1$. Tādā gadījumā eksistē pirmskaitlis p ar īpašību, ka $p \mid \gcd(x^3, x^2 + xy + y^2)$. Tas nozīmē, ka $p \mid x^3 \implies p \mid x$ un $p \mid x^2 + xy + y^2 \implies p \mid y^2 \implies p \mid y$. Taču tā ir pretruna ar to, ka $\gcd(x,y) = 1$, jo esam ieguvuši, ka $p \mid \gcd(x,y)$. Tas ļauj mums secināt, ka $x^2 + xy + y^2 \mid dx^3 \implies x^2 + xy + y^2 \mid d$. Līdz ar to

$$d \ge x^2 + xy + y^2 > xy \qquad (\star)$$

Pārveidosim pierādāmo izteiksmi:

$$\begin{aligned} |a-b| &\ge \sqrt[3]{ab} \\ |a-b|^3 &\ge ab \\ d^3|x-y|^3 &\ge d^2xy \\ d|x-y|^3 &\ge xy \end{aligned}$$

Acīmredzami, ka $x \ne y$, jo $a \ne b$. Līdz ar to varam secināt, ka $|x-y| \ge 1$. Taču:

$$d|x-y|^3 \ge d \cdot 1^3 = d > xy$$

kur pēdējā sakarība izriet no $(\star)$. Līdz ar to ekvivalentā sakarība pierādāmajai ir patiesa. Tas nozīmē, ka arī sākotnējā ir patiesa, kas arī bija jāpierāda.

4 Valuācijas

4.1 Definīcija un svarīgākas īpašības

Definīcija. Dots fiksēts pirmskaitlis p. Par skaitļa x **valuāciju** no pirmskaitļa p sauc lielāko pirmskaitļa p pakāpi, ar ko dalās skaitlis x. To apzīmē ar $\nu_p(x)$.

No definīcijas izriet, ka $\nu_p(x) = k$ nozīmē, ka $p^k \mid x$, taču $p^{k+1} \nmid x$. Piemēram, $\nu_3(36) = \nu_3(3^2 \cdot 2^2) = 2$, $\nu_5(375) = \nu_5(5^3 \cdot 3) = 3$, $\nu_{11}(5) = 0$.

Valuāciju īpašības. Doti naturāli skaitļi a, b. Izpildās sekojošās sakarības

1. Katram pirmskaitlim p izpildās $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$
2. Katram pirmskaitlim p izpildās $\nu_p(\frac{a}{b}) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$
3. Ja $b \mid a$, tad katram pirmskaitlim p izpildās $\nu_p(a) \geq \nu_p(b)$.
4. Katram pirmskaitlim p izpildās $\nu_p(a \pm b) = \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$, ja $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$
5. Katram pirmskaitlim p izpildās $\nu_p(\gcd(a, b)) = \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$
6. Ja $a + b$ ir pirmskaitļa p pakāpe, tad $\nu_p(a) = \nu_p(b)$

Pierādījums. Pirmās un otrās īpašības pierādījumi ir analoģiski, tāpēc pierādīsim tikai pirmo īpašību. Pieņemsim, ka $a = p^x m$ un $b = p^y n$, kur $p \nmid m$ un $p \nmid n$. Ievērosim, ka $\nu_p(a) = x$ un $\nu_p(b) = y$. Ievērosim, ka

$$\nu_p(ab) = \nu_p(p^{x+y}mn) = x + y = \nu_p(a) + \nu_p(b),$$

kas arī bija jāpierāda.

Pierādīsim trešo īpašību. Ievērosim, ja $b \mid a$, tad $\frac{a}{b}$ ir vesels skaitlis, kas nozīmē, ka $\nu_p(\frac{a}{b}) \geq 0$ katram pirmskaitlim p. No otrās īpašības izriet, ka

$$\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0 \implies \nu_p(a) - \nu_p(b) \geq 0 \implies \nu_p(a) \geq \nu_p(b),$$

kas arī bija jāpierāda. Ir svarīgi atzīmēt, ka izpildās arī apgrieztā īpašība – ja katram pirmskaitlim p izpildās, ka $\nu_p(a) \geq \nu_p(b)$, tad $b \mid a$. Pierādījums ir acīmredzams no aritmētikas pamatteorēmas.

