Procesi un spēles

Ilmārs Štolcers

1 Ievads

Noslēdzošajā materiālā aplūkosim tēmu, kura starptautiskās olimpiādes kombinatorikā pēdējos gados dominē uzdevumu īsajā sarakstā (*shortlist*) – procesus, kā arī tiem līdzīgās spēles. Šai uzdevumu klasei raksturīgi tas, ka tajā nav īsti formālu zināšanu ierobežojumu, tādēļ uzdevumi var būt krasi atšķirīgi, kā arī jebkurš dalībnieks ir spējīgs tos risināt bez īpašām priekšzināšanām. Šo nosacījumu dēļ tie ir ideāli piemēroti starptautiskajā olimpiādē kā vieglie vai vidējie uzdevumi. Aplūkojot pēdējos 7 gadus, procesu (spēļu) uzdevumi ir 2017 P5, 2018 P4, 2019 P5, 2021 P5, 2022 P1, kamēr 2020 P4 un 2023 P5 pēc savas būtības satur procesu idejas. Tādēļ, gatavojoties starptautiskajai olimpiādei, kombinatorikā svarīgākais nosacījums ir zināt gana daudz ideju, ko lieto procesu uzdevumos. Šajā materiālā aplūkosim dažas visbiežāk sastopamās idejas.

2 Procesi

2.1 Vispārīgi komentāri

Kā jau minēts ievadā, procesu uzdevumi izceļas ar to radošumu un iespējamo dažādību. No vienas puses, tas padara olimpiādes risināšanu interesantāku, jo, visticamāk, nāksies risināt uzdevumu, kurā vajadzēs izdomāt pirms tam neredzētas idejas, kas tieši atalgo spēju domāt. Taču, no otras puses, tas padara gatavošanās procesu ievērojami sarežģītāku, jo nav konkrētu teorijas faktu, kuri būtu jāzina un kuriem ir daži populārākie pielietojumi. Tādēļ viens no būtiskākajiem nosacījumiem ir daudzu uzdevumu patstāvīga risināšana, jo bieži vien uzdevumos kādas iepriekš redzētas idejas var palīdzēt veikt kādu vērtīgu novērojumu, atklāt kādu jaunu skatījumu uz uzdevumā doto.

No savas risināšanas pieredzes varu sniegt dažus vērtīgākos risināšanas ieteikumus, kas man ir palīdzējuši atrisināt daudz procesu uzdevumu, tomēr šie ieteikumi ir tikai tik vērtīgi, cik to lietotājs pēc tam pats iemācās ar tiem apieties:

- **Izmēģināt mazos gadījumus.** Bieži vien procesu uzdevumiem ir sniegti ļoti specifiski nosacījumi, kurus ir grūti uzreiz izprast, kā tie *dzīvē* darbojas. Mazo gadījumu izmēģināšana ar to var palīdzēt. Otra, un iespējams pat svarīgāka lieta, ir, ka mazo gadījumu aplūkošana var potenciāli sniegt ieskatu hipotēzē, kādām vērtībām uzdevums izpildās (piemēram, pāra-nepāra) vai arī sniegt citu informāciju (kādās situācijās rodas problēmas). Būtībā šis solis ir obligāti jāveic gandrīz katrā kombinatorikas uzdevumā.

- **Atrast svarīgākos faktorus.** Procesu uzdevumos ļoti vērtīgi ir spēt veiksmīgi atrast fokusu – saprast, kādi ir svarīgākie nosacījumi, kuri nozīmīgi ietekmē uzdevumā aplūkotās situācijas darbību. Alternatīvi varētu teikt – kuri nosacījumi vai īpašības padara uzdevumu unikālu un atšķirīgu no citiem uzdevumiem. Ja uzdevumā izdodas atrast vai nu šādus nozīmīgus nosacījumus, vai arī ieraudzīt kādas īpašības (piemēram, konkrētas pozīcijas nosaka visa procesa galvenās darbības), tad bieži vien tālākais pierādījums dabiski būvējas, formāli aplūkojot ierobežojumus šīm nozīmīgajām lietām.

- **Saprast specifiskus nosacījumus.** Ja uzdevumā ir dots, ka, piemēram, ir pāra skaits elementu, ir vērts uzdot sev jautājumu – kāpēc ir dots tieši pāra skaits elementu? Kas notiktu, ja būtu dots nepāra skaits, kādēļ tad uzdevums neizpildītos? Šādi jautājumi sev var palīdzēt saprast, kādēļ uzdevumā dotais process izpildās un kas to ierobežo.

2.2 Invarianti un monovarianti

Bieži uzdevumos procesa gaitā var atrast tādus lielumus, kuri nemainās procesa gājienu/notikumu laikā. Šie lielumi ir ļoti svarīgi, jo tie var palīdzēt iegūt pretrunīgus nosacījumus procesa sākuma un beigu stāvokļiem. Biežākais šāda veida piemērs Latvijas olimpiādēs ir saistībā ar paritāti – piemēram, krāsošanas uzdevumos beigās būtu jānoklāj nepāra skaits iekrāsotu rūtiņu, taču sākumā ir noklāts pāra skaits iekrāsotu rūtiņu, un katra jaunā figūra arī noklāj pāra skaitu rūtiņu. No tā var secināt, ka procesa gaitā vienmēr būs noklāts pāra skaits rūtiņu, kas ir pretrunā ar prasīto gala stāvokli, tādēļ to nav iespējams sasniegt.

Definīcija. Par **invariantu** sauc tādu lielumu, kas procesa gaitā paliek nemainīgs, t.i., pēc katra veiktā procesa gājiena tas saglabā savu vērtību/īpašību.

Ne visi invarianti, ko var atrast uzdevumā, palīdz risināt uzdevumu. Piemēram, kauliņu kopējā skaita nemainība nenosaka to, cik un kāda veida kaudzēs tos ir iespējams sadalīt. Tādēļ ir svarīgi mācēt atrast invariantus, kuri tiešā veidā ietekmē procesā notiekošo.

Definīcija. Par **monovariantu** sauc tādu lielumu, kas procesa gaitā mainās monotoni jeb vienā veidā – piemēram, ja katrā gājienā tā vērtība pieaug.

Pēc būtības monovarianti vispārina invariantus. Bieži monovariantus ir vērts saistīt ar lielākajiem vai mazākajiem elementiem, lai parādītu, ka tie izmainās pretējā virzienā uzdevumā prasītajam.

2.3 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs Skaitļi $1, 2, \ldots, 10$ ir uzrakstīti uz tāfeles. Katru minūti Andrejs izvēlas trīs skaitļus a, b, c, nodzēš tos un to vietā uzraksta skaitli $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Šis process turpinās līdz brīdim, kamēr vairāk nevar nodzēst skaitļus. Noteikt lielāko iespējamo skaitli, kas tajā brīdi var būt uzrakstīts uz tāfeles.

Atrisinājums. Meklēsim lielumu, kas procesa laikā saglabājas invariants. Aplūkojam uz tāfeles uzrakstīto skaitļu kvadrātu summu. Sākotnēji tā ir $1^2+2^2+\ldots+10^2 = \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 385$. Viena gājiena laikā aizstāto skaitļu kvadrātu summa ir $a^2+b^2+c^2$, bet iegūtā skaitļa kvadrāts ir $a^2+b^2+c^2$. Līdz ar to varam secināt, ka procesa laikā šis lielums paliek nemainīgs jeb invariants.

Varam arī ievērot, ka procesā katra gājiena laikā uzrakstīto skaitļu daudzums samazinās par 2, tātad beigās būs palikuši divi skaitļi. Acīmredzami, ka jebkurā gājienā jauniegūtais skaitlis būs vismaz tikpat liels, cik mazākais no trim izvēlētajiem skaitļiem (to viegli algebriski pārbaudīt). Tātad uz tāfeles jebkurā brīdī uzrakstītie skaitļi visi būs lielāki vai vienādi ar 1. Tā kā divu beigās palikušo skaitļu kvadrātu summa ir 385, un mazākais iespējamais skaitlis uz tāfeles ir 1, tad lielākais iespējamais skaitlis beigās ir $\sqrt{384} = 8\sqrt{6}$. To var sasniegt, secīgi veicot gājienus ar skaitļiem $2, 3, \ldots, 10$ un to radītajiem jaunajiem skaitļiem.

