# Grafi

**Ievads.** Šajā mājasdarbā Jums tiek piedāvāti 7 uzdevumi, kuri ir sakārtoti grūtību pieaugošā secībā, bet **ne tēmu secībā**, kāda ir materiālā. Viena uzdevuma ietvaros var nākties izmantot teorijas faktus, idejas no vairākām tēmām vienlaikus. Līdz ar to, lai tiktu galā ar uzdevumiem, ir vērts izlasīt visu materiālu. Katrs uzdevums tiek novērtēts ar $0-7$ punktiem. Punkti tiek piešķirti arī par ne līdz galam atrisinātiem uzdevumiem, ja ir iegūti noderīgi rezultāti.

**1.uzdevums** Hokeja turnīrā piedalījās $n$ komandas, kas spēlēja katra ar katru vienu reizi, ikvienai spēlei beidzoties ar vienas komandas uzvaru. Pierādīt, ka visas komandas var nostādīt rindā tā, ka ikviena komanda ir uzvarējusi to komandu, kas atrodas rindā blakus pa kreisi.

**2.uzdevums** Grafā ir $p$ virsotnes, kuras sanumurētas ar skaitļiem no 1 līdz $p$, un $q$ šķautnes, kas sanumurētas ar skaitļiem no $p+1$ līdz $p+q$. Izrādījās, ka visām šķautnēm izpildās – šķautnes numuram pieskaitot tās galapunktu (virsotņu) numurus, tiek iegūts viens un tas pats skaitlis $s$. Papildus zināms, ka visām virsotnēm grafā ir vienāda pakāpe. Pierādīt, ka

$$s = \frac{1}{2}(4p + q + 3).$$

**3.uzdevums** Labirinta pilsētā katrā ceļu krustojumā satiekas tieši 3 ielas (šajos krustojumos atrodas ielu sākumi un beigas, t.i., nav tādu ielu, kas ietu cauri kādam krustojumam un turpinātos tālāk). Katra iela ir nokrāsota vienā no trim krāsām, pie tam katrā krustojumā satiekas trīs dažādu krāsu ielas. Pilsētā arī ir trīs ielas, kuras iziet ārā no Labirinta pilsētas un bezgalīgi turpinās tālajos valsts plašumos. Pierādīt, ka šīs trīs no pilsētas izejošās ielas ir visas atšķirīgās krāsās.

**4.uzdevums** Kādā valstī ir 32 lidostas, katras divas no tām abos virzienos ir savienotas ar tiešajiem avioreisiem. Satiksmes ministrija ir noteikusi, ka 470 no šiem reisiem ir jābūt bezmaksas. Katru dienu lidsabiedrība izvēlas kādu vēl iepriekš neizvēlētu lidostu pāri, bet satiksmes ministrija nosaka, kurā virzienā šis reiss būs bezmaksas (otrā virzienā tas paliek par maksu).

Pierādīt, ka lidsabiedrība lidostu pārus var izvēlēties tā, ka pēc 470 dienām joprojām būs divas tādas lidostas $A$ un $B$, ka no $A$ uz $B$ nevarēs aizlidot bez maksas pat vairākkārt pārsēžoties.

**5.uzdevums** Matemātikas olimpiādē piedalījās vairāki dalībnieki, no kuriem daži ir draugi viens ar otru. Divus dalībniekus $A$ un $B$ sauksim par *paziņām*, ja eksistē dalībnieki $C_1, C_2, \ldots, C_n$, ka $A$ un $C_1$ ir draugi, $C_1$ un $C_2$ ir draugi utt., kā arī $C_n$ un $B$ ir draugi. Papildus tam, ja $A$ un $B$ ir draugi, tad uzskatām tos arī vienlaicīgi par paziņām.

Olimpiādes laikā dalībnieki savā starpā nodibināja jaunas draudzības, pie tam pēc olimpiādes izrādījās, ka tagad katram dalībniekam ir vismaz viens draugs. Sauksim dalībnieku par *īpašu*, ja pēc olimpiādes viņa paziņu skaits ir divreiz lielāks, nekā tas bija pirms olimpiādes.

Pierādīt, ka īpašu dalībnieku skaits nepārsniedz $\frac{2}{3}$ no kopējā olimpiādes dalībnieku skaita.

**6.uzdevums** Atrast lielāko naturālo skaitli $k$, kuram eksistē vienkāršs 2023 virsotņu grafs $G$, kam vienlaicīgi izpildās minētās trīs īpašības:

1. $G$ nesatur ciklus ar garumu 3;
2. katram naturālam $i$, kur $1 \leq i \leq k$, eksistē vismaz viena $G$ virsotne, kuras pakāpe ir $i$;
3. visām $G$ virsotnēm pakāpe nav lielāka par $k$.

**7.uzdevums** Dots rūtiņu laukums $m \times n$, kur $m$ un $n$ ir nepāra skaitļi. Laukums noklāts ar $1 \times 2$ domino figūrām tā, ka ikvienu rūtiņu noklāj tieši viena domino figūra, izņemot kreiso apakšējo laukuma stūra rūtiņu, kas nav noklāta. Vienā gājienā ir atļauts taisni, bez rotēšanas pabīdīt kādu domino figūru uz nenoklāto rūtiņu (ja tās bīdīšanai netraucē citas figūras), tādā veidā nosedzot iepriekš nenoklāto rūtiņu un padarot vienu citu laukuma rūtiņu atklātu.

Pierādīt, ka, veicot minētos gājienus, var jebkuru laukuma stūra rūtiņu padarīt atklātu.