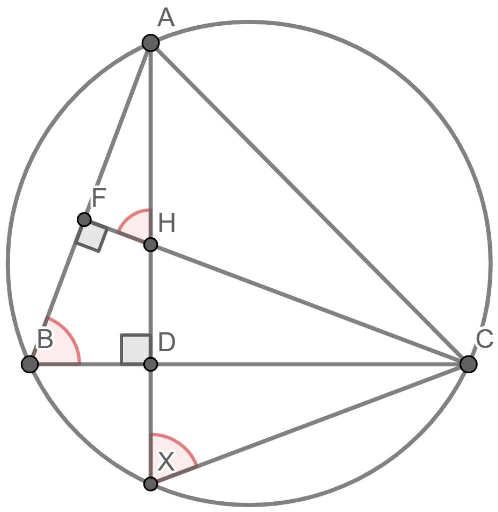
Leņķu izteikšana - atrisinājumi

1.uzdevums. Šaurleņķu trijstūrī ABC punkts H ir augstumu krustpunkts. Taisne AH krusto trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju otru reizi punktā X. Pierādīt, ka $CH = CX$.

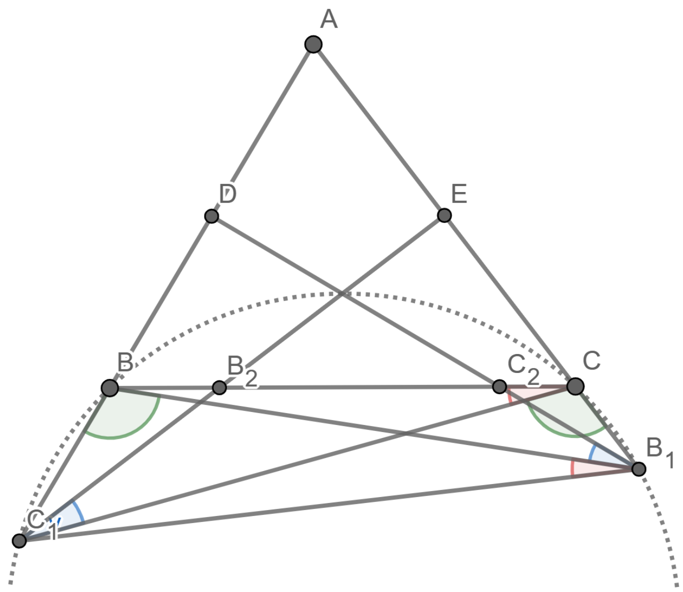


Atrisinājums. Ar D apzīmēsim AH krustpunktu ar BC, un ar F apzīmēsim CH krustpunktu ar AB. Ievērosim, ka $\angle CXA = \angle CBA$ kā leņķi, kas balstās uz vienu loku trijstūrim ABC apvilktajā riņķa līnijā. Papildus tam varam ievērot, ka $\angle DBA = 90° - \angle BAD = \angle AHF$, jo AD un CF ir augstumi. Tā kā $\angle XHC = \angle AHF$ kā krustleņķi, tad varam secināt

$$\angle CXH = \angle CBA = \angle AHF = \angle XHC,$$

kas pierāda, ka trijstūris CXH ir vienādsānu un $CH = CX$.

2.uzdevums. Dots dažādmalu šaurleņķu trijstūris ABC. Punkts B_1 izvēlēts uz taisnes AC, ka izpildās $AB_1 = BB_1$. Punkts C_1 izvēlēts uz taisnes AB, ka izpildās $AC_1 = CC_1$. Punkti B_2 un C_2 izvēlēti uz taisnes BC, ka attiecīgi izpildās $AB_2 = CB_2$ un $BC_2 = AC_2$. Pierādīt, ka punkti B_1, C_1, B_2, C_2 atrodas uz vienas riņķa līnijas.



Atrisinājums. Apzīmēsim AB viduspunktu ar D un AC viduspunktu ar E. Tā kā $AB_2 = CB_2$ un $AC_1 = CC_1$, tad no vidusperpendikula īpašības varam secināt, ka punkti E, B_2, C_1 atrodas uz vienas taisnes - AC vidusperpendikula. Analoģiski pierāda, ka D, C_2, B_1 atrodas uz AB vidusperpendikula.

