Indukcija

Ievads. Šajā mājasdarbā Jums tiek piedāvāti 7 uzdevumi, kuri ir sakārtoti grūtību pieaugošā secībā, bet **ne tēmu secībā**, kāda ir materiālā. Viena uzdevuma ietvaros var nākties izmantot teorijas faktus, idejas no vairākām tēmām vienlaikus. Līdz ar to, lai tiktu galā ar uzdevumiem, ir vērts izlasīt visu materiālu. Katrs uzdevums tiek novērtēts ar $0-7$ punktiem. Punkti tiek piešķirti arī par ne līdz galam atrisinātiem uzdevumiem, ja ir iegūti noderīgi rezultāti.

1.uzdevums Fibonači skaitļu virkni definē $F_1 = F_2 = 1$ un $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ visiem naturāliem n. Pierādīt šādas sakarības:

- $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ visiem naturāliem n;
- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ visiem naturāliem $n \geq 2$;
- $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ visiem naturāliem $m, n \geq 2$.

2.uzdevums Līnijzemē ir $n \geq 1$ pilsētas, kas izvietotas taisnā līnijā uz ceļa no kreisās uz labo pusi. Katrai pilsētai ir *kreisais* buldozers, kurš atrodas kreisajā pusē pilsētai un ir vērsts to pilsētu virzienā, kas atrodas pa kreisi, kā arī *labais* buldozers, kurš atrodas labajā pusē pilsētai un ir vērsts to pilsētu virzienā, kas atrodas pa labi. Visu $2n$ buldozeru izmēri ir cits no cita atšķirīgi. Katru reizi, kad uz ceļa satiekas kreisais un labais buldozers, lielākais no tiem nostumj mazāko nost no ceļa. Toties buldozeru aizmugures ir diezgan neaizsargātas – ja buldozers braucot sasniedz kāda cita buldozera aizmuguri, tad braucošais buldozers nostumj otru nost no ceļa neatkarīgi no tā izmēra.

Aplūkosim divas patvaļīgas pilsētas A un B, kur B atrodas pa labi no A. Teiksim, ka pilsēta A var *aizslaucīt* pilsētu B, ja A labais buldozers var aizbraukt līdz pilsētas B centram, nostumjot no ceļa visus buldozerus, ko tas satiek savā ceļā. Līdzīgā veidā var teikt, ka pilsēta B var aizslaucīt pilsētu A, ja B kreisais buldozers var aizbraukt līdz pilsētas A centram, nostumjot no ceļa visus buldozerus, ko tas satiek savā ceļā.

Pierādīt, ka Līnijzemē eksistē tieši viena pilsēta, kuru nevar aizslaucīt neviena cita pilsēta.

3.uzdevums Kaudzē ir saliktas $n \geq 1$ spēļu kārtis. Visas kārtis ir vienādas savā starpā, un katrai kārtij vienā pusē ir skaitlis, bet otrā - zīmējums. Kaudzē tās ir pagrieztas patvaļīgi. Vienā gājienā Māris no kaudzes augšpuses drīkst paņemt patvaļīgu skaitu secīgu augšējo kāršu, katru no tām apgriezt otrādi, un tādā pašā secībā atlikt atpakaļ kaudzes augšpusē (līdz ar to augšējā kārts vienmēr būs kaudzes augšā). Māris vēlas panākt, lai minēto gājienu rezultātā visas kaudzē esošās kārtis būtu pagrieztas ar zīmējumu uz augšu. Ar x apzīmēsim mazāko naturālo skaitli, kuram izpildās, ka Māris jebkuram sākotnējam kāršu izkārtojumam prasīto var sasniegt ne vairāk kā x gājienos. Pierādīt, ka $x = n$.

4.uzdevums Uz tāfeles ir uzzīmēts izliekts 2024-stūris. Filips tajā velk diagonāles tā, ka ikviena pievienotā diagonāle tās novilkšanas brīdī krusto ne vairāk kā vienu no jau novilktajām diagonālēm (diagonāļu krustpunkti stingri atrodas 2024-stūra iekšienē, tātad 2024-stūra virsotnes nav krustpunkti). Noteikt lielāko diagonāļu skaitu, ko Filips šādā veidā var novilkt.

5.uzdevums Parlamentā, kurā ir $n \geq 2$ deputāti, darbojas $k \geq 0$ komisijas. Katrā komisijā ir vismaz divi deputāti, nevienā komisijā neietilpst visi n deputāti. Katrs deputāts var darboties vienā vai vairākās komisijās, var arī nebūt nevienā komisijā. Kādai lielākajai k vērtībai deputātus noteikti iespējams nosēdināt rindā tā, ka nevienas komisijas deputāti tajā nesēž visi pēc kārtas viens otram blakus?

6.uzdevums Rūtiņu kvadrātā ar izmēriem $n \times n$ katra rūtiņa ir izkrāsota baltā vai melnā krāsā. Ar a_i apzīmēsim balto rūtiņu skaitu i-tajā rindā, un ar b_i apzīmēsim melno rūtiņu skaitu i-tajā kolonnā. No visiem iespējamajiem rūtiņu kvadrāta krāsojumiem noteikt maksimālo vērtību, ko var pieņemt $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$.

7.uzdevums Doti naturāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kuri ir pa pāriem dažādi, un naturālu skaitļu kopa M, kurā ir $n-1$ elementi, no kuriem neviens nav vienāds ar $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Skaitļu ass punktā 0 sēž sienāzis, kurš pēc kāda laika ass pozitīvajā virzienā secīgi veic n lēcienus, pie tam lēcienu garumi ir skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sakārtoti kaut kādā secībā. Pierādīt, ka lēcienu garumus var sakārtot tādā secībā, lai sienāzis pēc katra veiktā lēciena nosēstos punktā, kurš nepieder kopai M.