

1.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums Naturālam skaitlim n eksistē 2 dažādi dalītāji a un b ar īpašību, ka $(a-1)(b+2) = n-2$. Pierādīt, ka skaitlis $2n$ ir naturāla skaitļa kvadrāts.

Atrisinājums. Ievērosim, ka

$$(a-1)(b+2) = n-2 \implies ab+2a-b = n$$

Ievērosim, ka $a \mid n$, tātad $a \mid ab+2a-b$, kas nozīmē, ka $a \mid b$. No otras puses, mēs zinām, ka $b \mid n$, tātad $b \mid ab+2a-b$, kas nozīmē, ka $b \mid 2a$. Secinām, ka tas ir iespējams tad un tikai tad, ja $a = b$ vai $b = 2a$. Pirmais gadījums nav iespējams, jo uzdevumā ir dots, ka skaitļi a un b ir dažādi, tātad $b = 2a$. Tādā gadījumā $ab+2a-b = n \implies n = 2a^2 \implies 2n = (2a)^2$. Secinām, ka $2n$ ir naturāla skaitļa kvadrāts, kas arī bija jāpierāda.

2.uzdevums Atrast visus naturālo skaitļu pārus (n, d) ar īpašību, ka $d \mid n^2$ un $(n - d)^2 < 2d$.

Atrisinājums. Ievērosim, ka

$$\begin{aligned}(n - d)^2 &< 2d \\ n^2 - 2nd + d^2 &< 2d \\ \frac{n^2}{d} - 2n + d &< 2 \\ \frac{n^2}{d} + d &< 2n + 2\end{aligned}$$

No sakarības starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko savukārt, izriet, ka $\frac{n^2}{d} + d \geq 2n$. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka skaitlis $\frac{n^2}{d} + d$ ir vesels, tāpēc secinām, ka $\frac{n^2}{d} + d$ ir vienāds ar $2n$ vai $2n + 1$. Aplūkosim katru gadījumu atsevišķi:

- Ja $\frac{n^2}{d} + d = 2n$, tad $n^2 + d^2 = 2nd$, kas nozīmē, ka $(n - d)^2 = 0$ jeb to, ka $n = d$. Viegli pārbaudīt, ka skaitļu pāri (k, k) , kur k ir vesels skaitlis patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.
- Ja $\frac{n^2}{d} + d = 2n + 1$, tad $(n - d)^2 = d$. Secinām, ka d ir vesela skaitļa kvadrāts, teiksim $d = k^2$. Tādā gadījumā

$$(n - k^2) = k^2 \implies n - k^2 = \pm k \implies n = k(k \pm 1)$$

Viegli pārbaudīt, ka skaitļu pāri $(k(k + 1), k^2)$ un $(k(k - 1), k^2)$ patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

3. uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kurām visiem naturāliem skaitļiem m un n skaitlis $f(m) + f(n) - mn$ ir atšķirīgs no 0 un daļa skaitli $mf(m) + nf(n)$.

Atrisinājums. Ar $P(m, n)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu.

No $P(1, 1)$ izriet, ka $2f(1) - 1 \mid 2f(1)$. Tas arī nozīmē, ka $2f(1) - 1 \mid 2f(1) - (2f(1) - 1) = 1$, līdz ar to, $2f(1) - 1 \leq 1 \implies f(1) = 1$. Izmantojot šo rezultātu, aplūkosim $P(1, n)$:

$$\begin{aligned} f(n) - n + 1 \mid nf(n) + 1 &\implies f(n) - n + 1 \mid nf(n) + 1 - (n + 2)(f(n) - n + 1) = \\ &= n^2 - 2f(n) + n - 2 \implies f(n) - n + 1 \mid n^2 - 2f(n) + n - 2 \quad (1) \end{aligned}$$

Savukārt no $P(n, n)$ izriet, ka

$$2f(n) - n^2 \mid 2nf(n) \implies 2f(n) - n^2 \mid 2nf(n) - n(2f(n) - n^2) = n^3 \quad (2)$$

Apgalvojums. $f(p) = p^2$ visiem pirmskaitļiem $p \geq 100$.