1.apgalvojums. Četrstūris BCB_1C_1 ir ievilkts riņķa līnijā.
Pierādījums. Ievērosim, ka vienādsānu trijstūrī AB_1B izpildās $\angle B_1BA = \angle BAB_1 = \angle BAC$. Analoģiski trijstūrī ACC_1 izpildās $\angle ACC_1 = \angle BAC$. Tātad $\angle B_1BA = \angle ACC_1$ un

$$\angle C_1BB_1 = 180^\circ - \angle B_1BA = 180^\circ - \angle ACC_1 = \angle C_1CB_1.$$

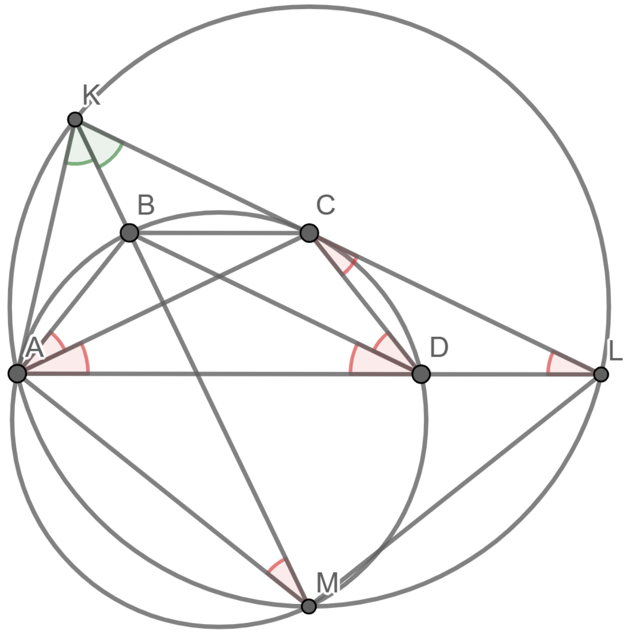
Abi vienādie leņķi balstās uz nogriezni B_1C_1, kas pierāda, ka četrstūris C_1BCB_1 ir ievilkts.

2.apgalvojums. Četrstūris $B_2C_2B_1C_1$ ir ievilkts riņķa līnijā.
Pierādījums. Tā kā $B_1D \perp AB$ kā vidusperpendikuls, tad $\angle C_2B_1B = 90^\circ - \angle B_1BA = 90^\circ - \angle BAC$. Analoģiski $C_1E \perp AC$ un $\angle CC_1B_2 = 90^\circ - \angle ACC_1 = 90^\circ - \angle BAC$. Tātad $\angle C_2B_1B = \angle CC_1B_2$. No $\odot(BCB_1C_1)$ varam arī ievērot, ka $\angle B_2CC_1 = \angle BB_1C_1$. Ievērosim arī, ka trijstūrim C_1B_2C ārējais leņķis $\angle C_2B_2E = \angle CC_1B_2 + \angle B_2CC_1$. Izsakām leņķus

$$\angle C_2B_1C_1 = \angle C_2B_1B + \angle BB_1C_1 = \angle CC_1B_2 + \angle B_2CC_1 = \angle C_2B_2E.$$

No ievilktu četrstūru pazīmes par pretējā leņķa blakusleņķa vienādību ar četrstūra leņķi secinām, ka četrstūris $B_2C_2B_1C_1$ ir ievilkts riņķa līnijā, kas pierāda uzdevumā prasīto.

3.uzdevums. Punkti A, B, C un D atrodas uz riņķa līnijas ω, pie tam $AB = BC = CD$. Pieskare ω punktā C un pieskare ω punktā A krustojas punktā K, bet pieskare ω punktā C un taisne AD krustojas punktā L. Trijstūra KLA apvilktā riņķa līnija un ω krustojas vēlreiz punktā M. Pierādīt, ka $MA = ML$.



Atrisinājums. Tā kā $AB = BC = CD$, tad visi leņķi riņķa līnijā ω, kas balstās uz šīm vienādajām hordām, būs savā starpā vienādi. Tātad $\angle CAB = \angle DAC = \angle CDB = \angle BDA$.