Pierādīsim ceturto īpašību. Pieņemsim, ka $a = p^x m$ un $b = p^y n$, kur $p \nmid m$ un $p \nmid n$. Ievērosim, ka $\nu_p(a) = x$ un $\nu_p(b) = y$. Tā kā $x \neq y$, tad, nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $x > y$. Aplūkosim skaitli $a \pm b$

$$a \pm b = p^x m \pm p^y n = p^y(p^{x-y}m \pm n)$$

Ievērosim, ka skaitlis $p^{x-y}m \pm n$, nedalās ar p, jo $p^{x-y}m$ dalās ar p, savukārt skaitlis n nedalās ar p, līdz ar to summa arī nevar dalīties ar p. Tas nozīmē, ka

$$\nu_p(a \pm b) = \nu_p(p^y(p^{x-y}m \pm n)) = y = \min(x, y) = \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$$

Tas pierāda prasīto. Ir interesanti izpētīt, kas izmainās mūsu spriedumos, ja $\nu_p(a) = \nu_p(b)$. Tādā gadījumā $a = p^x m$ un $b = p^x n$, kas nozīmē, ka

$$a + b = p^x(m + n)$$

Ievērosim, ka mēs nevaram neko pateikt par $\nu_p(m+n)$, jo divu skaitļu summa, kur katrs no tiem nedalās ar p, var dalīties ar p vai tā pakāpi. Piemēram, ja $p = 3$, $m = 2$ un $n = 7$, tad $3^2 \mid 2 + 7$. Tas nozīmē, ka gadījumā, ja $\nu_p(a) = \nu_p(b)$, mēs vienīgi zinām to, ka $\nu_p(a + b) \geq \nu_p(a)$, ja nav dota nekāda papildus informācija par skaitļiem m un n.

Piektā īpašība izriet no aritmētikas pamatteorēmas un no lielākā kopīgā dalītāja īpašībām, ko mēs apspriedām 3. sadaļā.

Pierādīsim sesto īpašību. Pieņemsim, ka $a \pm b = p^z$, kur z ir naturāls skaitlis, kā arī to, ka $a = p^x m$ un $b = p^y n$, kur $p \nmid m, n$. Ievērosim, ka $\nu_p(a) = x$ un $\nu_p(b) = y$. Pieņemsim pretējo, ka $x \neq y$ un, nezaudējot vispārīgumu, to, ka $x > y$. Ievērosim, ka

$$\begin{gathered} a + b = p^z \\ p^x m + p^y n = p^z \\ p^y(p^{x-y}m + n) = p^z \end{gathered}$$

Ievērosim, ka skaitlis $p^{x-y}m + n$ nedalās ar p, jo n nedalās ar p. Tas nozīmē, ka skaitlis $p^{x-y}m + n$ nevar būt skaitļa p pakāpe, līdz ar to vienīgā iespēja, ka tas ir vienāds ar 1, taču tas acīmredzami nav iespējams. Līdz ar to secinām, ka $x = y$ jeb $\nu_p(a) = \nu_p(b)$, kas arī bija jāpierāda. Ievērosim, ka, ja $a - b$ ir pirmskaitļa pakāpe, tad ne noteikti $\nu_p(a) = \nu_p(b)$. Piemēram, $16 - 8 = 8$, taču $\nu_2(16) = 4$, bet $\nu_2(8) = 3$.

4.2 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs Doti nepāra naturāli skaitļi a, b ar īpašību, ka $a^b b^a$ ir vesela skaitļa kvadrāts. Pierādīt, ka skaitlis ab ir vesela skaitļa kvadrāts.