Komentārs. Šāda veida uzdevumos, kur tiek veikti algebriski pārveidojumi ar skaitļiem, parasti tiek meklēti algebriski invarianti atkarībā no procesa pārveidojuma izteiksmes.

Svarīgi arī atcerēties, ka uzdevumos, kur jāatrod lielākā vai mazākā vērtība, risinājumam ir nepieciešamas divas daļas – pirmkārt, ka lielāka vai mazāka vērtība nav iespējama (novērtējums), un otrkārt, ka optimālo vērtību patiešām var sasniegt. Ja kāda no šīm daļām iztrūkst, tad būtība ir iegūts novērtējums no vienas puses, piemēram, $x \geq 5$, taču tas negarantē, ka mazākā iespējamā x vērtība patiešām ir 5, jo var gadīties, ka reāli mazākā iespējamā vērtība ir $x = 7$, kam iegūtais novērtējums arī izpildās.

2.piemērs Trijās konfekšu kaudzēs uz galda ir attiecīgi 5, 49 un 51 konfekte. Māris drīkst jebkuras divas uz galda esošas kaudzes apvienot vienā kaudzē, vai arī jebkuru kaudzi, kura satur pāra skaitu konfekšu, sadalīt divās kaudzēs ar vienādu konfekšu skaitu. Vai, veicot atļautās darbības, Māris no sākotnējām 3 kaudzēm var iegūt 105 konfekšu kaudzes, kur katrā no tām ir tieši 1 konfekte?

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim šādu apgalvojumu.

Apgalvojums. Ja konfekšu skaits visās kaudzēs dalās ar p, kur p ir nepāra pirmskaitlis, tad pēc operāciju veikšanas visās kaudzēs konfekšu skaits joprojām dalās ar p.
Pierādījums. Apvienojot 2 kaudzes, kurās ir attiecīgi ap un bp konfektes (a, b – naturāli skaitļi), tiks iegūta kaudze ar $(a+b)p$ konfektēm. Savukārt, sadalot kaudzi ar $2ap$ konfektēm, tiks iegūtas 2 kaudzes ar ap konfektēm. Ievērosim, ka neatkarīgi no veiktajām operācijām konfekšu skaits katrā kaudzē joprojām dalās ar p.

Tā kā visās kaudzes sākotnēji ir nepāra skaits konfekšu, tad nevienu no tām nav iespējams sadalīt divās vienādas daļās. Tādēļ iespējamas ir tikai trīs operācijas:

- apvienot kaudzes ar 5 un 49 konfektēm. Tādā gadījumā iegūstam kaudzes ar 54 un 51 konfekti. Abās kaudzēs konfekšu skaits dalās ar 3. No apgalvojuma izriet, ka neatkarīgi no veiktajām operācijām konfekšu skaits katrā kaudzē vienmēr dalīsies ar 3. Līdz ar to nevarēs panākt to, ka katrā kaudzē ir tieši 1 konfekte.

- apvienot kaudzes ar 5 un 51 konfekti. Tādā gadījumā iegūstam kaudzes ar 56 un 49 konfektēm. Abās kaudzēs konfekšu skaits dalās ar 7. No apgalvojuma izriet, ka neatkarīgi no veiktajām operācijām konfekšu skaits katrā kaudzē vienmēr dalīsies ar 7. Līdz ar to nevarēs panākt to, ka katrā kaudzē ir tieši 1 konfekte.

- apvienot kaudzes ar 49 un 51 konfekti. Tādā gadījumā iegūstam kaudzes ar 100 un 5 konfektēm. Abās kaudzēs konfekšu skaits dalās ar 5. No apgalvojuma izriet, ka neatkarīgi no veiktajām operācijām konfekšu skaits katrā kaudzē vienmēr dalīsies ar 5. Līdz ar to nevarēs panākt to, ka katrā kaudzē ir tieši 1 konfekte.

Secinām, ka prasīto panākt nevarēs.

3.piemērs Uz tāfeles ir uzrakstīti 2020 pozitīvi reāli skaitļi. Katru minūti Ramona nodzēš divus skaitļus un to vietā uzraksta vai nu to summu, vai starpību, vai reizinājumu, vai dalījumu. Piemēram, ja Ramona izdzēš skaitļus 6 un 3, tad viņa var aizvietot tos ar vienu skaitli no kopas $\{6+3, 6-3, 3-6, 6\times 3, 6\div 3, 3\div 6\} = \{9, 3, -3, 18, 2, 0.5\}$. Pēc 2019 minūtēm uz tāfeles ir palicis tikai viens skaitlis, kas ir -2020. Pierādīt, ka Ramona varēja dzēst skaitļus un veikt aritmētiskas operācijas tā, lai uz tāfeles būtu palicis skaitlis 2020 (sākotnējie skaitļi paliek nemainīgi).

Atrisinājums. Ievērosim, ka vismaz vienu reizi Ramona veica atņemšanas operāciju, jo visas pārējās operācijas pozitīviem skaitļiem vienmēr dod pozitīvu skaitli. Izmantojot tikai tās sākotnējiem skaitļiem, gala rezultāts arī būtu pozitīvs, taču tika iegūts skaitlis -2020.

Secīgi pēc gājieniem aplūkosim pēdējo atņemšanu, apzīmējot to ar $a-b$. Tās vietā Ramona veic operāciju $b-a$, iegūtajam skaitlim piešķirot sarkanu krāsu. Tālākajiem gājieniem, starp kuriem vairs nevar būt atņemšana, Ramona izpilda šādu algoritmu:

- Ja operācijā nav iesaistīts sarkans skaitlis, tad Ramona atstāj operāciju nemainītu.

- Ja operācijā ir iesaistīts sarkans skaitlis un tā ir reizināšana vai dalīšana, tad Ramona atstāj operāciju nemainītu un rezultātu atzīmē sarkanu. Skaidrs, ka rezultātā tiks iegūts skaitlis ar tādu pašu absolūto vērtību, kā oriģinālajā operāciju secībā, tikai ar pretēju zīmi.

- Ja operācijā ir iesaistīts sarkans skaitlis un tā ir saskaitīšana, tad Ramona aizstāj to ar ne-sarkanā skaitļa atņemšanu no sarkanā skaitļa un rezultātu atzīmē sarkanu. Skaidrs, ka rezultātā tiks iegūts skaitlis ar tādu pašu absolūto vērtību, kā oriģinālajā operāciju secībā, tikai ar pretēju zīmi.

Tā kā pēc pēdējās atņemšanas uz tāfeles vienmēr ir viens sarkans skaitlis (to skaits nesamazinās un nepalielinās procesa gaitā), tad pēdējais skaitlis arī būs sarkans. No iegūtā algoritma ir skaidrs, ka pēdējam skaitlim būs pretēja zīme un tāda pati absolūtā vērtība kā sākotnējam beigu rezultātam, tātad tas būs 2020.

Komentārs. Šī uzdevuma esence ir atrast lielumu, kas noteikti būs atrodams uzdevumā dotajā situācijā – šinī gadījumā tā ir obligātā atņemšana, lai iegūtu negatīvu skaitli. Kā jau minēju, šādu obligāto nosacījumu atrašana var ievērojami palīdzēt risināšanā.

4.piemērs Apskatīsim 41×41 rūtiņu laukumu. Tomass ir paslēpis tanku vienā no laukuma rūtiņām. Anna katru minūti no lidmašīnas šauj uz vienu no laukuma rūtiņām. Ja viņa ar savu šāviņu trāpa Tomasa tankam, tad Tomass pārvieto savu tanku no esošās rūtiņas uz kādu no blakusesošajām rūtiņām ar kopīgu malu. Pretējā gadījumā tanks savu atrašanās vietu nemaina. Annai nav informācijas par to, kur atrodas tanks vai ka tam ir trāpīts, un, lai to iznīcinātu, viņai ir jātrāpa pa to 2 reizes. Noteikt mazāko iespējamo šāviņu skaitu, kas Annai ir jāveic, lai noteikti iznīcinātu tanku.

