Funkcionālvienādojumi - atrisinājumi

1.uzdevums. Aplūkosim funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ar īpašību, ka eksistē tāds reāls skaitlis t, ka $f(t) \neq 0$ un visiem reāliem skaitļiem x un y izpildās

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

a) Pierādīt, ka $f(0) = 1$.
b) Pierādīt, ka funkcija f ir pāra funkcija.
c) Uzrādīt vienu funkcijas piemēru, kas apmierina visas uzdevumā dotās prasības.
d) Uzrādīt vienu nekonstantas funkcijas piemēru, kas apmierina visas uzdevumā dotās prasības.

Atrisinājums. **a)** Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. No $P(0, 0)$ izriet, ka

$$\begin{gathered} f(0) + f(0) = 2f(0)f(0) \\ f(0) = f(0)^2 \\ f(0) = 0 \quad \text{vai} \quad f(0) = 1 \end{gathered}$$

Ja $f(0) = 0$, tad no $P(x, x)$ varam secināt, ka

$$\begin{gathered} f(x) + f(x) = 2\left(\frac{x+x}{2}\right)f\left(\frac{x-x}{2}\right) \\ 2f(x) = 2f(x)f(0) \\ 2f(x) = 0 \implies f(x) = 0 \end{gathered}$$

Taču, ja $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem x, tad neeksistē tāds reāls skaitlis t, ka $f(t) \neq 0$, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Līdz ar to $f(0) \neq 0$, kas nozīmē, ka $f(0) = 1$, kas arī bija jāpierāda.

b) Aplūkosim $P(x, y)$ un $P(x, -y)$:

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ f(x) + f(-y) &= 2f\left(\frac{x-y}{2}\right)f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

Atņemot šos vienādojumu, iegūsim, ka

$$f(y) - f(-y) = 0 \implies f(y) = f(-y),$$

kas nozīmē, ka funkcija f ir pāra, kas arī bija jāpierāda.

c) Funkcija $f(x) = 1$ visiem reāliem skaitļiem apmierina uzdevuma prasības. Pirmkārt, eksistē reāls skaitlis t ar īpašību, ka $f(t) \neq 0$, jo $f(2023) = 1$. Otrkārt, tiek apmierināts arī dotais funkcionālvienādojumus, jo

$$\begin{gathered} f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ 1 + 1 = 2 \cdot 1 \cdot 1 \end{gathered}$$

Pēdējā sakarība ir patiesa.

d) Funkcija $f(x) = \cos x$ apmierina uzdevuma prasības. Pirmkārt, eksistē reāls skaitlis t ar īpašību, ka $f(t) \neq 0$, jo $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Mums ir jāpierāda, ka funkcija apmierina doto funkcionālvienādojumu, tas ir:

$$\begin{gathered} f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{gathered}$$

Apzīmēsim $A = \frac{x+y}{2}$ un $B = \frac{x-y}{2}$. Ievērosim, ka $x = A+B$ un $y = A-B$. Līdz ar to mums ir jāpierāda, ka

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos(A)\cos B$$

Izmantojot kosinusu summas un starpības formulu iegūsim, ka:

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B + \cos A \cos B + \sin A \sin B = 2\cos A \cos B$$
$$2\cos A \cos B = 2\cos A \cos B$$

Prasītais ir pierādīts.

2.uzdevums. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem x, y ir spēkā vienādība:

$$f(xf(y) + y) = f(x^2 + y^2) + f(y).$$

Atrisinājums. Aplūkosim $P(0, y)$:

$$f(y) = f(y^2) + f(y) \implies f(y^2) = 0$$

Tas nozīmē, ka funkcija visiem nenegatīviem skaitļiem pieņem vērtību 0. Tas nozīmē, ka $f(x^2+y^2) = 0$. Sākotnējais funkcionālvienādojums kļūst par:

$$f(xf(y) + y) = f(y)$$

Pieņemsim, ka eksistē tāds reāls skaitlis t, ka $f(t) \neq 0$. Tādā gadījumā, aizvietojot y ar t, iegūsim, ka

$$f(xf(t) + t) = f(t)$$

Ievērosim, ka skaitlim x izejot cauri visiem reāliem skaitļiem, skaitlis $xf(t) + t$ arī iziet cauri visiem reāliem skaitļiem. Līdz ar to esam ieguvuši, ka visiem reāliem skaitļiem funkcija pieņem vērtību $f(t)$, kas ir konstante. Līdz ar to secinām, ka $f(x) = C$ visiem reāliem skaitļiem. Noskaidrosim kādas konstantes apmierina doto funkcionālvienādojumu:

$$f(xf(y) + y) = f(x^2 + y^2) + f(y)$$
$$C = C + C$$
$$C = 0$$

Secinām, ka $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem x. Taču tas ir pretrunā ar mūsu pieņēmumu, ka eksistē tāds reāls skaitlis t, ka $f(t) \neq 0$. Tas nozīmē, ka mūsu sākotnējais pieņēmums ir aplams, līdz ar to tāds reāls skaitlis t neeksistē, kas nozīmē, ka $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija patiešām der.