Atrisinājums. Aplūkosim patvaļīgu pirmskaitli p. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$2 \mid \nu_p(a^b b^a) = \nu_p(a^b) + \nu_p(b^a) = b\nu_p(a) + a\nu_p(b)$$

Tā kā a, b ir nepāra skaitļi, tad $a \equiv b \equiv 1 \pmod 2$. Secinām, ka

$$0 \equiv b\nu_p(a) + a\nu_p(b) \equiv \nu_p(a) + \nu_p(b) \pmod 2$$

Tas nozīmē, ka $2 \mid \nu_p(a) + \nu_p(b) = \nu_p(ab)$. Atkārtojot šo spriedumu katram pirmskaitlim p, iegūstam, ka ab ir vesela skaitļa kvadrāts, kas arī bija jāpierāda.

2.piemērs. Doti naturāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$ ar īpašību, ka $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_{101}) = 1$. Zināms, ka jebkuru 51 skaitļu reizinājums dalās ar atlikušo 50 skaitļu reizinājumu. Pierādīt, ka $a_1 a_2 \ldots a_{101}$ ir vesela skaitļa kvadrāts.

Atrisinājums. Aplūkosim patvaļīgu pirmskaitli p. Ievērosim, ka eksistē vismaz viens tāds skaitlis a_i, ka $p \nmid a_i$. Ja tas tā nebūtu, tad katrs no skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$ dalītos ar p, kas ir pretrunā ar to, ka $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_{101}) = 1$. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $p \nmid a_1$ jeb $\nu_p(a_1) = 0$. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$a_{52} a_{53} \ldots a_{101} \mid a_1 a_2 \ldots a_{51}$$

No valuāciju īpašībām izriet, ka

$$\begin{gathered} \nu_p(a_1 a_2 \ldots a_{51}) \geq \nu_p(a_{52} a_{53} \ldots a_{101}) \\ \nu_p(a_1) + \nu_p(a_2) + \ldots + \nu_p(a_{51}) \geq \nu_p(a_{52}) + \nu_p(a_{53}) + \ldots + \nu_p(a_{101}) \\ \nu_p(a_2) + \ldots + \nu_p(a_{51}) \geq \nu_p(a_{52}) + \nu_p(a_{53}) + \ldots + \nu_p(a_{101}) \end{gathered}$$

No uzdevuma nosacījumiem izriet arī, ka

$$a_2 \dots a_{51} \mid a_1 a_{52} a_{53} \dots a_{101}$$
$$\nu_p(a_1 a_{52} a_{53} \dots a_{101}) \geq \nu_p(a_2 \dots a_{51})$$
$$\nu_p(a_1) + \nu_p(a_{52}) + \dots + \nu_p(a_{101}) \geq \nu_p(a_2) + \dots + \nu_p(a_{51})$$
$$\nu_p(a_{52}) + \dots + \nu_p(a_{101}) \geq \nu_p(a_2) + \dots + \nu_p(a_{51})$$

No iegūtajām nevienādībām izriet, ka

$$\nu_p(a_{52}) + \dots + \nu_p(a_{101}) \geq \nu_p(a_2) + \dots + \nu_p(a_{51}) \geq \nu_p(a_{52}) + \nu_p(a_{53}) + \dots + \nu_p(a_{101})$$
$$\nu_p(a_2) + \dots + \nu_p(a_{51}) = \nu_p(a_{52}) + \dots + \nu_p(a_{101}) = S$$

Secinām, ka

$$\nu_p(a_1 a_2 \dots a_{101}) = \nu_p(a_1) + S + S = 2S$$

Tas nozīmē, ka $2 \mid \nu_p(a_1 a_2 \dots a_{101})$, atkārtojot šo spriedumu katram pirmskaitlim p, iegūstam, ka $a_1 a_2 \dots a_{101}$ ir vesela skaitļa kvadrāts, kas arī bija jāpierāda.

