Procesi un spēles

Ievads. Šajā mājasdarbā Jums tiek piedāvāti 7 uzdevumi, kuri ir sakārtoti grūtību pieaugošā secībā, bet **ne tēmu secībā**, kāda ir materiālā. Viena uzdevuma ietvaros var nākties izmantot teorijas faktus, idejas no vairākām tēmām vienlaikus. Līdz ar to, lai tiktu galā ar uzdevumiem, ir vērts izlasīt visu materiālu. Katrs uzdevums tiek novērtēts ar $0-7$ punktiem. Punkti tiek piešķirti arī par ne līdz galam atrisinātiem uzdevumiem, ja ir iegūti noderīgi rezultāti.

1.uzdevums Doti divi maisi ar bumbām. Pirmajā maisā ir m bumbas, bet otrajā maisā ir n bumbas, kur m un n ir naturāli skaitļi. Atļautas divas dažādas operācijas:

- no abiem maisiem izņemt vienādu skaitu bumbu;
- palielināt bumbu skaitu vienā no maisiem k reizes.

Vai ir iespējams abus maisus iztukšot galīgā operāciju skaitā jebkurām sākotnējām m, n vērtībām, ja

a) $k = 2$;

b) $k = 3$?

2.uzdevums Dots naturāls skaitlis k. Aplūkojam rindu ar $4k$ akmeņiem, no kuriem $2k$ ir sarkani un $2k$ ir zili. Rindas pārveidošanai atļauts veikt gājienus. Vienā gājienā drīkst izvēlēties vienu vai vairākus pēc kārtas blakusesošus sarkanus akmeņus, ko sauksim par *sarkanu akmeņu virkni*, un apmainīt tos vietām ar tāda paša garuma *zilu akmeņu virkni*. Piemēram, rindu $r\underline{bb}br\underline{rr}b$ vienā gājienā var pārveidot par rindu $r\underline{rr}br\underline{bb}b$, kur r ir sarkanie akmeņi un b ir zilie akmeņi.

Noteikt mazāko naturālo skaitli n (atkarībā no k vērtības), ka jebkurai sākotnējai $4k$ akmeņu rindai var ne vairāk kā n gājienos panākt, ka rindā pirmie $2k$ akmeņi ir sarkani.

3.uzdevums Skaitļu rindai ļauts pielietot šādu operāciju: izvēlēties trīs blakusesošus skaitļus a, b, c un samainīt to secību uz b, c, a. Atrast visus naturālus skaitļus $n \geq 3$, kuriem ar galīgu operāciju skaitu var skaitļu rindu $1, 2, \ldots, n$ pārveidot uz $n, n-1, \ldots, 1$.

4.uzdevums Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$. Zemestrīces rezultātā Rīga tika sadalīta n salās. Uz 2 no salām atrodas Instagram ēkas. Sākotnēji starp salām nav tiltu. Džeisons un Edgars spēlē spēli, pamīšus veicot gājienus. Katrā gājienā spēlētājs var uzbūvēt tiltu starp 2 dažādām salām I_1 un I_2, kam izpildās abi nosacījumi:

- I_1 un I_2 nav savienotas ar tiltu;
- vismaz viena no salām I_1 vai I_2 ir tiltu ķēdē savienota ar kādu no 2 salām, uz kuras atrodas Instagram ēka (vai arī uz I_1 vai I_2 atrodas Instagram ēka).

Līdzko spēlētājs uzbūvē tiltu, kas ļauj no vienas Instagram ēkas aiziet uz otru, viņš ir zaudējis, jo Instagram var publicēt visas nozagtās TikTok memes. Ja Džeisons sāk spēli, noteikt katram n spēlētāju, kurš var garantēt uzvaru.

5.uzdevums Uz tāfeles ir uzrakstīti nenegatīvi veseli skaitļi m un n. Ramona un Petr spēlē spēli, pamīšus veicot gājienus. Katrā gājienā ir atļauts nodzēst vienu skaitli uz tāfeles un tā vietā uzrakstīt nenegatīvu veselu skaitli, kas ir mazāks par gājiena laikā nodzēsto skaitli un kas pirms tam ne reizi nav bijis uzrakstīts uz tāfeles. Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena vairs nav iespējams veikt atļautu gājienu. Ja Ramona sāk spēli, kādām m un n vērtībām viņa garantēti var uzvarēt?

6.uzdevums Kastē ir k kārtis. Katrai kārtij vienā pusē ir uzrakstīts skaitlis, bet otrā pusē - burts. Ansis un Adriāns spēlē spēli. Sākumā Ansis paņem visas kārtis, saliek tās rindā un katrai kārtij izvēlas, kuru pusi pagriezt uz augšu. Pēc tam Adriāns katrā gājienā izvēlas kādu kārti un apgriež gan to, gan tai blakusesošās kārtis (tātad vienā gājienā tiek apgrieztas 2 vai 3 kārtis). Spēles ietvaros Adriānam ir ļauts veikt ne vairāk kā k gājienus. Adriāns uzvar, ja pēc viņa veiktajiem gājieniem visas kārtis rindā ir pagrieztas ar skaitli uz augšu, pretējā gadījumā uzvar Ansis.

Noteikt, kurš no spēlētājiem var garantēt uzvaru, ja

a) $k = 2024$;

b) $k = 2025$.

7.uzdevums Konferencē piedalās $2n + 1$ runātāji (n – naturāls skaitlis). Katri divi no tiem ir vai nu draugi, vai svešinieki. Divi apsargi spēlē spēli, pamīšus veicot gājienus. Apsargs, kurš sāk spēli, pirmajā gājienā var izvēlēties jebkuru no konferences runātājiem. Tālāk katrā gājienā spēlētājs izvēlas konferences runātāju, kuru pirms tam nebija izvēlējies neviens no spēlētājiem un kurš ir draugs pēdējam izvēlētajam runātājam (pēdējo izvēlēto runātāju acīmredzami pirms brīža izvēlējās otrs spēlētājs). Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena vairs nav iespējams veikt citu atļautu gājienu. Vai kādam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija neatkarīgi no tā, kādi runātāji savā starpā draudzējas?