Pierādījums. Vienādojumā (2) aizvietosim n ar p :

$$2f(p) - p^2 \mid p^3.$$

Tā kā vienīgie skaitļa p^3 veseli dalītāji ir $\{-p^3, -p^2, -p, -1, 1, p, p^2, p^3\}$, tad

$$f(p) \in \left\{ \frac{p^2 + p^3}{2}, \frac{p^2 + p^2}{2}, \frac{p^2 + p}{2}, \frac{p^2 + 1}{2}, \frac{p^2 - 1}{2}, \frac{p^2 - p}{2}, \frac{p^2 - p^2}{2}, \frac{p^2 - p^3}{2} \right\}$$

Tā kā $f(p) > 0$, tad

$$f(p) \in \left\{ \frac{p^2 \pm 1}{2}, \frac{p^2 \pm p}{2}, p^2, \frac{p^3 + p^2}{2} \right\}$$

Vienādojumā (1) aizvietosim n ar p . Apskatīsim dažus gadījumus:

- Ja $f(p) = \frac{p^2 \pm 1}{2}$, tad $\frac{p^2 \pm 1}{2} - p + 1 \mid p - 1 \mp 1 \implies p^2 \pm 1 - 2p + 2 \mid 2p - 2 \mp 2$. Bet $0 < 2p - 2 \mp 2 < p^2 \pm 1 - 2p + 2$ visiem $p \geq 100$, kas nav iespējams. Analogiski:
- Ja $f(p) = \frac{p^2 + p}{2}$, tad $\frac{p^2 + p}{2} - p + 1 \mid p^2 - p + 1 \implies p^2 - p + 2 \mid p^2 - p$, kas nav iespējams.
- Ja $f(p) = \frac{p^2 - p}{2}$, tad $p^2 - 3p + 2 \mid 4p$, kas nav iespējams.
- Ja $f(p) = \frac{p^3 + p^2}{2}$, tad $\frac{p^3 + p^2}{2} - p + 1 \mid p^2 - p + 1 \implies p^3 + p^2 - 2p + 1 \mid 2p^2 - 2p + 2$, kas nav iespējams.

Līdz ar to $f(p) = p^2$ visiem $p \geq 100$.

Tagad apskatīsim patvaļīgu naturālo skaitli n un tādu pirmskaitli p , ka $p > f(n)$. No $P(n, p)$ izriet, ka

$$\begin{aligned} p^2 + f(n) - pn \mid p^3 + nf(n) &\implies p^2 + f(n) - pn \mid p^3 + nf(n) - n(p^2 + f(n) - pn) \implies \\ & p^2 + f(n) - pn \mid p^3 - np^2 + pn^2 \end{aligned}$$

Tā kā p un $f(n)$ ir savstarpēji pirmskaitļi, tad arī p un $p^2 + f(n) - pn$ ir savstarpēji pirmskaitļi, kas nozīmē, ka

$$p^2 + f(n) - pn \mid p^2 - np + n^2 \implies p^2 + f(n) - pn \mid p^2 - np + n^2 - (p^2 + f(n) - pn) = n^2 - f(n)$$

Izvēlēsimies tādu p , lai $p^2 + f(n) - pn > n^2 - f(n)$ arī izpildās. Tad $n^2 - f(n) = 0$ jeb $f(n) = n^2$. Tā kā analogiskus spriedumus var veikt patvaļīgiem naturāliem skaitļiem n , secinām, ka $f(n) = n^2$ visiem naturāliem skaitļiem n . Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

4. uzdevums Sauksim naturālu skaitli n par *sigma puisi*, ja jebkuram skaitļa n dalītājam d skaitlis $n(n+1)$ dalās ar ar skaitli $d(d+1)$. Pierādīt, ka jebkuriem 4 sigma puisu skaitļiem A, B, C un D izpildās

$$\text{LKD}(A, B, C, D) = 1.$$

Atrisinājums. Lai atrisinātu uzdevumu, mums ir jāpierāda, ka neeksistē neviena pirmskaitļa, kas dala četrus dažādus sigma puisu skaitļus. Mēs pierādīsim, ka visi sigma puisi ir formā $n = 1$, $n = p$, kur p ir pirmskaitlis, vai $n = p(p^2 - p - 1)$, kur p un $p^2 - p - 1$ ir pirmskaitļi. No tā sekos, ka vienīgie sigma puisu skaitļi, kas dalās ar kādu pirmskaitli p ir $p, p(p^2 - p - 1)$ un $q(q^2 - q - 1)$, kur q ir pirmskaitlis un $q^2 - q - 1 = p$, kas ir tikai trīs skaitļi, līdz ar to tas dos prasīto

Pieņemsim, ka n ir sigma puisis. Ja $a \mid n$, tad pierakstot $n = ab$, un izvēloties $d = b$, mēs dabūjam, ka

$$b(b+1) \mid n(n+1) = ab(ab+1) \implies b+1 \mid a(ab+1) \implies b+1 \mid a(a-1) \quad (*)$$

kur mēs izmantojam, ka b un $b+1$ ir savstarpēji pirmskaitļi un ka $a(a-1) = a^2(b+1) - a(ab+1)$.