Atrisinājums. Atbilde ir $\frac{3 \cdot 41^2 - 1}{2} = 2521$ gājiens.

Vispirms pierādīsim, ka Anna 2521 gājienos patiešām var trāpīt 2 reizes Tomasa tankam. Izkrāsosim rūtiņu laukumu kā šaha galdiņu (ar vairāk baltajām rūtiņām nekā melnajām rūtiņām). Ja Anna šauj pa visām melnajām rūtiņām, tad pa visām baltajām rūtiņām un pēc tam vēlreiz pa visām melnajām rūtiņām, tad viegli redzēt, ka viņa trāpīs tankam noteikti 2 reizes, jo pārvietošanās rezultātā tanks maina tā rūtiņas krāsu.

Tagad pierādīsim, ka ir vajadzīgs vismaz 2521 gājiens. Ievērosim, ka pa katru laukuma rūtiņu jāizšauj vismaz vienu reizi, pretējā gadījumā pastāv iespēja, ka Anna pa tanku vispār netrāpīs ne reizi. Noklāsim rūtiņu laukumu ar 840 domino kauliņiem 1×2 (tie var būt arī pagriezti), kā rezultātā viena rūtiņa paliks nenoklāta. Pieņemsim, ka eksistē domino kauliņš, pa kuru kopumā tika veikti ne vairāk kā 2 šāvieni - apzīmēsim tā rūtiņas ar a un b. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka Anna pirmo šāvienu šajā domino kauliņā veica pa rūtiņu a. Ja tanks sākotnēji atradās rūtiņā b, tad Anna trāpīs tam tikai otrajā gājienā. Ja pēc trāpījuma tanks pārvietojās uz rūtiņu a, tad no pieņēmuma pa to vairs netiks šauts un Anna nebūs iznīcinājusi tanku. Secinām, ka pa katru domino kauliņu ir jāveic vismaz 3 šāvieni un vismaz 1 šāviens pa nenoklāto rūtiņu. Līdz ar to kopā ir vajadzīgi vismaz $840 \cdot 3 + 1 = 2521$ šāviņi.

Komentārs. Šis uzdevums ilustrē domāšanas veidu atšķirību par **lokāliem** un **globāliem** lielumiem, ar kuriem jau saskarsme bija arī algebras materiālos. Bieži vien procesos ir vērts apdomāt, vai pretrunas veidojas no tā, ka mēs varam lokāli jeb kādā mazā daļā iegūt novērtējumu procesam (kā šeit par domino kauliņiem), vai arī ir doti gājieni, kas procesu lokāli ietekmē diezgan neparedzami, taču mēs varam noteikt kopējo visa procesa jeb globālo uzvedību.

5.piemērs Galerijā "Ekspresionists" ir izstādītas 100 gleznas, apzīmēsim tās ar $G_1, G_2, \ldots, G_{100}$. Mākslinieks un kritiķis spēlē šādu spēli. No sākuma mākslinieks katrai no gleznām izdomā cenu, kas ir naturāls skaitlis, apzīmēsim cenas attiecīgi ar $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{100}$. Pēc tam katrā gājienā:

- mākslinieks nosauc kādu naturālu skaitli x;
- kritiķis izvēlas gleznu G_i un nomaina tās cenu uz x (t.i., tagad $c_i = x$, pārējās c_j vērtības, kurām $j \neq i$, nemainās).

Ja pēc kāda gājiena cenas ir sakārtotas nedilstošā secībā $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{100}$, tad kritiķis ir uzvarējis un spēle beidzas. Pretējā gadījumā spēle turpinās. Vai kritiķis vienmēr var uzvarēt galīgā skaitā gājienu neatkarīgi no tā, kā spēlē mākslinieks?

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu, lai pierādītu, ka kritiķis var uzvarēt jebkuram naturālam gleznu skaitam n.

Indukcijas bāze: Ja $n = 1$, tad acīmredzami pēc pirmā gājiena kritiķis būs uzvarējis.

Induktīvais pieņēmums: Pieņemsim, ka naturālam k kritiķis var sakārtot k gleznas nedilstošā cenu secībā.

Induktīvā pāreja: Aplūkosim situāciju, kad ir $k + 1$ glezna. No induktīvā pieņēmuma kritiķis var pirmās k gleznas sakārtot nedilstošā cenu secībā. Ja $c_{k+1} \geq c_k$, tad prasītais izpildās; aplūkosim pretējo situāciju. Veidosim kritiķa darbības algoritmu atkarībā no mākslinieka izvēlētā skaitļa x katrā gājienā:

- Ja $x \geq c_k$. Šajā gadījumā kritiķis aizstāj c_{k+1} ar x. Tā kā pirmās k gleznas jau ir sakārtotas nedilstošā cenu secībā, tad acīmredzami visas $k + 1$ gleznas ir sakārtotas nedilstošā cenu secībā un kritiķis ir uzvarējis.
- Ja $x < c_k$. Tad kritiķis pēc kārtas salīdzina gleznu cenas ar x, sākot ar c_1, tad c_2 utt. līdz c_k. Kad kritiķis atrod pirmo gleznu G_i, ka $x < c_i$, viņš aizstāj c_i ar x. Šāda glezna noteikti eksistēs, jo $x < c_k$.
  Šajā gadījumā varam attiecīgi ievērot, ka pēc c_i aizstāšanas gleznu cenas joprojām ir sakārtotas nedilstošā secībā, jo no algoritma $x \geq c_{i-1}$. Papildus tam var secināt, ka pirmo k gleznu cenu summa samazinās, jo $x < c_i$.

Izmantojot šādu algoritmu, kritiķis var garantēt uzvaru, jo algoritms garantēti kādā brīdī nonāks gadījumā $x \geq c_k$. Tas izriet no tā, ka otrā gadījumā pirmo k gleznu cenu summa katru reizi samazinās, taču tā nevar kļūt mazāka par k (kad $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 1$). Ja tā sasniedz minimumu, tad acīmredzami $x \geq c_k$ un visas gleznas ir sakārtotas nedilstošā cenu secībā. Līdz ar to induktīvā pāreja ir pierādīta.

Tā kā esam pierādījuši, ka kritiķis uzvar visiem naturāliem n, tad viņš uzvar arī gadījumā $n = 100$, kas bija jāpierāda.

Komentārs. Procesos samērā bieži ir iespējams esošo situāciju reducēt uz mazāku ekvivalentu situāciju, un formāliem pierādījumiem tad ļoti piemērota ir matemātiskā indukcija. Šeit arī vērts ievērot monovarianta lietojumu kopā ar īpašību, ka naturālie skaitļi nevar samazināties bezgalīgi – ideja, kas ir pamatā daudziem fundamentāliem rezultātiem gan kombinatorikā, gan skaitļu teorijā.

6.piemērs Rindā ir sakārtotas $a+b$ bļodas, kuras ir arī sanumurētas no 1 līdz $a+b$, kur a un b ir naturāli skaitļi. Sākotnēji pirmajās a bļodās ir ābols, bet pēdējās b bļodās ir Big-Mac komplekts. Vienā gājienā Petr var pārvietot ābolu no i-tās bļodas uz $(i+1)$-to bļodu un Big-Mac komplektu no j-tās bļodas uz $(j-1)$-to bļodu, ja starpība $i-j$ ir pāra skaitlis. Vienā bļodā var atrasties vairāki ēdieni. Petr mērķis ir panākt to, lai pirmajās b bļodās katrā ir Big-Mac komplekts un pēdējās a bļodās katrā ir ābols. Pierādīt, ka viņš to var izdarīt tad un tikai tad, ja skaitlis ab ir pāra.

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim, ka prasīto nevar sasniegt, kad ab ir nepāra skaitlis. Ievērosim, ka tādā gadījumā gan a, gan b ir nepāra.