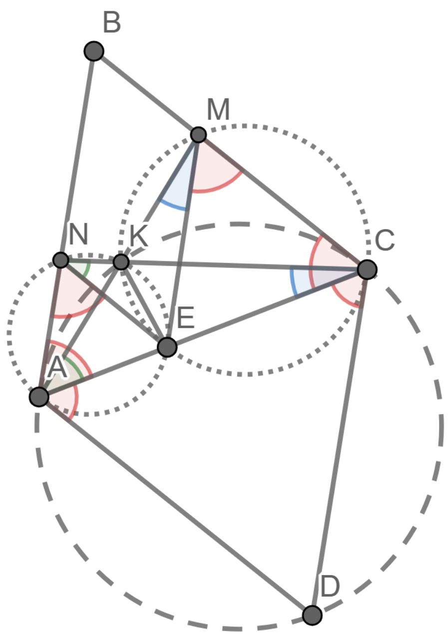
Apgalvojums. Punkti K, B, M atrodas uz vienas taisnes.
Pierādījums. Ievērosim, ka $\angle BMA = \angle BDA$. Tā kā LC ir ω pieskare, tad $\angle DCL = \angle DAC = \angle CDB$. No iekšējo šķērsleņķu īpašības secinām, ka $BD \parallel CL \implies \angle KLA = \angle BDA$. Riņķa līnijā $\odot(KLMA)$ izpildās, ka $\angle KMA = \angle KLA$. Tātad

$$\angle KMA = \angle KLA = \angle BDA = \angle BMA,$$

kas nozīmē, ka punkti K, B, M atrodas uz vienas taisnes.

Ievērosim, ka $KA = KC$, jo tās ir pieskares riņķa līnijai ω. Tā kā $BA = BC$ no dotā, varam secināt, ka KB ir nogriežņa AC vidusperpendikuls un tad no simetrijas arī attiecīgi $\angle AKC$ bisektrise. Līdz ar to $\angle AKM = \angle MKC$. Vienādi leņķi savelk vienādas hordas, tāpēc riņķa līnijā $\odot(KLMA)$ izpildās $MA = ML$, kas dod prasīto.

4.uzdevums Dots rombs $ABCD$. Uz tā diagonāles AC izvēlēts patvaļīgs punkts E. Punkti N un M atrodas attiecīgi uz nogriežņiem AB un BC, pie tam izpildās $AE = EN$ un $CE = EM$. Taisnes AM un CN krustojas punktā K. Pierādīt, ka punkti K, E, D atrodas uz vienas taisnes.



Atrisinājums. Tā kā $ABCD$ ir rombs, ievērosim, ka $\angle CAB = \angle BCA = \angle ACD = \angle DAC$. Papildus tam no vienādsānu trijstūriem ANE un CEM iegūstam $\angle ANE = \angle EAN = \angle MCE = \angle EMC$.

Apgalvojums. Četrstūri $ANKE$ un $CEKM$ ir ievilkti.
Pierādījums. Ievērojam, ka $\angle NEA = 180° - \angle ANE - \angle EAN = 180° - \angle EMC - \angle MCE = \angle CEM$. No tā var iegūt

$$\angle AEM = \angle AEN + \angle NEM = \angle CEM + \angle NEM = \angle CEN.$$

Tas nozīmē, ka $\triangle AEM = \triangle NEC$ pēc pazīmes *mlm*, jo papildus iegūtajai leņķu vienādībai izpildās $AE = NE$ un $ME = CE$. No vienādajiem trijstūriem seko $\angle AME = \angle NCE$, kur abi leņķi balstās uz nogriezni KE, līdz ar to četrstūris $CEKM$ ir ievilkts. Analoģiski $\angle EAM = \angle ENC$, un abi šie leņķi balstās uz nogriezni KE, tātad četrstūris $ANKE$ ir ievilkts.