1. apgalvojums. n ir kvadrātbrīvs.

Pierādījums. Ja $p^2 \mid n$ kādam pirmskaitlim p , tad izvēlēties $a = p$, $b = kp$, kur $k = \frac{n}{p^2}$, no (*) seko, ka

$$kp+1 \mid p(p-1) \implies kp+1 \mid p-1,$$

jo p un $kp+1$ ir savstarpēji pirmskaitļi, taču tas nav iespējams, jo $0 < p-1 < kp+1$.

2. apgalvojums. n dalās ne vairāk kā ar diviem pirmskaitļiem.

Pierādījums. Apskatīsim skaitļa n mazāko pirmreizinātāju p . Izmantojot (*) ar $a = p$ un $b = \frac{n}{p}$, mēs dabūjam, ka

$$\frac{n}{p} + 1 \mid p(p-1) \implies \frac{n}{p} \leq p(p-1) - 1 \implies n \leq p^3 - p^2 - p$$

Ja n dalās ar 3 pirmskaitļiem $p < p_2 < p_3$, tad $n \geq pp_2p_3 < p^3$, kas ir pretruna.

No šiem diviem apgalvojumiem kopā seko, ka vienīgie iespējamie gadījumi ir $n = 1$, $n = p$ un $n = pq$, kur p un q ir dažādi pirmskaitļi ar $p < q$. Viegli pārlicināties, ka $n = 1$ un $n = p$ patiešām ir sigma puisī. Tagad apskatīsim gadījumu, kad $n = pq$. Paņemot $d = p$, dabūjam, ka

$$p(p+1) \mid pq(pq+1) \implies p+1 \mid q(pq+1)$$

Ja $p = 2$ un $q = 3$, tad $n = 6$, kas nav sigma puisis, jo $3(3+1) \nmid 6(6+1)$. Citādi mums ir $p+1 < q$, tāpēc $p+1 \nmid q$, no kā izriet, ka

$$p+1 \mid pq+1 \implies p+1 \mid q(p+1) - (pq+1) = q-1 \implies q = k(p+1) + 1$$

kādam naturālam skaitlim k . Tagad paņemot $d = q$, līdzīgi kā (*) dabūjam

$$q(q+1) \mid pq(pq+1) \implies q+1 \mid p(p-1) \implies k(p+1) + 2 \mid p(p-1)$$

No tā izriet, ka $p \mid k(p+1) + 2$, jo citādi $k(p+1) + 2 \mid p-1 < k(p+1) + 2$, kas nav iespējams. Līdz ar to, $p \mid k+2$. Līdz ar to $k \geq p-2$, taču tad

$$p(p-1) = (p-2)(p+1) + 2 \leq k(p+1) + 2 \mid p(p-1).$$

Lai tas būtu iespējams, nevienādībai jābūt vienādībai, tātad $k = p-2$. Tādējādi $n = p(p^2 - p - 1)$, kur p un $p^2 - p - 1$ ir pirmskaitļi, un ir viegli pārlicināties, ka visi skaitļi tādā formā patiešām ir sigma puisī. Prasītais ir pierādīts.

2.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums Dota naturālu skaitļu virkne a_1, a_2, a_3, \dots ar īpašību, ka visiem naturāliem skaitļiem k, l izpildās $k + l \mid a_k + a_l$. Pierādīt, ka visiem naturāliem skaitļiem $k > l$ skaitlis $a_k - a_l$ dalās ar skaitli $k - l$.

Atrisinājums. Izvēlēsimies tādu naturālu skaitli n , ka $k - l$ dala $k + n$. Ievērojam, ka tad $l + n = k + n - (k - l)$ arī dalās ar $k - l$. Pēc uzdevuma nosacījumiem mums jāizpildās

$$k + n \mid a_k + a_n \quad \text{un} \quad l + n \mid a_l + a_n$$

Secinām, ka $k - l \mid a_k + a_n$ un $k - l \mid a_l + a_n$, no kā izriet, ka $k - l \mid a_k + a_n - (a_l + a_n) = a_k - a_l$, kas bija jāpierāda.