Ar X apzīmēsim ābolu skaitu bļodās ar nepāra numuru, bet savukārt ar Y - Big-Mac skaitu nepāra bļodās. Lasītājs var viegli pārliecināties, ka lielums $X-Y$ nemainās, veicot atļautās operācijas, jo vienmēr tiek izvēlēti ēdieni, kas atrodas vienādas paritātes numuru bļodās. Ievērosim, ka sākotnēji $X=\frac{1}{2}(a+1)$ un $Y=\frac{1}{2}(b-1)$, kas nozīmē, ka $X-Y=\frac{1}{2}(a-b+2)$. No otras puses, gala situācijā mēs vēlētos panākt, ka $X=\frac{1}{2}(a-1)$ un $Y=\frac{1}{2}(b+1)$, bet tādā gadījumā $X-Y=\frac{1}{2}(a-b-2)$ - pretruna ar to, ka $X-Y$ nemainās.

Tagad pierādīsim, ka prasīto var sasniegt, kad ab ir pāra skaitlis. Pierādīsim prasīto ar matemātiskās indukcijas metodi uz $a+b$, kur bāzes gadījumus var viegli pārbaudīt. Šķirosim gadījumus:

- Pieņemsim, ka $a+b$ ir nepāra skaitlis. Tad mēs varam pārvietot pirmo ābolu uz bļodu, kur atradās pēdējais Big-Mac un otrādi. To var izdarīt, secīgi izvēloties tikai šos divus minētos ēdienus, jo $(a+b)-1,(a+b)-3,\ldots$ ir pāra skaitļi. Tas reducē uzdevumu uz gadījumu $(a-1,b-1)$ (viens no skaitļiem a,b ir nepāra, līdz ar to viens no skaitļiem $a-1,b-1$ ir nepāra), kur mēs varam pielietot induktīvo pieņēmumu.

- Pieņemsim, ka $a+b$ ir pāra skaitlis (abi skaitļi ir pāra). Tādā gadījumā mēs varam samainīt vietām ābolu 1-jā pozīcijā ar Big-Mac $a+b-1$-jā pozīcijā, kā arī ābolu 2-jā pozīcijā ar Big-Mac $a+b$-tajā pozīcijā. Tas reducē uzdevumu uz gadījumu $(a-2,b-2)$, kur mēs varam pielietot induktīvo pieņēmumu.

Tā kā visi iespējamie gadījumi ir aplūkoti, uzdevums ir atrisināts.

7.piemērs Katrs skaitlis no 1 līdz 2023 ir izkrāsots vai nu zilā krāsā, vai sarkanā. Vienā gājienā atļauts izvēlēties 3 dažādus skaitļus, kuri veido aritmētisku progresiju, un nomainīt to krāsu uz pretējo. Kuriem sākotnējiem skaitļu krāsojumiem var panākt, ka visi skaitļi pēc galīga gājienu skaita kļūst zili?

Atrisinājums. Mēs pierādīsim, ka var mainīt viena skaitļa krāsu uz pretējo, nemainot atlikušos skaitļus, kas pierādīs to, ka jebkuram krāsojumam var panākt galīgā skaitā gājienu, ka visi skaitļi kļūst zili.

Aplūkosim patvaļīgu skaitli un tam 8 blakusesošus skaitļus (pa labi no tā vai pa kreisi no tā). Izvēlēto skaitli apzīmēsim ar 1 un atlikušos skaitļus pieaugošā secībā no izvēlētā skaitļa 1 apzīmēsim ar $2,3,\ldots,9$. Tagad mēs mainīsim skaitļu krāsu šādi:

$$\begin{gathered}(1,*,3,*,5,*,*,*,*)\\(1,*,*,4,*,*,7,*,*)\\(1,*,*,*,5,*,*,*,9)\\(*,*,3,4,5,*,*,*,*)\\(*,*,*,*,5,*,7,*,9)\end{gathered}$$

Viegli redzēt, ka ikviens izvēlētais skaitļu trijnieks veido aritmētisku progresiju, kā arī visiem skaitļiem krāsa mainījās pāra skaitu reižu, izņemot skaitli 1. Tas nozīmē, ka skaitlim 1 krāsa mainījās uz pretējo, kamēr pārējo skaitļu krāsa saglabājās tāda pati kā pirms operācijas. Pielietojot šo algoritmu visiem sarkanajiem skaitļiem, varam panākt to, ka visi skaitļi kļūst par ziliem, kas arī bija jāpierāda.

Komentārs. Samērā populāra ideja – ja nepieciešams visus procesa elementus panākt konkrētā veidā, pietiek parādīt, ka prasīto var sasniegt mazai daļai (dažiem elementiem), un tad šādas mazās daļas apvienot. Šajā uzdevumā ir aplūkots ekstremālais gadījums, kurā tiek izmainīts viens elements.

8.piemērs Reālu skaitļu virknei, kura nav konstanta, atļauts veikt šādu operāciju - izvēlēties 2 skaitļus un abus nomainīt uz šo skaitļu vidējo aritmētisko. Pierādīt, ka eksistē 2015 reālu skaitļu virkne, ka neatkarīgi no tā, kā tiek veikta pirmā operācija, tālāk var veikt galīgu skaitu operāciju, lai beigās panāktu, ka visi skaitļi ir vienādi.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka virkne $-1007, -1006, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 1007$ apmierina uzdevuma nosacījumu

Apskatīsim šādus gadījumus:

- Pirmajā gājienā tika izvēlēts skaitļu pāris $(a, -a)$, kur a ir naturāls skaitlis. Tad izvēlētie skaitļi tiks nomainīti uz $(0, 0)$. Tālāk uzdevuma prasīto var panākt, vienmēr izvēloties skaitļu pārus $(b, -b)$, kur b naturāls skaitlis. Pēc 1006 gājieniem visi uz tāfeles uzrakstītie skaitļi būs 0.
- Pirmajā gājienā ir izvēlēts skaitļu pāris $(a, 0)$, kur $a \neq 0$. Izvēlēsimies tādu skaitli b, ka $b \neq a \neq 0$. Ievērosim, ka tādā gadījumā mēs varam veikt šādas operācijas:

$$\begin{aligned} b, -b, -a, a, 0 \\ b, -b, -a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \\ 0, 0, -a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \\ 0, -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \\ 0, 0, 0, 0, 0 \end{aligned}$$

  Tālāk darīsim līdzīgi kā pirmajā gadījumā - izvēlēsimies skaitļus pārus $(c, -c)$, kur c ir naturāls, lai panāktu to, ka beigās visi uzrakstītie skaitļi ir 0.

- Pirmajā gājienā tika izvēlēts pāris (a, b), kur $a, b \neq 0$ un $a + b \neq 0$. Ievērosim, ka tādā gadījumā mēs varam veikt šādas operācijas:

$$\begin{aligned} -a, -b, a, b \\ -a, -b, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \\ -\frac{a+b}{2}, -\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \\ 0, 0, 0, 0 \end{aligned}$$

  Tālāk darīsim līdzīgi kā pirmajā gadījumā - izvēlēsimies skaitļus pārus $(c, -c)$, kur c ir naturāls, lai panāktu to, ka beigās visi uzrakstītie skaitļi ir 0.

Visi gadījumi apskatīti, tāpēc secinām, ka virkne apmierina uzdevuma nosacījumus.

Komentārs. Bieži vien procesa gaitu ir vēlams kontrolēt mums izdevīgā veidā – populāra ideja ir veidot skaitļu pārus, kas definē tālāko procesa algoritmu. Ar šo ideju vēl gana daudz saskarsimies nākamajā nodaļā.

3 Spēles

3.1 Vispārīgi komentāri

Būtībā spēles ir procesu uzdevumi, tikai kā papildus mainīgais ir ieviests tas, ka ir vēl viena iesaistītā puse, kura var neatkarīgi ietekmēt procesa gaitu. Tādēļ daudzas idejas, kas tiek pielietotas procesu uzdevumos, ir tiešā veidā pārnesamas uz spēlēm. Tomēr, spēlēm pastāv arī sava specifika.

- **Ļoti uzmanīgi ar *optimālo* stratēģiju.** Bieži vien skolēni savos darbos raksta – spēlētājam A jāveic šādas darbības, un tās garantēs uzvaru, jo B ir optimāli veikt šādu konkrētu gājienu, taču tas zaudē. Šādi tīrraksti ļoti bieži olimpiādēs saņem 0 punktus, jo būtībā ir atrisināts speciālgadījums konkrētām B darbībām. Lai formāli pierādītu, ka uzvarēs kāds spēlētājs, ir jādod stratēģija, kura sniegs labāku rezultātu neatkarīgi no otra spēlētāja darbībām, tātad jebkuram iespējamam gadījumam. Viens veids, kā par to domāt, ir izveidot programmējamu algoritmu, kuru varēs veikt dators, kurš nemāk pats domāt par situāciju, bet tikai noteikt tās parametrus, kam vajag noteikt tālāko darbību pēc algoritma.