3.piemērs Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$ un naturāli skaitļi $a_1, a_2, \dots, a_n$ ar īpašību, ka $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ un katram $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ir spēkā, ka $a_i \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Pierādīt, ka

$$a_1 a_2 \dots a_n \mid (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{n-2}$$

Atrisinājums. Aplūkosim patvaļīgu pirmskaitli p. Vispirms pierādīsim, ka eksistē 2 skaitļi, kuri nedalās ar p. Acīmredzami, ka eksistē vismaz viens, jo pretējā gadījumā $p \mid \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$, kas ir pretrunā ar to, ka $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$. Pieņemsim, ka eksistē tieši viens skaitlis, teiksim, a_n, kurš nedalās ar p. Tādā gadījumā

$$p \mid a_1 \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Ja visi skaitļi $a_1, \dots, a_{n-1}$ arī dalītos ar p, tad, lai izpildītos augstāk minētais dalāmības nosacījums, ir jābūt spēkā, ka $p \mid a_n$, taču tā ir pretruna ar mūsu pieņēmumu. Līdz ar to vismaz viens no skaitļiem $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ nedalās ar p. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka a_{n-1} nedalās ar p. Tas nozīmē, ka $\nu_p(a_n) = \nu_p(a_{n-1}) = 0$

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$\nu_p(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq \nu_p(a_1)$$
$$\nu_p(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq \nu_p(a_2)$$
$$\nu_p(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq \nu_p(a_3)$$
$$\dots$$
$$\nu_p(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq \nu_p(a_{n-2})$$

Saskaitot šīs $n - 2$ nevienādības, iegūsim, ka

$$(n-2)\nu_p(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq \nu_p(a_1) + \dots + \nu_p(a_{n-2})$$
$$\nu_p((a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{n-2}) \geq \nu_p(a_1 \dots a_{n-2})$$
$$\nu_p((a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{n-2}) \geq \nu_p(a_1 a_2 \dots a_n)$$

Pārejā uz pēdējo rindu mēs izmantojām to, ka

$$\nu_p(a_1 \dots a_{n-2}) = \nu_p(a_1 \dots a_{n-2}) + \nu_p(a_{n-1}) + \nu_p(a_n) = \nu_p(a_1 a_2 \dots a_n)$$

Atkārtojot šo spriedumu katram pirmskaitlim p, iegūsim, ka $a_1 a_2 \dots a_n \mid (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{n-2}$, kas arī bija jāpierāda.

4.piemērs Doti naturāli skaitļi $b, n > 1$. Pieņemsim, ka katram $k > 1$ eksistē tāds vesels skaitlis a_k, ka $b - a_k^n$ dalās k. Pierādīt, ka $b = A^n$, kur A ir kaut kāds vesels skaitlis.

Atrisinājums. Aplūkosim pirmskaitli $p \mid b$ un pieņemsim, ka $\nu_p(b) = t$. Aplūkosim uzdevuma nosacījumus pie $k = p^{t+1}$

$$k \mid b - a_k^n$$
$$\nu_p(p^{t+1}) \leq \nu_p(b - a_k^n)$$
$$t + 1 \leq \nu_p(b - a_k^n)$$

Pieņemsim, ka $\nu_p(b) < \nu_p(a_k^n)$, tad $\nu_p(b - a_k^n) = \min(\nu_p(b), \nu_p(a_k^n)) = \nu_p(b) = t$. Tas nozīmē, ka ir jāizpildās $t + 1 \leq t$, kas ir pretruna.

Pieņemsim, ka $\nu_p(b) > \nu_p(a_k^n)$, tad $\nu_p(b - a_k^n) = \min(\nu_p(b), \nu_p(a_k^n)) = \nu_p(a_k^n) < \nu_p(b) = t$. Tas nozīmē, ka ir jāizpildās $t + 1 \leq t$, kas ir pretruna.

Secinām, ka $\nu_p(b) = \nu_p(a_k^n) = n\nu_p(a_k)$, kas nozīmē, ka $n \mid \nu_p(b)$. Atkārtojat šo spriedumu katram pirmskaitlim $p \mid b$, iegūstam, ka skaitlis b ir kaut kāda vesela skaitļa n-tā pakāpe, kas arī bija jāpierāda.

5.piemērs Doti naturāli skaitļi a, b ar īpašību, ka skaitlis $a+b^3$ dalās ar skaitli $a^2+3ab+3b^2-1$. Pierādīt, ka skaitlis $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$ dalās ar vesela skaitļa kubu.