2.uzdevums Pierādīt, ka neeksistē naturāli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka katrs no skaitļiem $a^3b + 1, b^3c + 1, c^3a + 1$ dalās ar skaitli $a^2 + b^2 + c^2$

1.atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka eksistē skaitļi a, b, c ar īpašību, ka

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &| a^3b + 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 &| b^3c + 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 &| c^3a + 1 \end{aligned}$$

Ievērosim, ka $\gcd(a, a^2 + b^2 + c^2) = \gcd(b, a^2 + b^2 + c^2) = \gcd(c, a^2 + b^2 + c^2) = 1$. Patiešām, ja eksistē pirmskaitlis p ar īpašību, ka $p | a$ un $p | a^2 + b^2 + c^2$, tad $p | a^2 + b^2 + c^2 | a^3b + 1$, taču $p \nmid a^3b + 1$ – pretruna. Līdz ar to

$$a^2 + b^2 + c^2 | a^3b + 1 - b^3c - 1 = b(a^3 - b^2c)$$

Secinām, tā kā $\gcd(b, a^2 + b^2 + c^2) = 1$, tad $a^2 + b^2 + c^2 | a^3 - b^2c$. Līdzīgi varam iegūt, ka $a^2 + b^2 + c^2 | b^3 - c^2a$ un $a^2 + b^2 + c^2 | c^3 - a^2b$. Ievērosim, ka

$$\begin{aligned} b^3 - c^2a &\equiv a^3 - b^2c \pmod{a^2 + b^2 + c^2} \\ b^2(b + c) &\equiv a(a^2 + c^2) \pmod{a^2 + b^2 + c^2} \\ b^2(b + c) &\equiv -ab^2 \pmod{a^2 + b^2 + c^2} \\ b^2(a + b + c) &\equiv 0 \pmod{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

Mēs izmantojām pārēja no otrās uz trešo rindiņu to, ka $a^2 + c^2 \equiv -b^2 \pmod{a^2 + b^2 + c^2}$. Esam ieguvuši, ka $a^2 + b^2 + c^2 | b^2(a + b + c)$, kas nozīmē, ka $a^2 + b^2 + c^2 | a + b + c$, jo $\gcd(b, a^2 + b^2 + c^2) = 1$. Tā kā $a^2 \geq a$ visiem naturāliem skaitļiem a , tad $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$. Vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $a = b = c = 1$, taču viegli pārbaudīt, ka šis skaitļu trijnieks neapmierina uzdevuma nosacījumus. Līdz ar to $a^2 + b^2 + c^2 > a + b + c$, tāpēc $a^2 + b^2 + c^2 | a + b + c$ nevar izpildīties.

2. atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka eksistē skaitļi a, b, c ar īpašību, ka

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &| a^3b + 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 &| b^3c + 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 &| c^3a + 1 \end{aligned}$$

Tādā gadījumā

$$a^2 + b^2 + c^2 | c(a^3b + 1) + a(b^3c + 1) + b(c^3a + 1) = abc(a^2 + b^2 + c^2) + a + b + c$$

Secinām, ka tādā gadījumā $a^2 + b^2 + c^2 | a + b + c$, taču tā kā $a^2 \geq a$ visiem naturāliem skaitļiem a , tad $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$. Vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $a = b = c = 1$, taču viegli pārbaudīt, ka šis skaitļu trijnieks neapmierina uzdevuma nosacījumus. Līdz ar to $a^2 + b^2 + c^2 > a + b + c$, tāpēc $a^2 + b^2 + c^2 | a + b + c$ nevar izpildīties.

3. uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kurām visiem naturāliem skaitļiem m, n izpildās

$$\text{MKD}(m, f(m + f(n))) = \text{MKD}(f(m), f(m) + n).$$

Atrisinājums. Ar $P(m, n)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu.

Apgalvojums. $m \mid f(m)$ visiem $m \in \mathbb{N}$.

Pierādījums. Ievērojam, ka $m \mid \text{MKD}(m, f(m + f(n)))$. Līdz ar to

$$m \mid \text{MKD}(f(m), f(m) + n)$$

visiem naturāliem skaitļiem m . Pamanīsim, ka ja $n = (m - 1)f(m) + 1$, tad n un $f(m)$ ir savstarpēji pirmskaitļi, kas nozīmē, ka $\text{MKD}(f(m), f(m) + n) = f(m)(f(m) + n)$, kā arī $f(m) + n$ un m ir savstarpēji pirmskaitļi. Aizvietojot iegūtajā sakarībā n ar $(m - 1)f(m) + 1$, iegūstam, ka

$$m \mid f(m)(f(m) + (m - 1)f(m) + 1) = f(m)(mf(m) + 1)$$

Tā kā m un $mf(m) + 1$ ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $m \mid f(m)$ visiem naturāliem skaitļiem m . Ievērojam, ka tas arī nozīmē, ka $f(m) \geq m$ visiem naturāliem skaitļiem m .