  Protams, ja ir iespējams formāli pierādīt, ka B patiešām ar citām darbībām visos gadījumos sasniegs sev sliktākus rezultātus, tad drīkst aplūkot B labākās darbības, tomēr bieži vien labākās darbības mainās spēles laikā atkarībā no situācijas.

- **Uzskatāmi izdalīt risinājuma daļas.** Ja risinājumā šobrīd tiek runāts par A stratēģiju, tad tiek izmantoti tikai rezultāti par to, kā spēlē A – par B rezultātiem aizmirstam jeb iedomājamies, ka pretī spēlē dators ar gadījumskaitļu ģeneratoru. Bieži skolēni vienā rindkopā cenšas aprakstīt labākos rezultātus gan A, gan B, tos pa riņķi izmantojot, lai pierādītu rezultātus no viena spēlētāja par otru, tā uzreiz iegūstot "optimālos" rezultātus abiem. Šādi būtībā tiek izmantoti nepierādīti un bieži vien nepatiesi rezultāti, lai pierādītu citus rezultātus.

3.2 Simetrija

Šis principa nosaukums jau acīmredzami paskaidro spēlēs izmantojamo ideju par stratēģijas simetrisku attēlošanu jeb "kopēšanu".

1.piemērs Dots regulārs 2023-stūris, kuram katrā virsotnē novietota monēta. Azuls un Rojo spēlē spēli, kurā viņi pēc kārtas veic gājienus. Azuls sāk spēli. Savā gājienā Azuls izvēlas kādus trīs 2023-stūra punktus un iekrāso to veidoto trijstūri sarkanu. Analoģiski, Rojo izvēlas trīs punktus un iekrāso trijstūri zilu. Pie tam, jebkurā gājienā izvēlētam trijstūrim ir jāizpildās īpašībai, ka tam nav kopīgu punktu ar citiem trijstūriem, izņemot to virsotnes un malas (tie nekrustojas). Spēlētāji veic gājienus līdz brīdim, kad vairs nav iespējams izvēlēties trijstūrus, kam izpildās nosacījumi.
Tad tiek izvēlēts katras monētas uzvarētājs. Katrai 2023-stūra virsotnei pa krāsām tiek saskaitīts to trijstūru daudzums, kuriem pieder minētā virsotne. Ja vienas krāsas trijstūru ir vairāk nekā otras, tad attiecīgais spēlētājs iegūst šo monētu; vienāda skaita gadījumā monētu neiegūst neviens. Pēc visu virsotņu pārbaudes tiek saskaitīts katra spēlētāja monētu skaits. Uzvar tas, kuram ir vairāk monētu.
Noteikt, kuram spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija (ja tāda ir).

Atrisinājums. Azulam (pirmajam spēlētājam) eksistē uzvaroša stratēģija.

Sanumurējam virsotnes pulksteņrādītāja secībā $V_1, V_2, \ldots, V_{2023}$. Pirmajā gājienā Azuls iekrāso trijstūri $V_1V_2V_{1013}$ (virsotne V_{1013} atrodas uz V_1V_2 vidusperpendikula); nosaucam to par *pirmo* trijstūri. Redzams, ka šis trijstūris sadala 2023-stūri divās simetriskās virsotņu grupās $V_2, V_3, \ldots, V_{1013}$ un $V_{1013}, V_{1014}, \ldots, V_{2023}, V_1$. Tā kā jebkurš nākamais trijstūris nevar krustot *pirmo* trijstūri, katra nākamā trijstūra virsotnes pilnībā atradīsies vienā no simetriskajām virsotņu grupām. Līdz ar to Azula stratēģija ir turpmākajos gājienos spēlēt simetriski pret V_1V_2 vidusperpendikulu, izvēloties simetriski atbilstošo trijstūri Rojo izvēlētajam. Simetrijas dēļ arī ir skaidrs, ka Azuls vienmēr varēs veikt gājienu, ko veica Rojo, jo, ja Rojo izvēlējās kādu neiekrāsotu trijstūri, stratēģija acīmredzami nodrošina, ka simetriskais trijstūris arī nebūs iekrāsots un to būs iespējams iekrāsot.

Simetrijas dēļ visās virsotnēs, kas nav V_{1013}, Azuls iegūs vismaz tikpat monētu, cik Rojo. Tas ir skaidrs, sadalot virsotnes pa simetriskiem pāriem, jo attiecīgi viena pāra virsotnēm tām piederošo trijstūru krāsas būs pretējas. Ja vienā no tām Rojo dabū monētu, tad attiecīgi otrā pāra virsotnē monētu šī secinājuma dēļ iegūs Azuls. Atsevišķi var vēl aplūkot virsotnes V_1 un V_2, jo tajās bez simetriski piederošajiem trijstūriem vēl viens papildus trijstūris ir Azulam, kas var dot viņam potenciāli papildus monētu vai likt Rojo iegūt par vienu monētu mazāk, taču tas neietekmē apgalvojumu, ka Azuls visās aplūkotajās virsotnēs iegūst vismaz tikpat monētu, cik Rojo.

Atliek aplūkot virsotni V_{1013}. Simetrijas dēļ visi tai piederošie trijstūri, kas nav $V_1V_2V_{1013}$, sadalīsies vienādā skaitā katrai krāsai (abās pusēs tie ir vienādā skaitā un ar pretēju krāsu sadalījumu). Tad, ņemot vērā, ka trijstūris $V_1V_2V_{1013}$ ir sarkanā krāsā, sarkano trijstūru, kas pieder V_{1013} ir par vienu vairāk nekā zilo, tādēļ Azuls iegūst monētu par šo virsotni. Tā kā par visām pārējām virsotnēm Azula monētu skaits noteikti ir vismaz tikpat, cik Rojo, tad kopumā sanāk, ka Azuls būs ieguvis vairāk monētu, pierādot, ka ar šo stratēģiju viņš var garantēti uzvarēt.

Komentārs. Šis uzdevums labi ilustrē svarīgākās lietas par simetrijas izmantošanu – pirmkārt, reizēm simetriju nav iespējams uzreiz uzdevumā pielietot un tās izveidei ir nepieciešams kāds specifisks sākuma gājiens, ko klasiski veic pirmais spēlētājs. Otrkārt, uzdevumos ir nepieciešams formāli aplūkot, ka simetriskos gājienus visu spēles gaitu patiešām varēs veikt un otram spēlētājam nav iespēju kādā brīdī simetriju izjaukt.

2.piemērs Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$. Dainis un Maruta spēlē spēli, kurā viņi viens pēc otra iekrāso regulāra n-stūra virsotnes. Dainis veic pirmo gājienu. Sākotnēji visas virsotnes ir neiekrāsotas. Abi spēlētāji sāk spēli ar 0 punktiem.
Savā gājienā spēlētājs iekrāso virsotni V, kas vēl nav iekrāsota, un iegūst k punktus, kur k ir virsotnei V blakusesošu iekrāsotu virsotņu skaits (līdz ar to k ir 0, 1 vai 2).
Spēle beidzas, kad visas virsotnes ir iekrāsotas. Uzvar spēlētājs, kurš ir ieguvis vairāk punktu. Ja abiem spēlētājiem ir vienāds punktu skaits, tad spēle beidzas neizšķirti. Atrast visus naturālus skaitļus $n \geq 3$, kuriem Dainis var uzvarēt neatkarīgi no tā, kā spēlē Maruta, un atrast visus naturālus skaitļus $n \geq 3$, kuriem Maruta var uzvarēt neatkarīgi no tā, kā spēlē Dainis.

Atrisinājums. Ja $n \geq 3$ ir nepāra, tad Dainim ir uzvaroša stratēģija. Ja $n \geq 3$ ir pāra, tad Maruta var garantēt sev uzvaru.