Atrisinājums. Ievērosim, ka

$$a^2 + 3ab + 3b^2 - 1 \mid a + b^3$$
$$a^2 + 3ab + 3b^2 - 1 \mid a(a^2 + 3ab + 3b^2 - 1) + a + b^3$$
$$a^2 + 3ab + 3b^2 - 1 \mid a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - a + a + b^3$$
$$a^2 + 3ab + 3b^2 - 1 \mid a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$a^2 + 3ab + 3b^2 - 1 \mid (a + b)^3$$

Ievērosim, ka no šī izriet – ja kaut kādam pirmskaitlim $p \mid a^2+3ab+3b^2-1$, tad $p \mid (a+b)^3$, kas nozīmē, ka $p \mid a + b$. Citiem vārdiem sakot, skaitlis $a + b$ satur visus skaitļa $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$ pirmreizinātājus (un iespējams vēl kādus citus).

Pieņemsim, ka skaitlis $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$ nedalās ne ar vienu vesela skaitļa kubu. Tas nozīmē, ka $\nu_p(a^2 + 3ab + 3b^2 - 1) \leq 2$ katram pirmskaitlim p (ja tas tā nebūtu, tad skaitlis $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$ dalītos ar p^3, kas ir pretrunā ar mūsu pieņēmumu). Ievērosim, ka $\nu_p((a + b)^2) = 2\nu_p(a + b) \geq 2$. Līdz ar to $\nu_p((a + b)^2) \geq \nu_p(a^2 + 3ab + 3b^2 - 1)$. Atkārtojot šo spriedumu katram pirmskaitlim p, secinām, ka $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1 \mid (a + b)^2$. Tas nozīmē, ka

$$(a + b)^2 \geq a^2 + 3ab + 3b^2 - 1 \implies a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 + 3ab + 3b^2 - 1 \implies 0 \geq ab + 2b^2 - 1$$

Pēdējā nevienādība ir nepatiesa, jo a, b ir naturāli skaitļi. Tas nozīmē, ka mūsu pieņēmums ir aplams un skaitlis $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$ dalās ar kāda vesela skaitļa kubu.

5 Dalāmības funkcionālvienādojumi

Šajā sadaļā mēs aplūkosim, kā risināt uzdevumus, kuros jāatrod funkcija, kurai izpildās kaut kāds dalāmības nosacījums.

1.piemērs Ar $\mathbb{N}$ apzīmēsim naturālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ar īpašību, ka

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

visiem naturāliem skaitļiem m un n.

Atrisinājums. Ar $P(m, n)$ apzīmēsim doto sakarību. Ievērosim, ka no $P(2, 2)$ izriet, ka

$$4 + f(2) \mid 2f(2) + 2$$

Varam iegūt, ka

$$4 + f(2) \mid 2(f(2) + 4) - (2f(2) + 2) = 6$$

Secinām, ka $4 + f(2)$ var pieņemt vērtības $1, 2, 3, 6$, taču pirmās trīs no tām nav iespējamas, jo tādā gadījumā iznāk, ka $f(2)$ ir attiecīgi $-3, -2, -1$, kas ir pretrunā ar to, ka funkcija pieņem naturālās vērtības. Līdz ar to $4 + f(2) = 6$, kas nozīmē, ka $f(2) = 2$. Tagad no $P(2, 1)$ varam iegūt, ka

$$4 + f(1) \mid 2f(2) + 1 = 5$$

Secinām, ka $4 + f(1) \leq 5$, līdz ar to $f(1) = 1$. No $P(m, 1)$ izriet, ka

$$1 + m^2 \mid mf(m) + 1 \implies mf(m) + 1 \geq 1 + m^2 \implies f(m) \geq m$$

Savukārt no $P(1, m)$ izriet, ka

$$1 + f(m) \mid 1 + m \implies m + 1 \geq 1 + f(m) \implies m \geq f(m)$$

Apvienojot kopā abas iegūtās nevienādības, secinām, ka

$$m \geq f(m) \geq m \implies f(m) = m.$$

Viegli pārbaudīt, ka funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus.