Aizvietosim n ar $f(m)$ oriģinālajā funkcionālvienādojumā:

$$\text{MKD}(m, f(m + f(f(m)))) = \text{MKD}(f(m), 2f(m)) = 2f(m)$$

Ievērojām, ka $m \mid f(m) \mid f(f(m))$, tātad

$$m \mid m + f(f(m)) \mid f(m + f(f(m)))$$

kas nozīmē, ka $\text{MKD}(m, f(m + f(f(m)))) = f(m + f(f(m)))$. Līdz ar to, mēs iegūstam, ka

$$f(m + f(f(m))) = 2f(m) \quad (1)$$

visiem naturāliem m . Pieņemsim, ka $f(f(m)) \neq f(m)$ kādam m . Tad tā kā $f(m) \mid f(f(m))$, tad $f(f(m)) \geq 2f(m)$. Iegūstam, ka

$$2f(m) = f(m + f(f(m))) \geq m + f(f(m)) \geq m + 2f(m) > 2f(m),$$

kas ir pretruna, līdz ar to $f(f(m)) = f(m)$ visiem naturāliem m . Vienādojumu (1) tagad varam pārrakstīt kā

$$f(m + f(m)) = 2f(m)$$

Tagad pieņemsim, ka $f(m + f(m)) \neq m + f(m)$ kādam m . Tad sanāk, ka $f(m + f(m)) \geq 2m + 2f(m)$ un

$$2f(m) = f(m + f(m)) \geq 2m + 2f(m) > 2f(m),$$

kas ir pretruna, līdz ar to $f(m + f(m)) = m + f(m)$ visiem naturāliem m . Tādējādi (1) pārvēršas par $m + f(m) = 2f(m) \implies f(m) = m$ visiem naturāliem skaitļiem m . Viegli pārlicināties, ka šī funkcija patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

4.uzdevums Atrast visus naturālo skaitļu pārus (a, b) ar īpašību, ka $a^2 \mid b^3 + 1$ un $b^2 \mid a^3 + 1$.

Atrisinājums. Ievērosim, ka skaitļi a, b ir savstarpēji pirmskaitļi. Patiešām, ja eksistē tāds pirmskaitlis p , ka $p \mid a$ un $p \mid b$, tad $p \mid a^2 \mid b^3 + 1$, taču $p \nmid b^3 + 1$ – pretruna. Viegli pamanīt, ka $a^2 \mid a^3 + b^3 + 1$ un $b^2 \mid a^3 + b^3 + 1$. Tā kā $\gcd(a, b) = 1$, tad secinām, ka $a^2 b^2 \mid a^3 + b^3 + 1$.

Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $a \geq b$. Tā kā $a^2 \mid b^3 + 1$, tad $a^2 \leq b^3 + 1$, tāpēc $a^3 \leq a(b^3 + 1)$. Līdz ar to

$$\begin{aligned} a^2 b^2 &\leq a^3 + b^3 + 1 \leq a(b^3 + 1) + b^3 + 1 = (a + 1)(b^3 + 1) \\ \frac{a^2}{a + 1} &\leq \frac{b^3 + 1}{b^2} \\ \frac{(a - 1)(a + 1) + 1}{a + 1} &\leq b^2 + \frac{1}{b^2} < b + 1 \\ a - 1 + \frac{1}{a + 1} &< b + 1 \\ a - 1 &< b + 1 \\ a - b &\leq 2 \end{aligned}$$

Secinām, ka $a = b + 1$ vai arī $a = b$. Aplūkosim katru gadījumu atsevišķi, ja

- Ja $a = b$, tad secinām, ka $a^2 \mid b^3 + 1 = a^3 + 1$, kas nozīmē, ka $a^2 \mid 1$. Līdz ar to $a = b = 1$. Viegli pārbaudīt, ka šis patiešām ir atrisinājums.
- Ja $a = b + 1$, tad secinām, ka $b^2 \mid a^3 + 1 = (b + 1)^3 + 1 = b^3 + 3b^2 + 3b + 2$. Tas nozīmē, ka $b \mid 2$. Līdz ar to $b = 2$ vai $b = 1$. Ja $b = 2$, tad $a = 3$, kas ir atrisinājums, savukārt, ja $b = 1$, tad $a = 2$, kas nav atrisinājums.

Esam ieguvuši, ka vienīgie skaitļu pāri, kas apmierina uzdevuma nosacījumus ir $(1, 1)$, $(3, 2)$ un $(2, 3)$.