Sākotnēji aplūkosim gadījumu, kad n ir nepāra. Sanumurējam virsotnes pulksteņrādītāja virzienā $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Pirmajā gājienā Dainis iekrāso V_1 un sadala n-stūri divās simetriskās daļās ar simetrijas asi, kas iet caur V_1. Katrā nākamajā gājienā viņš iekrāso simetrisko virsotni tai, kuru savā pēdējā gājienā iekrāsoja Maruta.

Apzīmēsim tās virsotnes, kuru veidoto n-stūra malu krusto vilktā simetrijas ass, ar V_k un V_{k+1}. Skaidrs, ka simetrijas dēļ par visām pārējām virsotnēm punkti tiks iegūti simetriski - cik punktu savā gājienā ieguva Maruta, tik punktu nākamajā gājienā ieguva Dainis. Līdz ar to tajos gājienos, kad tika iekrāsotas virsotnes, kas nav V_k un V_{k+1}, spēlētāji kopumā ieguva vienādu punktu skaitu. Izņēmums ir nosauktās divas virsotnes - ja Maruta savā gājienā iekrāsoja kādu no tām, tad viņa ieguva 0 vai 1 punktu, jo otra šī pāra virsotne simetrijas dēļ vēl nebija iekrāsota. Tad savā nākamajā gājienā Dainis iekrāsoja otru šī pāra virsotni un ieguva attiecīgi tikpat punktu, cik Maruta, plus vēl klāt vienu punktu, jo otra minētā pāra virsotne tagad ir iekrāsota (to Maruta izdarīja savā pēdējā gājienā) un šīs virsotnes atrodas blakus n-stūrī.

Attiecīgi varam secināt, ka visos gājienos pēc pirmā Dainis ieguva tikpat punktu, cik Maruta savā iepriekšējā gājienā, izņemot vienu gājienu, kurā viņš ieguva papildus vienu punktu. Kopsummā tas garantēti sniedz uzvaru Dainim.

Aplūkosim gadījumu, kad n ir pāra. Sanumurējam virsotnes tāpat kā iepriekš, un pieņemam, ka pirmajā gājienā Dainis iekrāsoja virsotni V_1. Tādā gadījumā Maruta savā pirmajā gājienā iekrāso virsotni V_2 un novelk simetrijas asi, kas ir V_1V_2 vidusperpendikuls. Savā pirmajā gājienā Dainis ieguva 0 punktu, bet Maruta ieguva 1 punktu, jo V_2 blakusvirsotne V_1 bija jau iekrāsota.

Papildus veicam abstrakciju - pieņemsim, ka V_1 un V_2 ir viena un tā pati virsotne, un spēli sāka Maruta, to iekrāsojot savā pirmajā gājienā. Acīmredzami, ka pārējo virsotņu kaimiņu iekrāsotības stāvoklis nav mainījies. Tādā gadījumā risinājums ir pilnībā analoģisks nepāra gadījumam, tikai tagad spēlētāju lomas ir mainītas vietām, kā arī Marutai jau ir 1 papildus punkts sākumā. No tā uzreiz varam secināt, ka Marutai pāra gadījumā eksistē uzvaroša stratēģija.

3.piemērs Dota rūtiņu tabula $n \times n$. Māris un Filips spēlē šādu spēli. Viņi pēc kārtas kādā vēl tukšā rūtiņā ieraksta skaitli 1 vai -1. Spēli sāk Māris. Ja pēc kāda spēlētāja gājiena tiek aizpildīta kāda rinda vai kolonna, tad tiek aprēķināts tajā esošo skaitļu reizinājums. Ja tas ir vienāds ar -1, tad spēlētājs, kurš veica pēdējo gājienu, dabū 1 punktu (iespējams arī vienlaicīgi saņemt 2 punktus, ja aizpilda gan rindu, gan kolonnu). Spēle beidzas, kad tabula ir pilnībā aizpildīta. Uzvar spēlētājs, kurš iegūst visvairāk punktu. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija, ja **a)** $n = 2021$; **b)** $n = 2022$?

Atrisinājums. **a)** Ja $n = 2021$, uzvar Māris. Pirmajā gājienā viņš centrālajā rūtiņā ieraksta skaitli -1, bet tālākajos gājienos spēlē simetriski attiecībā pret centrālo rūtiņu un Filipa gājienu. Tādā gadījumā, ja Filips pēc sava gājiena iegūs kādu punktu, Māris simetriski arī iegūs punktu. Tātad Māris iegūs tieši tikpat punktu, cik Filips.

Papildus tam varam ievērot, ka Māris būs tas, kurš aizpildīs vidējo rindu un vidējo kolonnu simetrijas dēļ. Tā kā visi skaitļi tajās būs simetriski, izņemot to, ka pa vidu ir ierakstīts -1, tad varam secināt, ka reizinājums būs -1 un Māris iegūs papildu 2 punktus, kas ļaus viņam uzvarēt.

b) Ja $n = 2022$, uzvar Filips. Viņš katru savu gājienu veic simetriski pret vertikālo tabulas simetrijas asi un Māra gājienu, izņemot tos brīžus, kad viņam ir jāveic gājiens rindā, kurā ir atlikusi tieši viena tukša rūtiņa. Tajos brīžos viņš izvēlas tādu skaitli, lai šīs rindas reizinājums būtu -1. Simetrijas dēļ Filips vienmēr būs tas, kurš aizpilda kādu rindu, un šī stratēģija garantēs viņam 2022 punktus par rindām.

Papildus varam ievērot, ka simetrijas dēļ katru reizi, kad Māris aizpildīs kādu kolonnu, tad nākamajā gājienā Filips aizpildīs simetrisko kolonnu. Līdz ar to Māris aizpildīs tieši 1011 kolonnas, kas viņam dod ne vairāk kā 1011 punktus. Redzams, ka tātad Filips uzvarēs.

3.3 Dažu ideju piemēri

4.piemērs Rindā ir 2022 secīgi sanumurētas rūtiņas. Alise un Bobs spēlē spēli. Sākotnēji visās rūtiņās ar nepāra numuru tiek ierakstīts burts A, bet rūtiņās ar pāra numuru - burts B. Tad Alise sāk spēli, secīgi mainoties ar gājieniem ar Bobu.
Savā gājienā spēlētājs spēlētājs izvēlas divas rūtiņas, kas neatrodas blakus, kurās ir ierakstīts spēlētājam atbilstošais burts un starp kurām atrodas tikai rūtiņas ar otra spēlētāja burtu. Gājienā laikā visās rūtiņās, kas atrodas starp izvēlētajām, burts tiek nomainīts uz spēlētāja burtu.

Atrisinājums. Alise var garantēt 1011 rūtiņas ar A burtu.

Nosauksim par *ķēdi* secīgu viena veida burtu secību, kurai abās pusēs ir otrs burts vai rindas gals. Ievērosim, ka sākuma stāvoklī ir 1011 burtu A ķēdes (ar garumu 1) un 1011 burtu B ķēdes. Ievērojam, ka gājiena laikā A un B ķēžu skaits katrs samazinās par 1. Tas ir tādēļ, ka viena ķēde tiek pārmainīta uz pretējo burtu, kā arī divas viena burta ķēdes tādā gadījumā saplūst kopā vienā ķēdē (kurai pa vidu vēl tiek pievienoti nomainītie burti). Papildus ievērosim, ka ķēdes, kurām vienā galā ir rindas gals, uzdevuma ietvaros nav iespējams nomainīt uz pretējo burtu, jo tām nevar vienlaicīgi abās pusēs izvēlēties pretējo burtu. Tas nozīmē, ka gala stāvoklī noteikti būs viena A ķēde un viena B ķēde (sākumā pie galiem ir šīs divas ķēdes), kuru skaits attiecīgi arī tad nevarēs izmainīties (rindai ir tikai 2 gali). Tā kā visas pārējās ķēdes vienmēr būs ietvertas starp divām pretēju burtu ķēdēm un katrā gājienā to skaits samazinās par 1 katram veidam, tad tiks veikti precīzi 1010 gājieni, lai no sākotnējā stāvokļa ar 1011 katra veida ķēdēm nonāktu beigu stāvoklī ar 1 ķēdi no katra veida.