Plaši izmantota ideja funkcionālvienādojumus par dalāmību ir iegūt, ka kaut kāds skaitlis dala, piemēram, p^x, kur x ir kaut kāds naturāls skaitlis un p pirmskaitlis. Tas nozīmē, ka dotais skaitlis var pieņemt tikai vērtības $1, p, p^2, \ldots, p^x$. Pārlasot gadījumus var iegūt, ka daudzas no tām vērtībām neder, kas ļauj iegūt funkcijas vērtību kaut kādos noteiktos punktos. Šī ideja ir ilustrēta sīkāk nākamajos 2 piemēros.

2.piemērs Ar $\mathbb{N}$ apzīmēsim naturālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ar īpašību, ka

$$f(m) + f(n) \mid m + n$$

visiem naturāliem skaitļiem m un n.

Atrisinājums. Ar $P(m, n)$ apzīmēsim doto sakarību. No $P(1, 1)$ izriet, ka

$$f(1) + f(1) \mid 2 \implies 2f(1) \mid 2 \implies f(1) \mid 1$$

Tas nozīmē, ka $f(1) = 1$. Aplūkosim $P(p - 1, 1)$, kur p ir pirmskaitlis.

$$f(p - 1) + f(1) \mid p \implies f(p - 1) + 1 \mid p$$

Tas nozīmē, ka $f(p-1)+1=1$ vai arī $f(p-1)+1=p$. Pirmais gadījums nav iespējams, jo tādā gadījumā iznāk, ka $f(p-1)=0$, kas ir pretrunā ar to, ka funkcija pieņem naturālās vērtības. Līdz ar to secinām, ka $f(p-1)+1=p$, kas nozīmē, ka $f(p-1)=p-1$ visiem pirmskaitļiem p.

Fiksēsim skaitli n. Aplūkosim $P(n,p-1)$

$$\begin{gathered} f(n)+f(p-1) \mid n+p-1 \\ f(n)+p-1 \mid n+p-1 \\ f(n)+p-1 \mid n+p-1-(f(n)+p-1) \\ f(n)+p-1 \mid n-f(n) \end{gathered}$$

Ievērosim, ka $n-f(n)$ ir fiksēts skaitlis, kas dalās ar $f(n)+p-1$, kur p ir patvaļīgs pirmskaitlis. Taču pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz, tāpēc mēs varam izvēlēties tādu pirmskaitli p, ka $f(n)+p-1>|n-f(n)|$. Vienīgais skaitlis, kas dalās ar pēc patikas lieliem skaitļiem, ir skaitlis 0. Līdz ar to mēs secinām, ka

$$f(n)-n=0 \implies f(n)=n$$

Atkārtojot šo spriedumu katram naturālam skaitlim n, secinām, ka $f(x)=x$ visiem naturāliem skaitļiem x. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus.

3.piemērs Ar $\mathbb{N}$ apzīmēsim naturālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ar īpašību, ka

$$f(a)+b \mid a^2+f(a)f(b)$$

visiem naturāliem skaitļiem a,b.

Atrisinājums. Ar $P(a,b)$ apzīmēsim doto sakarību. No $P(1,1)$ izriet, ka

$$f(1)+1 \mid 1+f(1)^2 \implies f(1)^2+1 \equiv 0 \pmod{f(1)+1}$$

Ievērosim, ka

$$\begin{gathered} f(1)+1 \equiv 0 \pmod{f(1)+1} \\ f(1) \equiv -1 \pmod{f(1)+1} \\ f(1)^2 \equiv 1 \pmod{f(1)+1} \\ 0 \equiv f(1)^2+1 \equiv 2 \pmod{f(1)+1} \\ 2 \equiv 0 \pmod{f(1)+1} \\ f(1)+1 \mid 2 \end{gathered}$$

Tas nozīmē, ka $f(1)+1$ var pieņemt vērtības 1 vai 2. Ievērosim, ka vērtību 1 nevar pieņemt, jo tādā gadījumā $f(1)=0$, līdz ar to secinām, ka $f(1)+1=2 \implies f(1)=1$.