No $\odot(ANKE)$ ievērosim, ka $\angle AKE = \angle ANE$. No šīs pašas riņķa līnijas un risinājuma sākumā iegūtajām leņķu vienādībām arī varam izteikt, ka

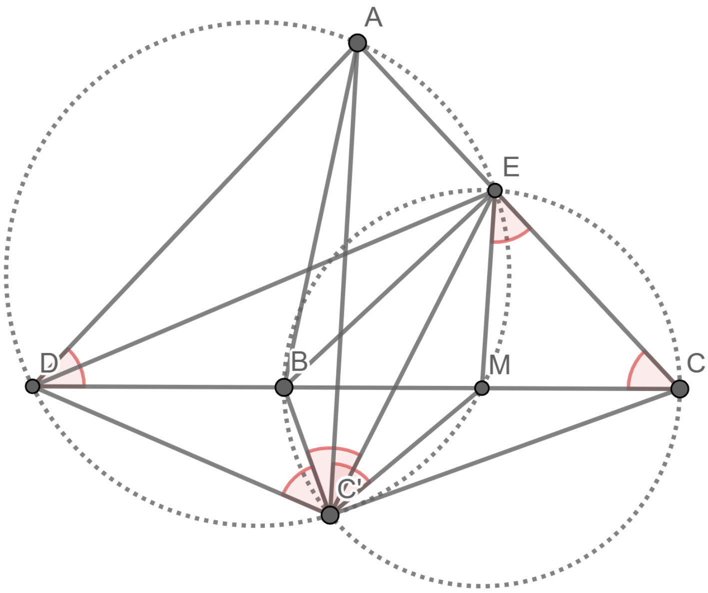
$$\angle NKA = \angle NEA = 180° - \angle ANE - \angle EAN = 180° - \angle DAC - \angle ACD = \angle CDA.$$

No ievilkto četrstūru pazīmēm secinām, ka četrstūris $AKCD$ ir ievilkts, jo pretējā leņķa blakusleņķis ir vienāds ar četrstūra leņķi. Tad šajā riņķa līnijā izpildās $\angle AKD = \angle ACD$. Secinām, ka

$$\angle AKE = \angle ANE = \angle ACD = \angle AKD,$$

kas pierāda, ka punkti K, E, D atrodas uz vienas taisnes.

5.uzdevums. Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kurā $AB < AC$. Punkts M ir malas BC viduspunkts, un E ir no virsotnes B vilktā augstuma pamats. Punkts C' ir punkta C simetriskais attēlojums pār taisni AM. Uz taisnes BC izvēlēts punkts D, kam izpildās $AD = AC$ un kas nesakrīt ar punktu C. Pierādīt, ka B ir trijstūra DEC' ievilktās riņķa līnijas centrs.



Atrisinājums. Ievērosim, ka dots $MB = MC$. Simetrijas dēļ izpildās arī $MC = MC'$. Tā kā trijstūris BEC ir taisnleņķa, tad mediāna ME pret hipotenūzu BC ir puse no tās jeb $ME = MB$. Tātad $MB = MC = MC' = ME$, kas nozīmē, ka punkti B, E, C, C' atrodas uz vienas riņķa līnijas ar centru punktā M.

Apgalvojums. Punkti A, E, M, C', D atrodas uz vienas riņķa līnijas.
Pierādījums. Ievērosim, ka $AD = AC$, tāpēc $\angle MDA = \angle ACD$. Tā kā $ME = MC$, tad $\angle MEC = \angle ECM$. Tātad $\angle MDA = \angle ACD = \angle MEC$, kas nozīmē, ka četrstūris $AEMD$ ir ievilkts.

Simetrijas pret AM dēļ izpildās $\angle MC'A = \angle ACM$. Atcerēsimies, ka $\angle MDA = \angle ACD$, tātad $\angle MDA = \angle ACM = \angle MC'A$, kas nozīmē, ka četrstūris $AMC'D$ ir ievilkts. Apvienojot abus iegūtos ievilktos četrstūrus, varam secināt, ka punkti A, E, M, C', D atrodas uz vienas riņķa līnijas.