Pierādīsim, ka Alise var garantēt gala stāvoklī A ķēdi ar vismaz 1011 rūtiņām. Kopumā Alise veiks pusi no gājieniem, kas ir 505 gājieni. Alises stratēģija ir šāda - katrā gājienā viņa izvēlas pirmo B ķēdi no kreisās puses (kur pie rindas gala ir A burts) un nomaina tās burtus uz A. Šādā gadījumā rindas gala A ķēdei klāt tiks pievienota viena B ķēde, kuras garums ir vismaz 1, un viena A ķēde, kas bija aiz B ķēdes, kuras garums arī ir vismaz 1. Tātad gājiena laikā rindas gala A ķēdes garums palielinās par vismaz 2. Alise veiks 505 gājienus - šīs ķēdes garums spēles beigs būs vismaz 1011, kas dod vēlamo.

Atliek pierādīt, ka Bobs var neļaut Alisei iegūt ķēdi, kas garāka par 1011 rūtiņām. Viņš seko tādai pašai stratēģijai kā Alise, pagarinot savu gala ķēdi. Veicot 505 gājienus, viņš arī var garantēt, ka B gala ķēdes garums būs vismaz 1011. Tā kā kopumā ir 2022 rūtiņas, tas nozīmē, ka Alise nevarēs nekādā veidā iegūt A ķēdi, kas garāka par $2022 - 1011 = 1011$ rūtiņām. Apvienojot šo ierobežojumu ar iepriekšējā rindkopā pierādīto, ka Alise var panākt A ķēdi ar garumu 1011, secinām, ka tā ir prasītā atbilde.

Komentārs. Šis uzdevums uzsver vairākas svarīgas detaļas:

- Ievērosim, ka šajā uzdevumā ir svarīgs princips par stratēģiju neatkarību – kad runājam par Alises stratēģiju, tad uztveram, ka viņa spēlē pret patvaļīgu spēlētāju, kura nodomi nav zināmi. Līdzīgi arī ar Boba stratēģiju, lai garantētu 1011 rūtiņas – viņš nespēlē pret Alisi ar izvēlētu stratēģiju, bet gan pret patvaļīgu spēlētāju.
- Šajā uzdevumā ir rinda ar divu veidu rūtiņām, kurām aplūkojām *ķēdes.* Šī ideja par ķēdēm ir parādījusies vairākos IMO vai līdzīga līmeņa olimpiāžu uzdevumos, tādēļ ir vērts to atsevišķi uzsvērt. Ķēdēm parasti ir iespējams analizēt to skaita izmaiņu saplūšanas vai sadalīšanas gadījumā, kas nosaka procesa gājienu skaitu vai ķēžu garumu.
- Šajā uzdevumā arī ir svarīgi atrast lielumus, kas nozīmīgi ietekmē procesu visā tā gaitā – ķēdes, kuras atrodas rindas galos un kuras procesā gaitā arī vienmēr tur būs. Redzam, ka mūsu izveidotā stratēģija pamatā balstās uz to īpašībām.

5.piemērs Uz riņķa līnijas atzīmētas regulāra 99-stūra virsotnes. Ana un Banana spēlē spēli, kurā pirmo gājienu izdara Ana un spēlētāji secīgi mainās gājieniem. Pirmajā gājienā Ana izvēlas kādu no punktiem un nokrāso to sarkanu vai zilu. Visos turpmākajos gājienos spēlētājs izvēlas kādu vēl nenokrāsotu punktu, kas atrodas blakus jau nokrāsotam punktam, un nokrāso to sarkanu vai zilu.
Banana uzvar, ja pēc visu punktu nokrāsošanas eksistē vienādmalu trijstūris, kuram visas virsotnes ir vienā krāsā. Pretējā gadījumā uzvar Ana. Noteikt, kuram spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija.

Atrisinājums. Banana var garantēt sev uzvaru.

Pieņemsim, ka pirmajos 33 gājienos (nepāra gājienus veic Ana, bet pāra - Banana) tika patvaļīgi nokrāsoti secīgi punkti, apzīmējot tos pulksteņrādītāja virzienā $P_1, P_2, \ldots, P_{33}$ un sanumurējot arī tālāk secīgi pārējos punktus. Tad 34.gājienā Banana nokrāso P_{34} tādā pašā krāsā kā P_1. Ja 35.gājienā Ana nokrāso P_{35}, tad nākamajā gājienā Banana nokrāso P_{99} tādā pašā krāsā kā P_{33}. Ja 35.gājienā Ana nokrāso P_{99}, tad nākamajā gājienā Banana nokrāso P_{35} tādā pašā krāsā kā P_2.

Ievērosim, ka punktu trijnieki $P_1P_{34}P_{67}$, $P_2P_{35}P_{68}$ un $P_{99}P_{33}P_{66}$ katrs veido vienādmalu trijstūri. Iepriekš aplūkotajā rindkopā Banana panāca, ka trijstūrim $P_1P_{34}P_{67}$ divi punkti ir vienādā krāsā un vienam no trijstūriem $P_2P_{35}P_{68}$ un $P_{99}P_{33}P_{66}$ arī divi punkti ir vienādā krāsā. Pieņemsim, ka tas ir trijstūris $P_2P_{35}P_{68}$. Līdz ar to, ja Banana garantētu, ka viņa iekrāsos P_{67} vai P_{68}, tas sniegtu uzvaru.

Aplūkojam pirmo brīdi, kad kādam no spēlētājiem ir iespējams iekrāsot vienu no minētajiem diviem punktiem. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka tas ir P_{67}. Ja tajā brīdī ir Bananas gājiens, viņa iekrāso P_{67} tādā pat krāsā kā P_1 un P_{34}, garantējot sev uzvaru. Ja tajā brīdī ir Anas gājiens, viņa var vai nu neiekrāsot P_{67}, nākamajā gājienā atļaujot Bananai garantēt sev uzvaru, vai arī iekrāsot P_{67} pretējā krāsā P_1 krāsai. Taču tad Banana nākamajā gājienā iekrāso P_{68} tādā pat krāsā kā P_2 un P_{35}, arī garantējot sev uzvaru. Pārējos gadījumos Banana rīkojas analoģiski.

Redzams, ka aplūkoti visi iespējamie gadījumi, kā var izvērsties spēle, ja Banana spēlē pēc sevis izvēlētās stratēģijas, un tajos visos viņa var garantēt sev uzvaru.

Komentārs. Reizēm spēļu uzdevumos tiek lietota stratēģija – veikt patvaļīgus derīgus gājienus līdz kādam konkrētam svarīgam brīdim, kurš noteikti tiks saniegts un kurš būtībā nosaka spēles iznākumu. Šajā uzdevumā svarīgais brīdis ir spēlē pa vidu, taču bieži pietiek aplūkot pašu spēles noslēgumu un saprast, kādā situācijā spēlētājs garantē uzvaru vai zaudē, un tad izsecināt, kuram spēlētājam šajā situācijā būs gājiens.

3.4 Pozīciju analīze

Šī metode tiešā veidā olimpiāžu uzdevumos parādās samērā reti, tomēr tas izmantotās idejas ir ievērojami atvieglot spēļu analīzi. Ar pozīciju analīzi ir iespējams vispārināt iepriekšējā komentārā aplūkoto ideju par situācijām, kurās spēle noslēdzas un kāds var garantēt uzvaru, šo secinājumu pārnesot uz visām iespējamajām spēles pozīcijām līdz pat sākumpozīcijai.

Pozīciju analīzes galvenais princips ir, sākot no spēles beigu situācijas, katru pozīciju nosaukt par uzvarošu (W) vai zaudējošu (L) atkarībā no tā, vai spēlētājs, kuram šajā pozīcijā ir jāveic gājiens, var uzvarēt vai zaudēt.

- Ja no kādas pozīcijas ar atļautiem gājieniem var nonākt kaut vienā L pozīcijā, tad šī pozīcija ir W, jo, veicot gājienu uz minēto L pozīciju, nākamais spēlētājs būs pozīcijā, kurā viņš garantēti zaudēs.

