Advancēta modulārā aritmētika

Ievads. Šajā mājasdarbā Jums piedāvāti 7 uzdevumi, kuri ir sakārtoti grūtību pieaugošā secībā, bet **ne tēmu secībā**, kāda ir materiālā. Viena uzdevuma ietvaros var nākties izmantot teorijas faktus un idejas no vairākām tēmām. Līdz ar to, lai tiktu galā ar uzdevumiem, ir vērts izlasīt visu materiālu. Katru uzdevumu vērtē ar $0-7$ punktiem. Punktus piešķir arī par nepilnīgiem atrisinājumiem, ja ir iegūti noderīgi rezultāti.

1.uzdevums Dots nepāra pirmskaitlis p. Chuhan un Edgars spēlē spēli, kurā viņi pēc kārtas veic gājienus: viena gājiena laikā var izvēlēties skaitli no kopas $\{1,2,...,2p-3,2p-2\}$, kuru pirms tam nav izvēlējies neviens no spēlētājiem. Spēle beidzas, kad visi skaitļi ir izvēlēti. Pēc tam katrs spēlētājs aprēķina savu izvēlēto skaitļu reizinājumu un pieskaita tam 1. Uzvar tas spēlētājs, kura iegūtais skaitlis dalās ar p, bet tā pretinieka iegūtais skaitlis nedalās ar p. Pierādīt, ka Chuhan vienmēr var uzvarēt neatkarīgi no tā, kā spēlē Edgars, ja Chuhan veic pirmo gājienu.

2.uzdevums Atrast visus naturālu skaitļu trijniekus (a,b,c), kuriem izpildās

$$(a-b)^3(a+b)^2=c^2+2(a-b)+1.$$

3.uzdevums Dots pirmskaitlis $p\geq 2$. Kristaps un Armands spēlē spēli, kurā viņi pēc kārtas veic gājienus: viena gājiena laikā spēlētājs izvēlas indeksu i no kopas $\{0,1,2,\ldots,p-1\}$, kuru neviens no spēlētājiem nebija izvēlējies pirms tam, un izvēlas kādu skaitli no kopas $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, izvēlēto skaitli apzīmējot ar a_i. Kristaps veic pirmo gājienu. Spēlē beidzas, kad visi indeksi ir izvēlēti. Pēc tam tiek aprēķināts skaitlis

$$M=a_0+a_1\cdot 10+a_2\cdot 10^2+\cdots+a_{p-1}\cdot 10^{p-1}=\sum_{i=0}^{p-1}a_i\cdot 10^i.$$

Kristapa mērķis ir panākt to, ka skaitlis M dalās ar p, bet Armanda mērķis ir panākt to, ka skaitlis M nedalās ar p. Pierādīt, ka Kristapam ir uzvaroša stratēģija.

4.uzdevums Doti naturāli skaitļi c un n, pie tam $n>c$. Rūdis izvēlas n naturālus skaitļus (ne obligāti dažādus). Pierādīt, ka eksistē Rūda izvēlēto skaitļu permutācija $a_1,\ldots,a_n$, kurai skaitlis

$$(a_1-a_2)\cdot(a_2-a_3)\cdots(a_{n-1}-a_n)\cdot(a_n-a_1)$$

dod atlikumu 0 vai c, dalot ar n.

5.uzdevums Ar $\mathbb{P}$ apzīmēsim visu pirmskaitļu kopu. Kopa M sastāv no vismaz 3 dažādiem pirmskaitļiem un tai piemīt īpašība, ka ikvienai M apakškopai A, kas nav vienāda ar M, visi skaitļa

$$\left(\prod_{p\in A}p\right)-1$$

pirmreizinātāji arī pieder kopai M. Pierādīt, ka $M=\mathbb{P}$. *(Ar $\prod$ apzīmē visu norādīto skaitļu reizinājumu.)*

6.uzdevums Atrast visas funkcijas $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, kurām izpildās

$$n!+f(m)!\mid f(n)!+f(m!)$$

visiem naturāliem skaitļiem m,n.

7.uzdevums Par *kvadrātbrīvu* sauc naturālu skaitli, kurš nedalās ar neviena pirmskaitļa kvadrātu. Pierādīt, ka katram kvadrātbrīvam naturālam skaitlim $n>1$ eksistē pirmskaitlis p un naturāls skaitlis m ar īpašību, ka

$$p\mid n \quad \text{un} \quad n\mid p^2+p\cdot m^p.$$