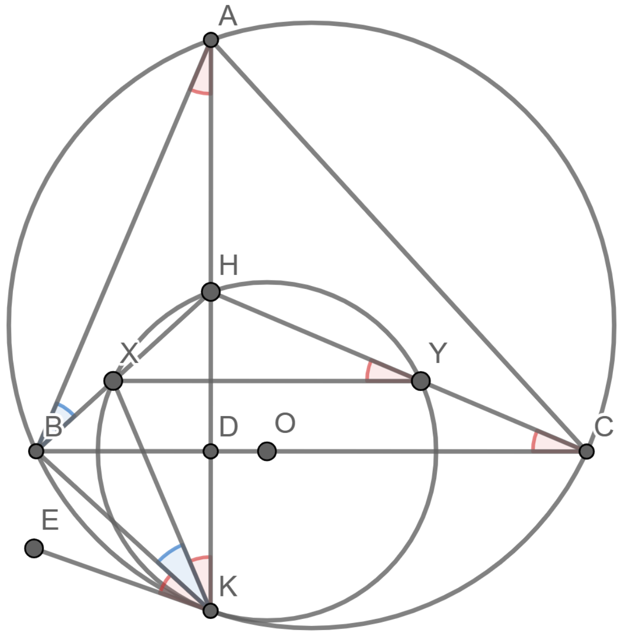
Tā kā $ME = MC'$, tad riņķa līnijā $\odot(DAEMC')$ pret vienādām hordām ir vienādi leņķi jeb $\angle MDE = \angle C'DM$. No tā var secināt, ka DM ir $\angle C'DE$ bisektrise.

No trijstūra MEC varam iegūt, ka tā ārējais leņķis $\angle EMD = \angle MEC + \angle ECM = 2\angle ACD$. Tad riņķa līnijā $\odot(DAEMC')$ izpildās $\angle EC'D = \angle EMD = 2\angle ACD$. No riņķa līnijas $\odot(BECC')$ iegūstam, ka $\angle EC'B = \angle ECB = \angle ACD$. Tādā gadījumā

$$\angle BC'D = \angle EC'D - \angle EC'B = 2\angle ACD - \angle ACD = \angle ACD = \angle EC'B,$$

kas nozīmē, ka $C'B$ ir $\angle EC'D$ bisektrise. Tā kā divas no trijstūra DEC' bisektrisēm krustojas punktā B, var secināt, ka tas ir trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs.

6.uzdevums. Dažādmalu trijstūra ABC augstumu krustpunkts ir H. Uz nogriežņiem BH un CH izvēlēti attiecīgi punkti X un Y ar īpašību, ka $XY \parallel BC$. Zināms, ka trijstūra XHY apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz nogriežņa BC. Pierādīt, ka trijstūru XHY un ABC apvilktās riņķa līnijas pieskaras.



Atrisinājums. Pieņemsim, ka taisne AH krusto trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju vēlreiz punktā K. No 1.uzdevumā iegūtā fakta, ka tādā gadījumā $CH = CK$, varam acīmredzami iegūt, ka BC ir nogriežņa HK vidusperpendikuls. Apzīmēsim trijstūrim XHY apvilktās riņķa līnijas centru ar O. Tā kā no dotā O pieder taisnei BC, tad no vidusperpendikula īpašības $OH = OK$. Tas nozīmē, ka punkts K atrodas uz riņķa līnijas ar rādiusu OH jeb trijstūrim XHY apvilktās riņķa līnijas. Novilksim punktā K pieskari EK riņķa līnijai $\odot(ABC)$.

Apgalvojums. EK ir arī riņķa līnijas $\odot(XHY)$ pieskare.
Pierādījums. Tā kā EK ir pieskare $\odot(ABC)$, tad $\angle BKE = \angle BAK = 90° - \angle B$, jo AH ir augstums. Arī CH ir augstums, tāpēc $\angle HCB = 90° - \angle B$. Dots, ka $XY \parallel BC$, tāpēc $\angle HYX = \angle HCB$ kā kāpšļu leņķi. Riņķa līnijā $\odot(XHYK)$ arī izpildās $\angle HKX = \angle HYX$. Līdz ar to varam secināt

$$\angle BAH = 90° - \angle B = \angle HCB = \angle HYX = \angle HKX.$$

Aplūkosim trijstūri AHB. Tā ārējais leņķis $\angle BHK = \angle BAH + \angle HBA$. Tā kā BC ir nogriežņa HK vidusperpendikuls, tad simetrijas dēļ $\angle HKB = \angle BHK$. Izsakām leņķus