- Ja no kādas pozīcijas ar atļautiem gājieniem var nonākt tikai W pozīcijās, tad šī pozīcija ir L, jo, veicot jebkuru gājienu, nākamais spēlētājs būs pozīcijā, kurā viņš garantēti varēs uzvarēt, tādēļ sākotnēji aplūkotajā pozīcijā visas iespējas novedīs pie zaudējuma.

6.piemērs Uz galda ir 2025 konfektes. Divi spēlētāji secīgi veic gājienus. Gājiena laikā spēlētājs drīkst vai nu apēst vienu konfekti, vai arī pusi no uz galda esošajām konfektēm (ja konfekšu skaits ir nepāra, spēlētājs apēd "mazāko" pusi). Zaudē spēlētājs, kurš apēd pēdējo konfekti. Noteikt, kuram spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija.

Atrisinājums. Otrajam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija.

Sākotnēji pierādīsim, ka, ja uz galda atrodas pāra skaits konfekšu, tad tas spēlētājs, kuram ir gājiens, var garantēt savu uzvaru. Pierādījumā izmantosim pozīciju analīzi, apzīmējot pozīciju kā uzvarošu (W) vai zaudējošu (L) atkarībā no tā, vai spēlētājs, kuram jāveic gājiens, var garantēt sev uzvaru (vai pretējā gadījumā otrs spēlētājs varēs garantēt sev uzvaru). Lai to pierādītu, izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

<u>Indukcijas bāze.</u> Ja uz galda atrodas 2 konfektes, tad spēlētājs apēd 1 konfekti, un acīmredzami nākamajā gājienā otrs spēlētājs zaudēs. Tātad 2 ir W pozīcija.

<u>Induktīvais pieņēmums.</u> Pieņemsim, ka naturālam k visas pozīcijas $2i$, kur $1 \leq i \leq k-1$, ir W.

<u>Induktīvā pāreja.</u> Pierādīsim, ka tādā gadījumā arī pozīcija $2k$ ir W. Aplūkosim divus gadījumus.

- Ja k ir zaudējoša (L) pozīcija. Tādā gadījumā spēlētājs apēd pusi no $2k$ konfektēm, nostādot otru spēlētāju L pozīcijā $\implies$ $2k$ ir W pozīcija.
- Ja k ir uzvaroša (W) pozīcija. Tādā gadījumā spēlētājs apēd vienu konfekti, nostādot otru spēlētāju pozīcijā $2k-1$. Ja otrs spēlētājs apēd vienu konfekti, tad pirmais spēlētājs nonāk pozīcijā $2(k-1)$, kas ir W. Savukārt, ja otrs spēlētājs apēd mazāko pusi no konfektēm, kas ir $k-1$, pirmais spēlētājs nonāk pozīcijā k, kas ir W. Līdz ar to neatkarīgi no otra spēlētāja darbībām, pirmais spēlētājs vienmēr varēs nonākt W pozīcijā $\implies$ $2k$ ir W pozīcija un $2k-1$ ir L pozīcija. Induktīvā pāreja ir pierādīta.

Spēlētājam, kurš veic gājienu pozīcijā ar pāra skaitu konfekšu, stratēģija ir skaidra no induktīvās pārejas - izvēlēties vienu no L pozīcijām, kurā nostādīt otru spēlētāju atkarībā no esošā gadījuma. Pēc tam, ja pēc kāda otra spēlētāja gājiena paliek nepāra skaits konfekšu, šim (pirmajam) spēlētājam ir jāapēd mazākā puse, lai joprojām paliktu nepāra skaitā (nedrīkst otram spēlētājam ļaut nonākt pāra pozīcijā). Pierādītā sākotnējās pozīcijas W īpašība tādā veidā garantēs, ka pēc secīgiem gājieniem vai nu spēlētājam atkal būs gājiens pozīcijā ar pāra skaitu konfekšu, vai arī otrs spēlētājs būs spiests apēst vienu atlikušo konfekti.

Tagad aplūkosim spēles gaitu dotajā gadījumā ar 2025 konfektēm. Ja pirmajā gājienā pirmais spēlētājs apēd vienu konfekti un atstāj otrajam 2024, tas ir pāra skaitlis un no iepriekš pierādītā otrais spēlētājs uzvarēs. Ja pirmais spēlētājs apēd mazāko pusi un atstāj 1013 konfektes, tad otrais spēlētājs apēd mazāko pusi un atstāj 507 konfektes. Tālāk, ja pirmais spēlētājs apēd vienu konfekti un atstāj 506 konfektes, otrais spēlētājs uzvarēs. Savukārt, ja pirmais spēlētājs apēdīs mazāko pusi un atstās 254 konfektes, tad arī otrais spēlētājs uzvarēs. Līdz ar to esam aplūkojoši visus iespējamos spēles sākuma gadījumus un secinājuši, ka jebkurā gadījumā otrais spēlētājs varēs spēli novest līdz sev uzvarošai pozīcijai, pierādot viņam uzvarošas stratēģijas eksistenci.

7.piemērs Divi spēlētāji A un B spēlē spēli. Sākotnēji A izvēlas 1000 nepāra pirmskaitļus (starp kuriem var būt arī vienādi). Pēc tam B izvēlas pusi no tiem un uzraksta uz tāfeles. Tad spēlētāji secīgi veic gājienus, A uzsākot spēli. Katrā gājienā spēlētājs izvēlas $n \geq 1$ uzrakstītus pirmskaitļus $p_1, p_2, \ldots, p_n$, izdzēš tos un vietā uz tāfeles uzraksta visus pirmskaitļu reizinātājus skaitlim $p_1 p_2 \cdots p_n - 2$ (ja kāds pirmskaitlis atkārtojas vairākas reizes, tad tik reižu tas tiek uzrakstīts).
Spēlētājs, pēc kura gājiena tāfele paliek tukša, zaudē. Pierādīt, ka eksistē spēlētājs ar uzvarošu stratēģiju, un noteikt šo spēlētāju.
Piezīme. Tā kā skaitlim 1 nav pirmskaitļu reizinātāju, tad atļauts gājiens ir vienkārši izdzēst vienu skaitli 3.

Atrisinājums. Spēlētājam A eksistē uzvaroša stratēģija. Ar N apzīmējam visu uzrakstīto pirmskaitļu reizinājumu. Ievērojam, ka N ir nepāra. Pierādīsim, ka visas pozīcijas, kurās $N \equiv 1 \pmod 4$, ir uzvarošas, bet pozīcijas, kurās $N \equiv 3 \pmod 4$, ir zaudējošas.

Viena gājiena laikā N samazinās par skaitli $2c$, kur c ir visu to uzrakstīto pirmskaitļu reizinājums, kas netika izvēlēti gājiena laikā (ja tādu nav, tad $c = 1$). Tā kā c ir nepāra, jo procesa laikā acīmredzami tiek rakstīti tikai nepāra skaitļi, tad $2c \equiv 2 \pmod 4$. Tas nozīmē, ka ikvienā gājienā N mainās no $N \equiv 1 \pmod 4$ uz $N \equiv 3 \pmod 4$ vai otrādi. Tātad, ja spēlētājs savā pirmajā gājienā bija situācijā, kurā $N \equiv 1 \pmod 4$, tad visās pārējās spēles situācijās tas joprojām izpildīsies; līdzīgi arī var spriest par gadījumu $N \equiv 3 \pmod 4$.

Tā kā vienīgā situācija, kurā tāfele tiek iztukšota, ir gadījums, ja uz tās ir palicis viens skaitlis 3 (visās pārējās kāds skaitlis tiks uzrakstīts vai paliks uz tāfeles), tad zaudēt var tikai spēlētājs, kurš spēles gaitā vienmēr atradās pozīcijās, kur $N \equiv 3 \pmod 4$, tādēļ tās ir zaudējošas pozīcijas, un attiecīgi pozīcijas ar $N \equiv 1 \pmod 4$ ir uzvarošas. Svarīgi arī pieminēt, ka spēle garantēti kādā brīdī beigsies, jo katrā gājienā N strikti samazinās.

Tādēļ A savā pirmajā gājienā var uzrakstīt 1000 skaitļus 5, kur $5^{1000} \equiv 1 \pmod 4$ un garantēt uzvaru ar jebkādiem atļautiem gājieniem.