

**Ievads.** Šajā mājasdarbā Jums tiek piedāvāti 7 uzdevumi, kuri ir sakārtoti grūtību pieaugošā secībā. Katrs uzdevums tiek novērtēts ar 0–7 punktiem. Punkti tiek piešķirti arī par ne līdz galam atrisinātiem uzdevumiem, ja ir iegūti noderīgi rezultāti.

**1.uzdevums** Aplūkosim funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ar īpašību, ka eksistē tāds reāls skaitlis  $t$ , ka  $f(t) \neq 0$  un visiem reāliem skaitļiem  $x$  un  $y$  izpildās

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

- a) Pierādīt, ka  $f(0) = 1$ .
- b) Pierādīt, ka funkcija  $f$  ir pāra funkcija.
- c) Uzrādīt vienu funkcijas piemēru, kas apmierina visas uzdevumā dotās prasības.
- d) Uzrādīt vienu nekonstantas funkcijas piemēru, kas apmierina visas uzdevumā dotās prasības.

**2.uzdevums** Atrast visas funkcijas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem  $x, y$  ir spēkā vienādība:

$$f(xf(y) + y) = f(x^2 + y^2) + f(y).$$

**3.uzdevums** Atrast visas funkcijas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem  $x, y$  ir spēkā vienādība:

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y).$$

**4.uzdevums** Atrast visas funkcijas  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , kas definētas veseliem skaitļiem, pieņem veselas vērtības un kurām visiem veseliem skaitļiem  $x, y$  ir spēkā vienādība:

$$f(-f(x) - f(y)) = 1 - x - y.$$

**5.uzdevums** Atrast visas funkcijas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem  $x, y$  ir spēkā vienādība:

$$f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1.$$

**6.uzdevums** Atrast visas funkcijas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem  $x, y$  ir spēkā vienādība:

$$f(xf(y) + 2y) = f(xy) + xf(y) + f(f(y)).$$

**7.uzdevums** Atrast visas funkcijas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem  $a, b, c$  ar īpašību, ka  $a + f(b) + f(f(c)) = 0$ , ir spēkā vienādība:

$$f(a)^3 + bf(b)^2 + c^2f(c) = 3abc.$$