$$\angle HKX + \angle XKB = \angle HKB = \angle BHK = \angle BAH + \angle HBA.$$

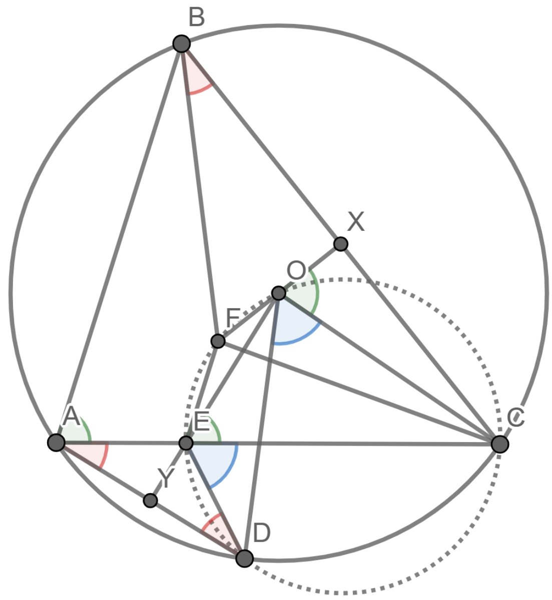
Tā kā $\angle HKX = \angle BAH$, tad jāizpildās $\angle XKB = \angle HBA$. Atcerēsimies, ka $\angle BKE = \angle BAH$. Tālāk izsakām leņķus

$$\angle XKE = \angle XKB + \angle BKE = \angle HBA + \angle BAH = \angle XHK,$$

kas no hordas-pieskares īpašības nozīmē, ka KE ir pieskare riņķa līnijai $\odot(XHYK)$.

Esam secinājuši, ka trijstūru ABC un XHY apvilktajām riņķa līnijām punktā K ir kopīga pieskare KE. No tā var attiecīgi secināt, ka šīs riņķa līnijas punktā K pieskaras, kas dod prasīto.

7.uzdevums. Uz šaurleņķu trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas mazā loka AC (kas nesatur punktu B) izvēlēts patvaļīgs punkts D. Uz malas AC izvēlēts punkts E, ka $AE = DE$. Uz taisnes l, kas ir paralēla taisnei AB un iet caur punktu E, izvēlēts punkts F, ka $BF = CF$. Pierādīt, ka punkti B, F, D atrodas uz vienas taisnes.



Atrisinājums. Apzīmēsim trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centru ar O, nogriežņa BC viduspunktu ar X un nogriežņa AD viduspunktu ar Y. Ievērosim, ka F atrodas uz BC vidusperpendikula OX, jo $BF = CF$, kā arī E atrodas uz AD vidusperpendikula OY, jo $AE = DE$.

Apgalvojums. Punkti D, E, F, O, C atrodas uz vienas riņķa līnijas.
Pierādījums. Vienādsānu trijstūrim AED aplūkosim ārējo leņķi $\angle DEC = \angle DAE + \angle EDA = 2\angle DAC$. Tā kā O ir riņķa līnijas $\odot(ABCD)$ centrs, tad $\angle DOC = 2\angle DAC$ kā centra leņķis. Tas nozīmē, ka $\angle DEC = 2\angle DAC = \angle DOC$, tātad četrstūris $DEOC$ ir ievilkts.

Tā kā $EF \parallel AB$, tad $\angle CEF = \angle CAB$. No centra leņķa īpašībām ievērosim, ka $\angle COX = \frac{1}{2}\angle COB = \angle CAB$. Tātad $\angle CEF = \angle CAB = \angle COX$, kas nozīmē, ka četrstūris $CEFO$ ir ievilkts. Apvienojot abus iegūtos ievilktos četrstūrus, secinām, ka punkti D, E, F, O, C atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Ievērosim $\odot(ABCD)$, ka $\angle DBC = \angle DAC$. Tā kā $OE \perp AD$, tad $\angle AEY = 90^\circ - \angle DAE$. No krustleņķiem $\angle CEO = \angle AEY$. Riņķa līnijā $\odot(DEFOC)$ izpildās $\angle CFO = \angle CEO$. Tā kā $OF \perp BC$, varam izteikt leņķi $\angle FBC = \angle BCF$:

$$\angle FBC = \angle FCB = 90^\circ - \angle CFO = 90^\circ - \angle CEO = 90^\circ - \angle AEY = \angle DAE = \angle DBC.$$

No iegūtā var secināt, ka punkti B, F, D atrodas uz vienas taisnes, kas bija prasīts.