Apgalvojums. Visiem pirmskaitļiem $p>2024$ izpildās $f(p)=p$.
Pierādījums. Aplūkosim patvaļīgu pirmskaitli $p>2024$. No $P(p,p)$ izriet, ka

$$f(p)+p \mid p^2+f(p)^2 \implies p^2+f(p)^2 \equiv 0 \pmod{p+f(p)}$$

Ievērosim, ka

$$\begin{gathered} p+f(p) \equiv 0 \pmod{p+f(p)} \\ f(p) \equiv -p \pmod{p+f(p)} \\ f(p)^2 \equiv p^2 \pmod{p+f(p)} \\ 0 \equiv f(p)^2+p^2 \equiv 2p^2 \pmod{f(p)+p} \\ 2p^2 \equiv 0 \pmod{f(p)+p} \\ f(p)+p \mid 2p^2 \end{gathered}$$

Tas nozīmē, ka $f(p)+p$ var pieņemt vērtības $1, 2, p, 2p, p^2, 2p^2$. Ievērosim, ka vērtības $1, 2, p$ nav iespējamas, jo tādā gadījumā $f(p)$ ir vienāds ar $1-p, 2-p, 0$, kas ir pretrunā ar to, ka funkcija pieņem naturālas vērtības, jo $p > 2023$.

Pieņemsim, ka $f(p)+p = p^2$, tad $f(p) = p^2 - p$. Tādā gadījumā no $P(p, 1)$ izriet, ka

$$f(p)+1 \mid p^2 + f(p)f(1)$$
$$p^2 - p + 1 \mid 2p^2 - p$$
$$p^2 - p + 1 \mid (2p^2 - p) - (p^2 - p + 1)$$
$$p^2 - p + 1 \mid p^2 - 1$$
$$p^2 - p + 1 \mid p^2 - 1 - (p^2 - p + 1) = p - 2$$

Tas nozīmē, ka $p - 2 \geq p^2 - p + 1$, kas acīmredzami nav patiesi, ja $p > 2024$.

Pieņemsim, ka $f(p)+p = 2p^2$, tad $f(p) = 2p^2 - p$. Tādā gadījumā no $P(p, 1)$ izriet, ka

$$f(p)+1 \mid p^2 + f(p)f(1)$$
$$2p^2 - p + 1 \mid p^2 + 2p^2 - p$$
$$2p^2 - p + 1 \mid 3p^2 - p$$
$$2p^2 - p + 1 \mid 3p^2 - p - (2p^2 - p + 1)$$
$$2p^2 - p + 1 \mid p^2 - 1$$

Tas nozīmē, ka $p^2 - 1 \geq 2p^2 - p + 1$, kas acīmredzami nav patiesi, ja $p > 2024$. Secinām, ka vienīgā iespējamā $f(p)+p$ vērtība ir $2p$, kas nozīmē, ka $f(p) = p$ visiem pirmskaitļiem $p > 2024$.

Fiksēsim naturālu skaitli b. Aplūkosim $P(p, b)$, kur p ir patvaļīgs pirmskaitlis, kurš ir lielāks par 2024. Ievērosim, ka

$$f(p) + b \mid p^2 + f(p)f(b)$$
$$p + b \mid p^2 + pf(b)$$
$$p + b \mid p(p + f(b))$$

Izvēlēsimies tādu p, ka $p \nmid b$, jo tādā gadījumā $\gcd(p+b, p) = \gcd(b, p) = 1$. Tas nozīmē, ka

$$p + b \mid p(p + f(b))$$
$$p + b \mid p + f(b)$$
$$p + b \mid p + f(b) - (p + b)$$
$$p + b \mid f(b) - b$$

Ievērosim, ka $f(b) - b$ ir fiksēts skaitlis. Tā kā pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz, tad mēs varam atrast tādu pirmskaitli p, ka $\gcd(p, b) = 1$ un $b + p > |f(b) - b|$. Taču vienīgais veselais skaitlis, kurš dalās ar pēc patikas lieliem skaitļiem, ir 0. Secinām, ka $f(b) - b = 0 \implies f(b) = b$. Atkārtojot šo spriedumu katram naturālam skaitlim n, secinām, ka $f(x) = x$ visiem naturāliem skaitļiem x. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus.