Funkcionālvienādojumi

Kims Georgs Pavlovs, Alfrēds Saročinskis, Ilmārs Štolcers

1 Ievads

Šajā materiālā tiks apskatītas funkcionālvienādojumu risināšanas metodes. Šis materiāls ir paredzēts lasītājiem, kuriem ir vismaz minimāla funkcionālvienādojumu risināšanas pieredze. Lasītāji, kuri nav pazīstami ar šo jēdzienu, var iepazīties ar to, izlasot šīs grāmatas 9.-12. lappusi.

2 Apzīmējumi un definīcijas

Pirms iedziļināties funkcionālvienādojumu pasaulē, jāsāk ar teorijas un apzīmējumu sapratšanu.

$f : A \to B$ formāli nozīmē, ka funkcija f ir definēta tikai kopas A vērtībām un var pieņemt tikai tādas vērtības, kas pieder kopai B. Tātad katrā kopas A punktā funkcijai ir viena noteikta vērtība, kuru var atrast starp kopas B vērtībām. Savukārt punktos, kas nepieder kopai A, mēs neko nevaram spriest par funkcijas vērtībām, jo tās *uzvedība* tur nav definēta, tādēļ šos punktus risinājumos izmantot nedrīkst.

Piemēram, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ nozīmē, ka $f(x)$ ir definēta tikai tiem x, kas ir racionāli (līdz ar to eksistē un var noteikt funkcijas vērtības $f(1), f(\frac{1}{2}), f(-\frac{397}{523})$, bet punktos $\pi, \sqrt{3}$ funkcijas vērtība nav definēta un attiecīgi nevar $f(\pi), f(\sqrt{3})$ izmantot risinājumā), kā arī $f(x) > 0$ visām x vērtībām, kurām $f(x)$ ir definēta (ar A^+ tiek apzīmēta kopa, kura ietver sevī visas pozitīvās vērtības, kas pieder kopai A).

Risinājumos bieži tiek izmantotas dažādas vispārīgas funkciju īpašības, kuras var risinājuma gaitā pierādīt meklējamai funkcijai un tad izmantot. Funkcija $f : A \to B$ ir :

1. **pāra** tad un tikai tad, ja $f(x) = f(-x)$ visiem $x \in A$. Piemēram, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kura ir $f(x) = x^2$, ir pāra, jo $f(x) = f(-x) = x^2$. Savukārt funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kura ir $f(x) = x^2 + x$, nav pāra, jo $f(1) = 1^2 + 1 = 2$, taču $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$.

2. **nepāra** tad un tikai tad, ja $f(x) = -f(-x)$ visiem $x \in A$. Piemēram, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kura ir $f(x) = x^3 + 3x$, ir nepāra, jo $-f(-x) = -((-x)^3 - 3x) = x^3 + 3x = f(x)$. Savukārt, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kura ir $f(x) = x^2 + 2x$, nav nepāra, jo $f(1) = 1^2 + 2 = 3$, taču $-f(-1) = -((-1)^2 - 2) = 1$.

   Ievērosim, ka, ja funkcija ir gan pāra, gan nepāra visiem $x \in A$, tad tā ir $f(x) = 0$ visiem $x \in A$. Tas ir tāpēc, ka tādā gadījumā $f(x) = f(-x) = -f(x) \implies 2f(x) = 0 \implies f(x) = 0$.

3. **periodiska** tad un tikai tad, ja eksistē tāds skaitlis $T \in \mathbb{R}$, ka $f(x+T) = f(x)$ visiem $x \in A$. Piemēram, funkcija $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, kura ir $f(x) = \sin x$, ir periodiska, jo $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x = f(x)$ katram reālam skaitlim x. Šīs funkcijas periods ir 2π.

4. **ierobežota** tad un tikai tad, ja eksistē tāds $M \in B$, ka $|f(x)| \leq M$ visiem $x \in A$. Piemēram, aplūkosim funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurai izpildās

   $$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ja } x \text{ ir racionāls} \\ -2, \text{ja } x \text{ ir iracionāls} \end{cases}$$

   Tā ir ierobežota, jo visiem reāliem skaitļiem x ir spēkā $|f(x)| \leq 2$. Savukārt funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurai izpildās

   $$f(x) = \begin{cases} x, \text{ja } x < 0 \\ 1, \text{ja } x \geq 0 \end{cases}$$

   Tā nav ierobežota, jo $|f(x)|$ vērtības varbūt pēc patikas lielas, kad $x \to -\infty$, līdz ar to mēs nevaram atrast tādu konstanti M, ka $|f(x)| \leq M$.

3 Funkcionālvienādojumu risināšanas metodes

Katrā sadaļā tiks aplūkota viena konkrēta metode un tās pielietojumi pāris vieglos uzdevumos.

3.1 Parastās substitūcijas

Risinot funkcionālvienādojumus, doto funkcionālvienādojumu apzīmē ar $P(x, y)$. Piemēram, $P(1, 0)$ nozīmē, ka dotajā funkcionālvienādojumā skaitlis x tika aizvietots ar skaitli 1 un skaitlis y tika aizvietots ar skaitli 0. Visplašāk izmantotas substitūcijas $P(0, 0)$, $P(x, 0)$, $P(0, x)$, $P(1, 1)$, $P(x, 1)$, $P(1, x)$, $P(x, -x)$ u.c. Aplūkojot tās, mūsu mērķis ir noteikt $f(0), f(1)$ vai $f(-1)$, ko mēs varam tālāk izmantot uzdevuma risināšanā. Aplūkosim pāris piemērus.

1.piemērs Atrast visas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības, ar īpašību, ka

$$f(x^2 y) = f(xy) + yf(f(x) + y)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. Aplūkosim $P(0, y)$:

$$f(0) = f(0) + yf(f(0) + y)$$
$$0 = yf(f(0) + y)$$

Mēs gribētu izvēlēties tādu y, lai $f(0) + y = 0$ jeb, citiem vārdiem sakot, $y = -f(0)$. Līdz ar to, ievietojot pēdējā sakarībā $y = -f(0)$, iegūsim, ka:

$$0 = -f(0)f(0) \implies f(0)^2 = 0 \implies f(0) = 0$$

No tā izriet, ka

$$0 = y(f(f(0) + y) = yf(y)$$

Ievērosim, ka $f(y) = 0$, ja $y \neq 0$. Taču $f(0) = 0$, līdz ar to secinām, ka $f(y) = 0$ visiem reāliem skaitļiem y. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

2.piemērs Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības, ar īpašību, ka

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy$$

visiem reāliem skaitļiem x, y.

Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. Aplūkosim $P(0, 0)$

$$f(0)^2 = f(0) \implies f(0) = 0 \quad \text{vai} \quad f(0) = 1$$

Aplūkosim gadījumu, kad $f(0) = 0$, tad no $P(x, 0)$ izriet, ka

$$f(x)f(0) = f(x) + x \cdot 0 \implies f(x) = 0$$

No pārbaudes ievērosim, ka šī funkcija neder. Līdz ar to varam pieņemt, ka $f(0) = 1$.

Substitūcijas $P(x, 0)$ un $P(0, x)$ mums neko nedod - mēs vienkārši iegūsim patiesas vienādības. Padomāsim, kā vēl mēs varam izmantot to, ka zinām vērtību $f(0) = 1$. Mēs varētu izvēlēties tādus x un y, ka $x+y = 0$ jeb, citiem vārdiem sakot, aplūkot $P(x, -x)$:

$$f(x)f(-x) = f(0) - x^2 = 1 - x^2$$

Pēdējā sakarībā ievietosim $x = 1$, lai iegūtu, ka

$$f(1)f(-1) = 1 - 1^2 = 0$$

Tas nozīmē, ka $f(1) = 0$ vai $f(-1) = 0$. Pieņemsim, ka $f(1) = 0$, tad no $P(x, 1)$ izriet, ka:

$$f(x)f(1) = f(x+1) + x \implies f(x+1) = -x$$

Pēdējā sakarība aizvietosim argumentu x ar skaitli $t - 1$, lai iegūtu, ka

$$f(t - 1 + 1) = -(t - 1) \implies f(t) = 1 - t$$

Ja $f(-1) = 0$, tad no $P(x, -1)$ izriet, ka:

$$f(x)f(-1) = f(x-1) - x \implies f(x-1) = x$$

Pēdējā sakarībā aizvietosim argumentu x ar skaitli $t + 1$, lai iegūtu, ka:

$$f(t + 1 - 1) = t + 1 \implies f(t) = t + 1$$

Viegli pārbaudīt, ka abas funkcijas patiešām der.

3.piemērs Dota funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definēta reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības, un visiem reāliem skaitļiem x izpildās:

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1.$$

Atrast visas iespējamās $f(0)$ vērtības (pieņemot, ka eksistē vismaz viena).

Atrisinājums. Ievietojot $x = 1$, iegūsim, ka

$$f(f(1)) = 1^2 - 1 + 1 = 1$$

Ievietojot $x = f(1)$, iegūsim, ka

$$\begin{gathered} f(f(f(1))) = f(1)^2 - f(1) + 1 \\ f(1) = f(1)^2 - f(1) + 1 \\ f(1)^2 - 2f(1) + 1 = 0 \\ (f(1) - 1)^2 = 0 \implies f(1) = 1 \end{gathered}$$

Tagad ievietosim $x = 0$, lai iegūtu, ka

$$f(f(0)) = 0^2 - 0 + 1 = 1$$

Ievietojot $x = f(0)$, iegūsim, ka

$$\begin{gathered} f(f(f(0))) = f(0)^2 - f(0) + 1 \\ f(1) = f(0)^2 - f(0) + 1 \\ f(0)^2 - f(0) = 0 \end{gathered}$$

Varam secināt, ka $f(0) = 0$ vai $f(0) = 1$. Ja $f(0) = 0$, tad ievietosim $x = 0$:

$$f(f(0)) = 0^2 - 0 + 1 \implies f(0) = 1$$

Taču tā ir pretruna ar pieņēmumu. Līdz ar to vienīgā iespējamā vērtība ir $f(0) = 1$, jo uzdevumā dots, ka vismaz viena vērtība eksistē. Formāli būtu jāatrod funkcija, kurai izpildās šis nosacījums un kas apmierina doto vienādojumu, taču šajā uzdevumā nosacījumu dēļ tas nav nepieciešams.

3.2 Mainīgo noīsināšanas triks

Pieņemsim, ka funkcionālvienādojuma kreisā puse satur kaut kādu saskaitāmo formā $f(A(x,y))$, kur $A(x,y)$ ir kaut kāda izteiksme no mainīgajiem x un y, savukārt labā puse satur izteiksmi $f(B(x,y))$, kur $B(x,y)$ ir kaut kāda izteiksme no mainīgajiem x un y. Doma ir atrast tādus x un y, lai $A(x,y) = B(x,y)$, kas ļaus noīsināt mums abus saskaitāmos vienu ar otru. Aplūkosim šo ideju pāris piemēros.

4.piemērs Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības, un visiem reāliem skaitļiem x, y izpildās:

$$f(f(x) + 3y) + 3y = f(x + 4y) + 2f(x).$$

Atrisinājums. Mēs gribam izvēlēties tādus x, y, lai $f(x)+3y = x+4y$. To var panākt, ja $y = f(x)-x$. Tādā gadījumā iegūsim, ka:

$$\begin{gathered}
f(f(x) + 3y) + 3y = f(x + 4y) + 2f(x)\\
f(f(x) + 3f(x) - 3x) + 3(f(x) - x) = f(x + 4f(x) - 4x) + 2f(x)\\
f(4f(x) - 3x) + 3f(x) - 3x = f(4f(x) - 3x) + 2f(x)\\
f(x) = 3x
\end{gathered}$$

Pārbaudīsim, ka šī funkcija patiešām der:

$$\begin{gathered}
f(f(x) + 3y) + 3y = f(x + 4y) + 2f(x)\\
f(3x + 3y) + 3y = 3(x + 4y) + 6x\\
9x + 9y + 3y = 3x + 12y + 6x\\
9x + 12y = 9x + 12y\\
0 = 0.
\end{gathered}$$

5.piemērs Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības, un visiem reāliem skaitļiem x, y izpildās:

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4).$$

Atrisinājums. Mēs gribētu izvēlēties tādus x, y, lai $x^2 + y = x^{27} + 2y$. To var izdarīt, ja ievieto $y = x^2 - x^{27}$. Tādā gadījumā iegūsim, ka:

$$\begin{gathered}
f(x^2 + x^2 - x^{27}) = f(x^{27} + 2(x^2 - x^{27})) + f(x^4)\\
f(2x^2 - x^{27}) = f(2x^2 - x^{27}) + f(x^4)\\
f(x^4) = 0
\end{gathered}$$

Aizvietojot x ar $\sqrt[4]{t}$, kur t ir nenegatīvs skaitlis, iegūsim, ka:

$$f((\sqrt[4]{t})^4) = f(t) = 0$$

katram nenegatīvam skaitlim t.
No otras puses, ievietojot $y = 0$ un ievērojot, ka x^2 un x^4 ir nenegatīvi, iegūsim, ka:

$$\begin{gathered}
f(x^2) = f(x^{27}) + f(x^4)\\
f(x^{27}) = 0
\end{gathered}$$

Aizvietojot x ar $\sqrt[27]{t}$, kur t ir jebkurš reāls skaitlis, iegūsim, ka:

$$f((\sqrt[27]{t})^{27}) = f(t) = 0$$

katram reālam skaitlim t. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija patiešām der.

3.3 Simetrijas izjaukšana

Bieži vien $P(x,y)$ satur saskaitāmos, kas ir simetriski attiecībā pret mainīgajiem x un y, kā arī saskaitāmos, kuri ir asimetriski attiecībā pret x un y. Tādos gadījumus ir vērts apskatīt $P(y,x)$, jo šī substitūcija neizmainīs simetriskos saskaitāmos, bet izmainīs asimetriskos. Salīdzinot iegūto izteiksmi ar $P(x,y)$, varam iegūt noderīgu informāciju.

6.piemērs. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības, un visiem reāliem skaitļiem x, y izpildās:

$$f(x+y) = f(x) + y$$

Atrisinājums. Redzam, ka $P(x,y)$ kreisā puse satur simetrisku saskaitāmo $P(x,y)$, savukārt labā asimetrisku $f(x)+y$. Aplūkosim $P(y,x)$

$$f(y+x) = f(y) + x = f(x) + y \implies f(x) - x = f(y) - y$$

Ievietosim pēdējā iegūtajā sakarībā $y = 0$:

$$f(x) - x = f(0) - 0 \implies f(x) = x + f(0)$$

Tas nozīmē, ka esam ieguvuši, ka ikkatram reālam skaitlim x ir spēkā, ka $f(x) = x + C$, kur C ir reāla konstante. Pārbaudīsim, ka visas šādas funkcijas tiešām der:

$$\begin{gathered} f(x+y) = f(x) + y \\ x + y + C = x + C + y \\ 0 = 0 \end{gathered}$$

Tātad šīs funkcijas tiešām der.

7.piemērs. Ar $\mathbb{Z}$ apzīmēsim veselo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, kurām izpildās

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

visiem veseliem skaitļiem a un b.

Atrisinājums. Ievērosim, ka no $P(a,b)$ labā puse satur $f(f(a+b))$, kas ir simetrisks attiecībā pret a un b, savukārt kreisā puse ir vienāda ar $f(2a) + 2f(b)$, kas ir asimetriska pret a, b. Aplūkosim $P(b,a)$:

$$f(2b) + 2f(a) = f(f(b+a)) = f(2a) + 2f(b)$$

Aplūkosim sakarību $f(2b) + 2f(a) = f(2a) + 2f(b)$ sīkāk. Ievietojot tajā $b = 0$, iegūsim, ka:

$$f(2a) = 2f(a) + f(0) - 2f(0) = 2f(a) - f(0)$$

Ir vērts apskatīt $P(0,b)$:

$$f(0) + 2f(b) = f(f(b))$$

Tas ļauj mums pārrakstīt sākotnējo funkcionālvienādojumu šādā veidā:

$$\begin{gathered} f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) \\ 2f(a) - f(0) + 2f(b) = f(0) + 2f(a+b) \\ f(a) + f(b) - f(0) = f(a+b) \\ f(a) - f(0) + f(b) - f(0) = f(a+b) - f(0) \end{gathered}$$

Ieviesīsim funkciju $g(x) = f(x) - f(0)$, kas arī būs definēta veseliem skaitļiem un pieņems veselas vērtības. Tādā gadījumā esam ieguvuši, ka:

$$g(a) + g(b) = g(a + b)$$

Teorēma. Aplūkosim funkciju $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, kurai visiem racionāliem skaitļiem x un y izpildās

$$f(x) + f(y) = f(x + y),$$

ko sauc par **Košī** vienādojumu. Šī funkcionālvienādojuma vienīgais atrisinājums ir $f(x) = Cx$, kur C ir konstante.

Pierādījums. Ievērosim, ka no $P(0, 0)$ izriet, ka $f(0) + f(0) = f(0) \implies f(0) = 0$. Aplūkojot $P(x, -x)$, varam iegūt, ka:

$$f(x) + f(-x) = f(0) = 0 \implies -f(x) = f(-x)$$

Tas nozīmē, ka funkcija f ir nepāra funkcija.

Aplūkosim $P(1, 1)$, tad iegūsim, ka $f(2) = 2f(1)$. Pierādīsim ar matemātisko indukciju, ka $f(n) = nf(1)$ katram veselam skaitlim. Tā kā funkcija ir nepāra, tad pietiek to pierādīt tikai naturāliem skaitļiem (jo, ja mēs zinām, ka $f(10) = 10f(1)$, tad $f(-10) = -f(10) = -10f(1)$). Indukcijas bāze mums jau ir, tāpēc induktīvajā pieņēmumā pieņemsim, ka $f(k) = kf(1)$. Aplūkosim tādā gadījumā $P(k, 1)$:

$$f(k + 1) = f(k) + f(1) = kf(1) + f(1) = (k + 1)f(1)$$

Tas nozīmē, ka indukcija pārēja ir veikta, līdz ar to katram naturālam skaitlim n ir spēkā, ka $f(n) = nf(1)$.

Līdzīgi arī varam iegūt, ka ikkatram veselam skaitlim k ir spēkā, ka $f(kx) = kf(x)$. Aplūkosim racionālu skaitli $\frac{p}{q}$. Pēdējā sakarībā ievietosim $k = q$ un $x = \frac{p}{q}$, lai iegūtu, ka:

$$f(p) = qf\left(\frac{p}{q}\right) \implies f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)\frac{p}{q}$$

Pēdējais secinājums tika veikts, jo p ir vesels, tātad $f(p) = pf(1)$. Līdz ar to esam pierādījuši, ka visiem racionāliem skaitļiem $f(x) = Cx$, kur $C = f(1)$.

Atgriežoties pie mūsu uzdevuma, tad redzam, ka $\mathbb{Z}$ ir racionālo skaitļu kopas apakškopa, tāpēc funkcija g arī apmierina Košī vienādojumu, kas nozīmē, ka $g(x) = kx$ (skat. teorēmas pierādījuma pirmo daļu, kur tas formāli tiek pierādīts $\mathbb{Z}$). Līdz ar to secinām, ka $f(x) = g(x) + f(0) = kx + c$, kur k un c ir konstantes.

Ievietosim šo funkciju sākotnējā funkcionālvienādojumā, lai noteiktu konstanšu k un c un pieļaujamās vērtības.

$$\begin{aligned}
f(2a) + 2f(b) &= f(f(a + b)) \\
2ka + c + 2kb + 2c &= f(k(a + b) + c) \\
2ka + 2kb + 3c &= k^2(a + b) + kc + c \\
(a + b)(k^2 - 2k) - c(k - 2) &= 0 \\
(k - 2)((a + b)k - c) &= 0
\end{aligned}$$

Redzam, ka vai nu $k = 2$, kas nozīmē, ka $f(x) = 2x + C$, kur C ir patvaļīga vesela konstante, vai arī visiem veseliem skaitļiem a un b ir spēkā, ka $(a + b)k - c = 0$, kas var būt tikai tad, ja $k = c = 0 \implies f(x) = 0$. Pēdējā ievietošana arī strādā kā pārbaude, ka šīs funkcijas der.

4 Sarežģītākas funkcionālvienādojumu rēķināšanas metodes

4.1 Kas ir injektivitāte?

Injektivitāte ir īpašība, kas var izpildīties funkcijai. Funkcija ir injektīva, ja tā katru vērtību no pieļaujamās vērtību kopas pieņem ne vairāk kā vienu reizi (dažas vērtības no vērtību kopas funkcija var arī nepieņemt).

Formulēsim šo īpašību matemātiski. Aplūkosim funkciju $f : A \to B$. Ja visiem skaitļiem $x, y \in A$, kuriem izpildās $f(x) = f(y)$, mēs varam pierādīt, ka tādā gadījumā $x = y$, tad funkcija f ir injektīva. Ja tas tā nebūtu, tad mēs būtu atraduši divus atšķirīgus argumentus, kas pieņem vērtību $c = f(x) = f(y)$, kas ir pretrunā ar to, ka katru vērtību funkcija pieņem ne vairāk kā vienu reizi.

Piemēram, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurai izpildās $f(x) = 3x + 1$, ir injektīva funkcija, jo, ja $f(a) = f(b)$, tad varam iegūt, ka $3a+1 = 3b+1 \implies a = b$. Savukārt funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurai izpildās $f(x) = x^2$, nav injektīva funkcija, jo $f(-1) = (-1)^2 = 1 = f(1)$, taču $-1 \neq 1$.

4.2 Injektivitātes izmantošana

Bieži vien, rēķinot funkcionālvienādojumu, ir noderīgi pierādīt to, ka funkcija ir injektīva. Lai to izdarītu, mēs aplūkojam skaitļus a un b ar īpašību, ka $f(a) = f(b)$, un mūsu mērķis ir pierādīt, ka $a = b$. To var izdarīt, piemēram, aplūkojot $P(x, a), P(x, b)$ vai $P(a, y), P(b, y)$ vai citas līdzīgas substitūcijas.

1.piemērs. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām izpildās

$$f(f(f(x) + y) + y) = x + y + f(y)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka funkcija f ir injektīva. Pieņemsim, ka kaut kādiem diviem reāliem skaitļiem a un b izpildās, ka $f(a) = f(b)$. Aplūkosim $P(a, y)$ un $P(b, y)$:

$$f(f(f(a) + y) + y) = a + y + f(y) \quad (1)$$
$$f(f(f(b) + y) + y) = b + y + f(y) \quad (2)$$

Tā kā $f(a) = f(b)$, tad $f(a) + y = f(b) + y$, līdz ar to:

$$f(f(a) + y) = f(f(b) + y)$$
$$f(f(a) + y) + y = f(f(b) + y) + y$$
$$f(f(f(a) + y) + y) = f(f(f(b) + y) + y).$$

Atņemsim no vienādojuma (1) vienādojumu (2):

$$(f(f(a) + y) + y) - f(f(f(b) + y) + y) = a + y + f(y) - b - y - f(y)$$
$$0 = a - b \implies a = b \implies f \text{ ir injektīva.}$$

Tagad var mēģināt kaut kā pielietot faktu, ka f ir injektīva. Piemēram, var veikt tādu substitūciju, kura padarīs vienādojumu par $f(A(x, y)) = f(B(x, y))$, jo no tā uzreiz varēs secināt, ka $A(x, y) = B(x, y)$. Acīmredzami to var panākt, ja $x + y = 0$ jeb $y = -x$. Apskatām $P(x, -x)$:

$$f(f(f(x) - x) - x) = f(-x)$$

Tā kā funkcija f ir injektīva, tad mēs zinām, ka, ja $f(a) = f(b)$, tad $a = b$. Pēdējā sakarībā, ko esam ieguvuši, $a = f(f(x) - x) - x$ un $b = -x$, līdz ar to secinām, ka

$$f(f(x) - x) - x = -x \implies f(f(x) - x) = 0$$

Pēdējā sakarībā aizvietosim $x = 0$, lai iegūtu, ka $f(f(0)) = 0$. Secinām, ka tādā gadījumā:

$$f(f(0)) = 0 = f(f(x) - x) \implies f(f(0)) = f(f(x) - x)$$

Tā kā funkcija f ir injektīva, tad mēs zinām, ka, ja $f(a) = f(b)$, tad $a = b$. Pēdējā sakarībā, ko esam ieguvuši, $a = f(0)$ un $b = f(x) - x$, līdz ar to secinām, ka:

$$f(x) - x = f(0) \implies f(x) = x + f(0)$$

Ievietosim šo funkciju sākotnējā funkcionālvienādojumā, lai noteiktu konstanti $f(0)$.

$$\begin{gathered} f(f(f(x) + y) + y) = x + y + f(y) \\ f(f(x + f(0) + y) + y) = x + y + y + f(0) \\ f(x + f(0) + y + f(0) + y) = x + 2y + f(0) \\ x + f(0) + y + f(0) + y + f(0) = x + 2y + f(0) \\ 3f(0) = f(0) \\ f(0) = 0 \end{gathered}$$

Tātad uzdevuma vienīgā atbilde ir $f(x) = x$.

Komentārs. Ir vērts visu laiku ņemt vērā, vai kāda no vienādojuma pusēm satur x vai y tikai kā f argumentu, jo tādējādi var uzreiz ļoti viegli pierādīt injektivitāti. Papildus ir vērtīgi pamanīt, ja kāds no mainīgajiem atrodas ārpus visiem f burtiem dotajā izteiksmē, jo tad var samērā viegli iegūt vienādību $a = b$, pielīdzinot izteiksmes.

2.piemērs. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām izpildās

$$f\left(yf(x + y) + f(x)\right) = 4x + 2yf(x + y)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Aplūkosim $P(x, 0)$, lai iegūtu, ka $f(f(x)) = 4x$. Šajā brīdī ir vērts zināt triku, ko tautā dēvē par **trīskāršās involūcijas triku**. Doma ir apskatīties uz lielumu $f(f(f(x)))$ divos dažādos veidos. Ja mēs sakarībā $f(f(x)) = 4x$ aizstāsim x ar $f(x)$, tad iegūsim, ka $f(f(f(x))) = 4f(x)$. No otras puses, ja mēs sakarībā $f(f(x)) = 4x$ paņemsim f no abām pusēm (tā drīkst, jo pēc būtības mēs aplūkojam funkcijas vērtību vienā un tajā pašā punktā, jo izteiksmes ir vienādas), tad iegūsim, ka $f(f(f(x))) = f(4x)$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka

$$4f(x) = f(f(f(x))) = f(4x) \implies 4f(x) = f(4x)$$

Ievietojot pēdējā sakarībā $x = 0$, iegūsim, ka $4f(0) = f(0) \implies 3f(0) = 0 \implies f(0) = 0$.

Tas motivē aplūkot $f(0, y)$, lai attiecīgi vienkāršotu doto izteiksmi un iegūtu, ka $f(yf(y)) = 2yf(y)$. Ievietojot šajā sakarībā $y = 1$ un izmantojot $f(f(x)) = 4x$, iegūsim, ka:

$$4 = f(f(1)) = 2f(1) \implies f(1) = 2$$

Pierādīsim, ka funkcija f ir injektīva. Pieņemsim, ka reāliem skaitļiem a un b ir spēkā, ka $f(a) = f(b)$. Tādā gadījumā iegūsim, ka

$$4a = f(f(a)) = f(f(b)) = 4b \implies a = b$$

Tas nozīmē, ka funkcija f ir injektīva, kas arī bija jāpierāda.

Mums būtu noderīgi izmantot, ka $f(1) = 2$. Līdz ar to pirmā doma būtu aplūkot $P(x, 1)$ un $P(1, x)$, taču mēs varam arī izdarīt tā, lai $f(x + y) = f(1) = 2$. Tad mums jāizvēlas tādi x un y, lai $x + y = 1$, līdz ar to aplūkosim $P(x, 1 - x)$:

$$
\begin{gathered}
f((1-x)f(1) + f(x)) = 4x + 2(1-x)f(1) \\
f(2 - 2x + f(x)) = 4x + 4(1-x) \\
f(2 - 2x + f(x)) = 4 = f(f(1)) \\
f(2 - 2x + f(x)) = f(2) \\
2 - 2x + f(x) = 2 \\
f(x) = 2x
\end{gathered}
$$

Pirmspēdējā rindiņā tika izmantots tas, ka funkcija ir injektīva, jo vienādām funkcijas vērtībām jābūt vienādiem argumentiem. Viegli pārbaudīt, ka funkcija $f(x) = 2x$ katram reālam skaitlim x patiešām der.

Komentārs. Šajā uzdevumā mēs redzējām galveno motivāciju, kādēļ ir vērts pierādīt, ka funkcija ir injektīva – tādā veidā ir iespējams atbrīvoties no f burtiem, kas ieskauj abas vienādojuma puses. Tas ļauj iegūt daudz vieglāk pārveidojamas izteiksmes vai tiešā veidā iegūt identitātes, kas dod uzdevuma atrisinājumu.

4.3 Kas ir sirjektivitāte?

Sirjektivitāte ir īpašība, kas var izpildīties funkcijai. Funkcija ir sirjektīva, ja tā katru vērtību no pieļaujamās vērtību kopas pieņem vismaz vienu reizi.

Formulēsim šo īpašību matemātiski. Aplūkosim funkciju $f : A \to B$. Ja katram skaitlim $b \in B$ mēs varam atrast tādu skaitli $a \in A$, ka $f(a) = b$, tad funkcija f ir sirjektīva.

Piemēram, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurai izpildās $f(x) = 3x + 1$, ir sirjektīva. Pierādīsim to. Katram reālam skaitlim b mums ir jāatrod reāls skaitlis a ar īpašību, ka $f(a) = b$. Ievērosim, ka $a = \frac{b-1}{3}$ apmierina prasīto, jo:

$$f\Big(\frac{b-1}{3}\Big) = 3 \cdot \frac{b-1}{3} + 1 = b - 1 + 1 = b$$

Līdz ar to varam secināt, ka funkcija f ir sirjektīva. Savukārt funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurai izpildās $f(x) = x^2$, nav sirjektīva, jo mēs nevaram atrast tādu reālu skaitli x ar īpašību, ka $f(x) = -1$, jo reāla skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs lielums.

Tālāk šajā materiālā tiks izmantots šāds fakts daudzas reizes bez atsauces uz to.

Noderīgs fakts. Pieņemsim, ka $\alpha \neq 0$ un β ir fiksētas konstantes. Tad mainot skaitli x, mēs varam iegūt, ka skaitlis $\alpha x + \beta$ varam pieņemt jebkuru reālu vērtību (citiem vārdiem sakot funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurai izpildās $f(x) = \alpha x + \beta$, ir sirjektīva).

Pierādījums ir analoģisks tam, kā tika pierādīts, ka funkcija $f(x) = 3x+1$ ir sirjektīva reālos skaitļos. Alternatīvs šīs īpašības formulējums ir, ka, skaitlim x izejot cauri visiem reāliem skaitļiem, skaitlis $\alpha x + \beta$ arī iziet cauri visiem reāliem skaitļiem.

4.4 Sirjektivitātes izmantošana

Par sirjektīvu izteiksmi sauksim izteiksmi, kura var pieņemt visas vērtības savā vērtību apgabalā. Piemēram, $ax + b$ ir sirjektīva izteiksme $\mathbb{R}$ apgabalā. Izteiksme x^2 nav sirjektīva $\mathbb{R}$ apgabalā, bet $\mathbb{R}^+$ apgabalā - ir. Ja uzdevuma rēķināšanas laikā parādās šāda situācija: $f(...) =$ *sirjektīva izteiksme*, tad uzreiz var mierīgi apgalvot, ka funkcija f ir sirjektīva ('...' vietā var atrasties pilnīgi jebkas).

3.piemērs. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām izpildās

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Ievērojam, ka vienādojuma labajā pusē atrodas brīvs loceklis $2x$, kas motivē izdarīt tādu substitūciju, kas padarītu kādu no citiem locekļiem par konstanti, piemēram, $f(f(x)+y)$ par $f(0)$. Aplūkojot $P(x, -f(x))$, iegūstam, ka

$$f(0) = 2x + f(f(-f(x)) - x) \implies f(f(-f(x)) - x) = f(0) - 2x,$$

Ievērosim, ka $f(0) - 2x$ ir sirjektīva izteiksme (jo skaitlim x izejot cauri visiem reāliem skaitļiem, skaitlis $f(0) - 2x$ arī iziet cauri visiem reāliem skaitļiem), līdz ar to secinām, ka funkcija f ir sirjektīva.

Tagad ir zināms, ka f pieņem visas vērtības no $\mathbb{R}$, tajā skaitā arī nulli. Apzīmēsim ar α tādu vērtību, ka $f(\alpha) = 0$. Aplūkosim $P(\alpha, x)$:

$$f(x) = 2\alpha + f(f(x) - \alpha) \implies f(f(x) - \alpha) = f(x) - 2\alpha$$

Apzīmēsim $f(x) - \alpha$ ar z. Tādā gadījumā:

$$f(z) = z - \alpha,$$

Ievērosim, ka $f(z) - \alpha$ ir sirjektīva izteiksme, jo funkcija f ir sirjektīva. Tas nozīmē, ka katram reālam skaitlim z izpildās, ka $f(z) = z - \alpha$. Pārbaudīsim, ka šī funkcija tiešām der

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

$$x + y - 2\alpha = 2x + y - x - 2\alpha$$
$$0 = 0$$

Tātad šī funkcija $f(x) = x - \alpha$ tiešām der jebkurai reālai α vērtībai.

Komentārs. Šajā uzdevumā tika izmantotas divas sirjektivitātes pielietošanas metodes, kuras arī var bieži pielietot citu uzdevumu atrisināšanā. Viena ir argumenta definēšana, pie kura funkcijas vērtība pieņem dažādas "ērtas" vērtības(visbiežāk tās ir 0 vai ± 1), kas ļauj atbrīvoties no nepatīkamiem saskaitāmiem. Otrā ir $f(x)$ vai $f(x) + c$ apzīmēšana ar kādu mainīgo z, kas pieņem visas iespējamas vērtības, ja f ir sirjektīva.

4.piemērs. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām izpildās

$$f(y - f(x)) = f(x) - 2x + f(f(y))$$

visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Ievērosim, ka būtu ērti saīsināt locekļus $f(y - f(x))$ un $f(x)$. To var izdarīt, ja izpildās $y - f(x) = x$ jeb, citiem vārdiem sakot, $y = f(x) + x$. Aplūkosim $P(x, x + f(x))$:

$$f(f(x + f(x)) = 2x$$

Tā kā $2x$ iziet cauri visiem reāliem skaitļiem x, ja x iziet cauri visiem reāliem skaitļiem, tad secinām, ka funkcija f ir sirjektīva. Tas nozīmē, ka eksistē tāds reāls skaitlis α, ka $f(\alpha) = 0$. Aplūkosim $P(\alpha, y)$:

$$\begin{aligned} f(y - f(\alpha)) &= f(\alpha) - 2\alpha + f(f(y)) \\ f(y) &= -2\alpha + f(f(y)) \\ f(f(y)) &= f(y) + 2\alpha \end{aligned}$$

Tā kā funkcija f ir sirjektīva, tad $f(y)$ iziet cauri visiem reāliem skaitļiem, tāpēc apzīmēsim $f(y) = z$:

$$f(z) = z + 2\alpha$$

Ievietojot $z = \alpha$, iegūsim, ka $f(\alpha) = \alpha + 2\alpha \implies \alpha = 0$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka visiem reāliem skaitļiem x ir spēkā, ka $f(x) = x$. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija patiešām der.

5 Uzdevumu risināšanas piemēri

Šajā sadaļā mēs aplūkosim vairākus piemērus no dažādām starptautiskām matemātikas olimpiādēm, kuri katrs satur vairākas iepriekš minētās idejas uzreiz.

1.piemērs. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, kurām izpildās

$$f(a) + f(b) + f(c) = a^2 + b^2 + c^2$$

visiem veseliem skaitļiem a, b, c ar īpašību, ka $a + b + c = 0$.

Atrisinājums. Ar $P(a, b, c)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. Aplūkosim $P(0, 0, 0)$, lai iegūtu, ka $3f(0) = 0 \implies f(0) = 0$. Tagad varam apskatīt $P(a, -a, 0)$, no kurienes izriet, ka:

$$f(a) + f(-a) = 2a^2$$

Tas ļauj mums izteikt $f(-a)$ ar $f(a)$ ērtā veidā. Ievērosim, ka no $P(a + b, -a, -b)$ izriet, ka:

$$\begin{gathered}
f(a + b) + f(-a) + f(-b) = (a + b)^2 + a^2 + b^2 \\
f(a + b) + 2a^2 - f(a) + 2b^2 - f(b) = 2a^2 + 2ab + 2b^2 \\
f(a + b) - 2ab = f(a) + f(b) \\
f(a + b) - (a + b)^2 = f(a) - a^2 + f(b) - b^2
\end{gathered}$$

Iegūtā sakarība motivē mūs ieviest funkciju $g(x) = f(x) - x^2$. Tādā gadījumā esam ieguvuši, ka funkcijai $g(x)$ izpildās īpašība, ka:

$$g(a + b) = g(a) + g(b)$$

Redzams, ka funkcija $g(x)$ apmierina Koši vienādojumu (teorēma sadaļā 3.3). Tā kā $g(x)$ ir definēta veseliem skaitļiem un pieņem veselas vērtības, tad secinām, ka $g(x) = kx$, kur k ir kaut kāda vesela konstante. Līdz ar to $f(x) - x^2 = kx \implies f(x) = x^2 + kx$ katram veselam skaitlim x. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija patiešām der.

Komentārs. Svarīgi atzīmēt, ka ikkatrai substitūcijai, ko mēs veicam, jāapmierina nosacījums $a + b + c = 0$. Ievērosim, ka visas veiktās substitūcijas - $P(0, 0, 0), P(a + b, -a, -b), P(a, -a, 0)$ patiešām apmierina šo nosacījumu. Jāatzīmē, ka, piemēram, substitūciju $P(1, 1, 1)$ mēs nedrīkstētu veikt, jo $1 + 1 + 1 \neq 0$. Izvēlētās substitūcijas tika veiktas ar mērķi ērtā veidā pārveidot jauniegūtās sakarības no iepriekš iegūtā, piemēram, izmantojot to, ka varam pretējiem argumentiem saistīt funkcijas vērtības.

2.piemērs. Ar $\mathbb{R}^+$ apzīmēsim pozitīvo reālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, kurām izpildās

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1)$$

visiem reāliem skaitļiem $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Atrisinājums. Vispirms pielietosim mainīgo noīsināšanas triku. Atradīsim tādus skaitļus x un y, ka $x + f(y) = xy + 1$, kas nozīmē $x = \frac{1-f(y)}{1-y}$. Ievērosim, ka substitūcija $P(\frac{1-f(y)}{1-y}, y)$ ir iespējama tikai tad, ja $\frac{1-f(y)}{1-y} > 0$ un $y \neq 1$. Taču no šīs substitūcijas izriet, ka $y = 1$. Tas nozīmē, ka visiem reāliem skaitļiem $y \neq 1$ ir spēkā, ka $\frac{f(y)-1}{y-1} \leq 0$ (ja būtu kāds reāls skaitlis y_0, kuram šī nevienādība nebūtu patiesa, mēs varētu veikt substitūciju $P(\frac{f(y_0)-1}{y_0-1}, y_0)$, kura dod pretrunu). Līdz ar to $f(y) \leq 1$ visiem $y > 1$ un $f(y) \geq 1$ visiem $y < 1$.

Aplūkosim $P(x, 1)$:

$$f(x + f(1)) = f(x + 1)$$

Patvaļīgam $x > 1$ aizvietosim x ar $x - 1 > 0$ (legāla substitūcija), lai iegūtu, ka

$$f(x + T) = f(x),$$

kur $T = f(1) - 1$. Secinām, ka funkcija ir periodiska ar periodu T, ja $T \neq 0$. Aplūkosim $P(1, y + T)$ un $P(1, y)$, kur $y > 1$, lai iegūtu, ka:

$$\begin{gathered} f(1 + f(y + T)) = (y + T)f(y + T + 1) \\ f(1 + f(y)) = (y + T)f(y + 1) \implies \\ yf(y + 1) = (y + T)f(y + 1) \\ y = y + T \\ T = 0 \end{gathered}$$

Secinām, ka $f(1) - 1 = 0 \implies f(1) = 1$. Ievērosim, ka, ja $y > 1$, tad substitūcija $P(1 - \frac{1}{y}, y)$ ir legāla, no kurienes seko, ka:

$$f(1 - \frac{1}{y} + f(y)) = yf(y)$$

Ja $f(y) > \frac{1}{y}$, tad $1 - \frac{1}{y} + f(y) > 1$. Taču tādā gadījumā $1 > f(1 - \frac{1}{y} + f(y))$, kas nozīmē, ka

$$1 > f(1 - \frac{1}{y} + f(y)) = yf(y) \implies \frac{1}{y} > f(y)$$

Tā ir pretruna. Ja $f(y) < \frac{1}{y}$, tad $1 - \frac{1}{y} + f(y) < 1$. Taču tādā gadījumā $1 < f(1 - \frac{1}{y} + f(y))$, kas nozīmē, ka

$$1 < f(1 - \frac{1}{y} + f(y)) = yf(y) \implies \frac{1}{y} < f(y)$$

Tā ir pretruna, tāpēc secinām, ka $f(y) = \frac{1}{y}$ visiem $y \geq 1$.

Visbeidzot aplūkosim $P(1, y)$:

$$f(1 + f(y)) = yf(y + 1) \implies \frac{1}{1 + f(y)} = \frac{y}{y + 1} \implies f(y) = \frac{1}{y}$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka visiem pozitīviem reāliem skaitļiem y ir spēkā, ka $f(y) = \frac{1}{y}$. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija patiešām der.

Komentārs. Gadījumos, kad esam ieguvuši, ka funkcija f ir periodiska ar periodu, ir vērts salīdzināt savā starpā $P(x, y)$ ar $P(x, y + T)$ vai $P(x + T, y)$, lai varētu iegūtu kaut kādu informāciju par T.

Dīvaini varētu arī šķist, kādēļ risinājumā tika aplūkoti pieņēmumi par to, vai funkcija ir lielāka nekā $\frac{1}{y}$. Tas ir motivēts no **atbildes uzminēšanas**, ko ieteicams veikt uzdevuma sākumā. Bieži vien informācija par to, kādas funkcijas galu galā derēs, ļauj mums izvēlēties virzienu, ko pierādīt. Piemēram, ja uzminētā atbilde ir $f(x) = x + 1$, **nav vērts** censties pierādīt, ka funkcijai jābūt nepāra. Šajā uzdevumā var no vienkāršajām funkcijām ievērot, ka der $f(x) = \frac{1}{x}$, tādēļ šeit rodas ideja pārbaudīt gadījumus, ja vērtības nesakrīt ar šo lielumu.

3.piemērs. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām izpildās

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x + y)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Aplūkojot $P(0, 0)$, iegūstam, ka $f(f(0)^2) = 0$. Aplūkosim kopu $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ jeb visus skaitļus, kuriem attiecīgi funkcijas vērtība ir 0. Mēs zinām, ka $S \neq \emptyset$, jo $f(0)^2 \in S$. Ja kopa S satur tādu reālu skaitli α, ka $\alpha \neq 0$, tad, aplūkojot $P(\alpha, x)$, iegūsim, ka

$$f(\alpha^2) = \alpha f(\alpha + y) \implies f(y + \alpha) = \frac{f(\alpha^2)}{\alpha}$$

Ievērosim, ka, y izejot cauri visiem reāliem skaitļiem, $y+\alpha$ arī iziet cauri visiem reāliem skaitļiem, tāpēc esam ieguvuši, ka $f(x) = C$, kur C ir reāla konstante. Viegli pārbaudīt, ka vienīgā konstantā funkcija, kas der, ir $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem x.

Pretējā gadījumā $S = \{0\}$ jeb, citiem vārdiem sakot, funkcija f ir injektīva punktā 0. Tas nozīmē, ka, ja kaut kādam reālam skaitlim a ir spēkā, ka $f(a) = 0$, tad $a = 0$. Pie reizes varam arī secināt, ka $f(0) = 0$. No $P(x, 0)$ izriet, ka:

$$f(x^2) = xf(x)$$

Šajā brīdī noder zināt šādu triku - ja parādās izteiksmes, kas satur x^2, tad ir vērts aizstāt x ar $-x$, jo tas neizmaina x^2, bet var izmainīt pārējos locekļus. Izmantosim šo ideju. Aizstāsim pēdējā sakarībā x ar $-x$, lai iegūtu, ka:

$$f(x^2) = xf(x) = -xf(-x) \implies -f(x) = f(-x)$$

visiem $x \neq 0$. Taču $f(0) = 0$, tāpēc f ir nepāra funkcija visiem reāliem skaitļiem. Aplūkosim $P(x, -x)$:

$$f(x^2 + f(x)f(-x)) = xf(x - x) \implies f(x^2 - f(x)^2) = 0$$

Tā kā funkcija ir injektīva punktā 0, tad iegūstam, ka $x^2 - f(x)^2 = 0 \implies f(x) = \pm x$.

Šajā brīdī uzdevums **vēl nav** atrisināts. Esam ieguvuši, ka ikvienam reālam skaitlim x ir spēkā, ka $f(x) = x$ vai $f(x) = -x$, bet tas nenozīmē, ka visiem reāliem skaitļiem $f(x) = x$ vai arī visiem reāliem skaitļiem $f(x) = -x$. Līdz ar to mums ir jāpierāda, ka neeksistē funkcija f, kura apmierina uzdevuma nosacījumus un kurai kaut kādiem reāliem skaitļiem $a \neq 0$ un $b \neq 0$ izpildās $f(a) = a$ un $f(b) = -b$. Aplūkosim $P(a, b)$ tādā gadījumā:

$$f(a^2 + f(a)f(b)) = af(a + b) \implies f(a^2 - ab) = af(a + b)$$

Ir jāapskata 2 gadījumi:

- Ja $f(a^2 - ab) = a^2 - ab$, $f(a + b) = a + b$ vai $f(a^2 - ab) = ab - a^2, f(a + b) = -(a + b)$, tad iegūstam, ka $a^2 - ab = a(a + b) \implies 2ab = 0$, kas nozīmē, ka vismaz viens no skaitļiem a un b ir 0.

- Ja $f(a^2 - ab) = -a^2 + ab$, $f(a + b) = a + b$ vai $f(a^2 - ab) = a^2 - ab, f(a + b) = -(a + b)$, tad iegūstam, ka $a^2 - ab = -a(a + b) \implies 2a^2 = 0$, kas nozīmē, ka a ir 0.

Abos gadījumos esam ieguvuši pretrunu. Tas nozīmē, ka visiem reāliem skaitļiem $f(x) = x$ vai visiem reāliem skaitļiem $f(x) = -x$. Viegli pārbaudīt, ka šīs funkcijas patiešām der.

Komentārs. Šajā uzdevumā mums nebija nepieciešams pierādīt, ka funkcija f ir injektīva visur. Mēs aplūkojam gadījumu, kad funkcija f ir injektīva specifiskā punktā - mūsu gadījumā 0 - un, kad tā nav injektīva. Arī daudzos citos uzdevumus šī ideja var būt noderīga (bet ne obligāti jāapskata injektivitāti punktā 0).

4.piemērs. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām izpildās

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Lai vienādojuma labajā pusē iegūtu sirjektīvu izteiksmi, var apskatīties $P(1, x)$:

$$f(f(x) + 1) = x + f(1)$$

Ievērosim, ka $x + f(1)$ ir sirjektīva izteiksme (skaitlim x izejot cauri visiem reāliem skaitļiem, skaitlis $x + f(1)$ arī iziet cauri visiem reāliem skaitļiem), līdz ar to funkcija f ir sirjektīva.

Lai krietni saīsinātu labo vienādojuma pusi, ir ērti apzīmēt ar α tādu vērtību, lai $f(\alpha) = -1$, lai, ievietojot to y vietā, $f(xf(y) + x)$ saīsinātos līdz $f(0)$. Aplūkosim $P(x, \alpha)$:

$$f(0) = \alpha x + f(x) \implies f(x) = -\alpha x + f(0)$$

visiem $x \in \mathbb{R}$. Ērtības pēc apzīmēsim $f(0)$ ar c, sanāk $f(x) = -\alpha x + c$. Tagad ievietosim šo funkciju sākotnējā funkcionālvienādojumā, lai noteiktu konstantes α un c.

$$\begin{aligned} f(xf(y) + x) &= xy + f(x) \\ f(-\alpha xy + cx + x) &= xy - \alpha x + c \\ \alpha^2 xy - \alpha cx - \alpha x + c &= xy - \alpha x + c \end{aligned}$$

Apskatot attiecīgos koeficientus, iegūstam:

$$\begin{cases} xy & : \ \alpha^2 = 1 \\ x & : \ -\alpha(c + 1) = -\alpha \end{cases}$$

Rezultātā iznāk, ka $c = 0$ un $\alpha = \pm 1 \implies f(x) = \pm x$.

Tagad ir jāpierāda, ka neeksistē funkcija f, kura apmierina uzdevuma nosacījumus un kurai kaut kādiem reāliem skaitļiem $a \neq 0$ un $b \neq 0$ izpildās $f(a) = a$ un $f(b) = -b$. Aplūkosim $P(a, b)$ tādā gadījumā:

$$f(af(b) + a) = ab + f(a) \implies f(-ab + a) = ab + a$$

Ir jāapskata 2 gadījumi:

- Ja $f(-ab + a) = -ab + a$, tad iegūstam, ka $-ab + a = ab + a \implies 2ab = 0$, kas nozīmē, ka vismaz viens no skaitļiem a un b ir 0.
- Ja $f(-ab + a) = ab - a$, tad iegūstam, ka $ab - a = ab + a \implies 2a = 0$, kas nozīmē, ka a ir 0.

Abos gadījumos esam ieguvuši pretrunu. Tas nozīmē, ka visiem reāliem skaitļiem $f(x) = x$ vai visiem reāliem skaitļiem $f(x) = -x$. Viegli pārbaudīt, ka šīs funkcijas patiešām der.

5.piemērs Atrast visas funkcijas $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, kurām izpildās

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)\left(f(f(x^2)) + f(f(y^2))\right)$$

visiem $x, y \in (0, \infty)$,

Atrisinājums. Aplūkosim $P(1, 1)$, atceroties, ka funkcijas vērtības ir pozitīvas:

$$f(1)f(f(1)) + f(f(1)) = 2f(1)f(f(1)) \implies f(f(1)) = f(f(1))f(1) \implies f(1) = 1$$

Ievērosim, ka no $P(1, y)$ izriet, ka

$$f(f(y)) + f(y) = f(y) + f(y)f(f(y^2)) \implies f(f(y)) = f(y)f(f(y^2))$$

Savukārt no $P(x, 1)$ varam iegūt, ka

$$xf(x^2) + f(f(x)) = f(x)f(f(x^2)) + f(x) \implies xf(x^2) = f(x)$$

Aizvietosim pēdējā sakarībā x ar $f(x)$, lai iegūtu, ka

$$f(x)f(f(x)^2) = f(f(x)) = f(x)f(f(x^2)) \implies f(f(x)^2) = f(f(x^2))$$

Ja funkcija f **būtu** injektīva, tad no pēdējās sakarības mēs iegūtu, ka $f(x)^2 = f(x^2)$. Tas nozīmētu, ka

$$f(x) = xf(x^2) = xf(x)^2 \implies f(x) = \frac{1}{x}$$

Pierādīsim, ka funkcija f ir injektīva. Aplūkosim $P(x, x)$ un pārveidosim, izmantojot $xf(x^2) = f(x)$:

$$\begin{gathered} xf(x^2)f(f(x)) + f(xf(x)) = 2f(x^2)f(f(x^2)) \\ f(x)f(f(x)) + f(xf(x)) = 2 \cdot \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{f(f(x))}{f(x)} \\ f(x)f(f(x)) + f(xf(x)) = \frac{2f(f(x))}{x} \end{gathered}$$

Pieņemsim, ka reāliem skaitļiem a un b ir spēkā, ka $f(a) = f(b)$. Simetrijas dēļ aplūkosim $P(a, b)$ un $P(b, a)$, lai iegūtu, ka

$$\begin{gathered} af(a^2)f(f(a)) + f(bf(a)) = f(ab)(f(f(a^2)) + f(f(b^2))) = bf(b^2)f(fb)) + f(af(b)) \\ af(a^2)f(f(a)) + f(bf(a) = bf(b^2)f(f(b)) + f(af(b)) \\ f(a)f(f(a)) + f(bf(a)) = f(b)f(f(b)) + f(af(b)) \\ f(bf(a)) = f(af(b)) \\ f(bf(b)) = f(af(a)) \end{gathered}$$

Aplūkosim sakarību, ko mēs ieguvām no $P(x, x)$. Paņemsim, ka $x = a$ un $x = b$ attiecīgi, lai iegūtu, ka:

$$\frac{2f(f(a))}{a} = f(a)f(f(a)) + f(af(a)) = f(b)f(f(b)) + f(bf(b)) = \frac{2f(f(b))}{b}$$

Secinām, ka

$$\frac{2f(f(a))}{a} = \frac{2f(f(b))}{b} \implies a = b.$$

Līdz ar to funkcija f ir injektīva, kas nozīmē, ka uzdevums ir atrisināts. Viegli pārbaudīt, ka funkcija der.

6.piemērs Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām izpildās

$$f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x) + f(2019y),$$

visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Pielietosim mainīgo noīsināšanas triku. Aplūkosim $P(2019, y)$, lai iegūtu, ka:

$$f(2019 + yf(2019)) = f(2019)$$

Ievērosim, ka, ja $f(2019) \neq 0$, tad skaitlim y izejot cauri visiem reāliem skaitļiem, skaitlis $yf(2019)+2019$ arī iziet caur visiem reāliem skaitļiem. Tas nozīmē, ka $f(x) = C$, kur C ir nenulles reāla konstante. Viegli pārbaudīt, ka šī funkciju saime der.

Aplūkosim gadījumu, kad $f(2019) = 0$. No $P(x, 1)$ izriet, ka

$$f(x + f(x)) = f(2019) = 0$$

Ja funkcija f **būtu** injektīva punktā 0 (t.i., ja $f(x) = 0$, tad $x = 2019$), tad mēs iegūtu, ka $x + f(x) = 2019$, kas nozīmē, ka $f(x) = 2019 - x$ katram reālam skaitlim. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija patiešām der.

Tas motivē mums apskatīties kopu $S = \{x \mid f(x) = 0\}$. Ievērosim, ka $2019 \in S$. Mūsu mērķis būs pierādīt, ka $|S| = 1$. Pieņemsim pretējo, ka $|S| \neq 1$, tad eksistē reāls skaitlis $\alpha \neq 2019 \in S$. Aplūkosim $P(\alpha, y)$, lai iegūtu, ka:

$$f(\alpha y) = f(2019y)$$

Apskatīsimies uz $P(\alpha x, y)$

$$\begin{gathered} f(\alpha x + yf(\alpha x)) + f(\alpha xy) = f(\alpha x) + f(2019y) \\ f(\alpha x + yf(2019x)) + f(2019xy) = f(2019x) + f(2019y) \\ f(\alpha x + yf(2019x)) = f(2019x) + f(2019y) - f(2019xy) \end{gathered}$$

No otras puses, no $P(2019x, y)$ varam iegūt, ka

$$\begin{gathered} f(2019x + yf(2019x)) + f(2019xy) = f(2019x) + f(2019y) \\ f(2019x + yf(2019x)) = f(2019x) + f(2019y) - f(2019xy) \end{gathered}$$

Secinām, ka:

$$f(\alpha x + yf(2019x)) = f(2019x + yf(2019x)) = f(\alpha x + yf(2019x) + 2019x - \alpha x)$$

Ja eksistē tāds x_0, ka $f(2019x_0) \neq 0$, tad $\alpha x_0 + yf(2019x_0)$ iziet caur visām reālām vērtībām, skaitlim y ejot cauri visām reālām vērtībām, kas nozīmē, ka

$$f(x) = f(x + 2019x_0 - \alpha x_0)$$

katram reālam skaitlim. Apzīmēsim $T = 2019x_0 - \alpha x_0$. Pieņemsim, ka $x_0 \neq 0$ un $\alpha \neq 2019$, jo tādā gadījumā $T \neq 0$. Mēs zinām, ka ikkatram reālam skaitlim x ir spēkā, ka $f(x + T) = f(x)$. Aplūkosim $P(x + T, y)$:

$$\begin{gathered} f(x + T + yf(x + T)) + f((x + T)y) = f(x + T) + f(2019y) \\ f(x + yf(x)) + f(xy + Ty) = f(x) + f(2019y) \end{gathered}$$

Salīdzinot ar $P(x, y)$ iegūsim, ka

$$f(xy + Ty) = f(xy)$$

Aizstāsim y ar $\frac{\epsilon}{T}$, kur ϵ ir patvaļīgs nenulles skaitlis. Iegūsim, ka

$$f\left(x \cdot \frac{\epsilon}{T} + \epsilon\right) = f\left(x \cdot \frac{\epsilon}{T}\right)$$

Ievērosim, ka $x \cdot \frac{\epsilon}{T}$ iziet cauri visiem reāliem skaitļiem, ja x iziet cauri visiem reāliem skaitļiem, līdz ar to secinām, ka $f(x+\epsilon) = f(x)$. Tas nozīmē, ka funkcija ir periodiska ar pilnīgi patvaļīgu periodu, kas nozīmē, ka funkcija ir konstanta visur, kas acīmredzami der.

Paliek apskatīt ekstrēmos gadījumos, kad iepriekš minētais arguments nestrādā. Ja $\alpha = 2019$, tad esam pierādījuši, ka $|S| = 1$, ko arī gribējām. Ja $x_0 = 0$, tad iegūstam, ka $f(x) = 0$ visiem $x \neq 0$ un $f(0)$ varbūt pilnīgi jebkurš reāls skaitlis. Vingrinājums lasītājam pārbaudīt, ka šī funkcija patiešām der. Pēdējais iespējamais variants, ka tāds x_0 neeksistē, taču tādā gadījumā $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem, kas der.

Apkopojot visus iegūtos rezultātus, secinām, ka uzdevuma nosacījumus apmierina 3 veidu funkcijas:

1. $f(x) = 2019 - x$ katram reālam skaitlim x;
2. $f(x) = C$, kur C ir reāla konstante katram reālam skaitlim;
3. $f(x) = 0$ visiem $x \neq 0$ un $f(0) = C$, kur C ir kaut kāds reāls skaitlis.

Komentārs. Sākotnēji no atrisinājuma varētu šķist, ka daļa no risinājuma soļiem ir diezgan patvaļīgi izdomāti un bez īpašas motivācijas. Tomēr šī uzdevuma risinājums ir labs piemērs tam, kā pie risinājuma nonāk pieredzējis funkcionālvienādojumu risinātājs, aktīvi cenšoties izdomāt turpmākos soļus, kas būtu derīgi risinājumā, un tad meklējot veidus, kā tos realizēt. Daļa no substitūcijām ar, iespējams, netipiskām vērtībām, ir rezultāts daudzām pirms tam veiktām neveiksmīgām substitūcijām, no kurām netika atrasts risinājums, taču kļuva skaidrāks, kas nestrādā un ko citu ir vērts mēģināt.