3.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem x, y ir spēkā vienādība:

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y).$$

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. No $P(0, 0)$ izriet, ka $2f(0) = f(0)^2$, kas nozīmē, ka $f(0) = 0$ vai $f(0) = 2$. Aplūkosim vispirms gadījumu $f(0) = 2$. No $P(0, x)$ varam iegūt, ka

$$\begin{gathered} f(0) + f(0) = f(0)f(x) + xf(0) \\ 4 = 2f(x) + 2x \\ f(x) = 2 - x \end{gathered}$$

Pārbaudīsim, ka funkcija $f(x) = 2 - x$ tiešām der.

$$\begin{gathered} f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y) \\ 2 - x^2 + 2 - xy = (2-x)(2-y) + y(2-x) + x(2-x-y) \\ 4 - x^2 - xy = 4 - 2x - 2y + xy + 2y - 2xy + 2x - x^2 - xy \\ 4 - x^2 - xy = 4 - x^2 - xy \end{gathered}$$

Esam ieguvuši patiesu identitāti, līdz ar to funkcija tiešām der.

Aplūkosim gadījumu $f(0) = 0$. No $P(x, 0)$ izriet, ka

$$f(x^2) = xf(x)$$

Šajā sakarībā aizvietosim x ar $-x$, lai iegūtu, ka

$$f(x^2) = xf(x) = -xf(-x) \implies -f(x) = f(-x)$$

visiem $x \neq 0$, taču $f(0) = 0 = -f(0)$, tāpēc $-f(x) = f(-x)$ visiem reāliem skaitļiem x. Aplūkosim $P(x, -x)$:

$$\begin{gathered} f(x^2) + f(-x^2) = f(x)f(-x) - xf(x) \\ f(x^2) - f(x^2) = -f(x)^2 - xf(x) \\ f(x)^2 = -xf(x) \end{gathered}$$

Secinām, ka $f(x) = 0$ vai $f(x) = -x$. Pieņemsim, ka eksistē tādi reāli skaitļi $a, b \neq 0$ ar īpašību, ka $f(a) = -a$ un $f(b) = 0$. Ievērosim, ka no iepriekš iegūtajiem rezultātiem izriet, ka $f(b^2) = bf(b) = 0$. Aplūkosim $P(b, a - b)$

$$\begin{gathered} f(b^2) + f(b(a-b)) = f(b)f(a-b) + (a-b)f(b) + bf(a) \\ f(b(a-b)) = -ab \end{gathered}$$

Aplūkosim iespējamās $f(b(a - b))$ vērtības:

- Ja $f(b(a-b)) = -b(a-b) = b^2 - ab$, tad, tā kā $f(b(a-b)) = -ab$, secinām, ka $b^2 - ab = -ab \implies b^2 = 0 \implies b = 0$. Tas ir pretrunā ar pieņēmum, ka $b \neq 0$.

- Ja $f(b(a - b)) = 0$, tad, tā kā $f(b(a - b)) = -ab$, secinām, ka $0 = -ab$, kas nozīmē, ka kāds no skaitļiem a un b ir vienāds ar 0, kas ir pretrunā ar mūsu pieņēmumu.

Tātad mūsu pieņēmums ir aplams un funkcija nevar vienlaicīgi pieņemt šo divu veidu vērtības, līdz ar to $f(x) = -x$ visiem reāliem x vai $f(x) = 0$ visiem reāliem x. Lasītājam kā vingrinājums paliek pārliecināties, ka šīs funkcijas apmierina uzdevuma nosacījumus.

4.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, kas definētas veseliem skaitļiem, pieņem veselas vērtības un kurām visiem veseliem skaitļiem x, y ir spēkā vienādība:

$$f(-f(x) - f(y)) = 1 - x - y.$$

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. No $P(x, 0)$ izriet, ka

$$f(-f(x) - f(0)) = 1 - x$$

Pierādīsim, ka funkcija f ir injektīva. Pieņemsim, ka kaut kādiem diviem veseliem skaitļiem a un b ir spēkā, ka $f(a) = f(b)$. Tādā gadījumā

$$\begin{aligned} -f(a) - f(0) &= -f(b) - f(0) \\ f(-f(a) - f(0)) &= f(-f(b) - f(0)) \\ 1 - a &= 1 - b \\ a &= b \end{aligned}$$

Tas pierāda to, ka funkcija ir injektīva. Sakarībā $f(-f(x) - f(0)) = 1 - x$ aizvietosim x ar $x + y$, lai iegūtu, ka

$$f(-f(x + y) - f(0)) = 1 - x - y = f(-f(x) - f(y))$$

Izmantosim to, ka funkcija f ir injektīva, lai secinātu, ka

$$\begin{aligned} f(-f(x + y) - f(0)) &= f(-f(x) - f(y)) \\ -f(x + y) - f(0) &= -f(x) - f(y) \\ f(x) + f(y) - f(0) &= f(x + y) \\ f(x) - f(0) + f(y) - f(0) &= f(x + y) - f(0) \end{aligned}$$

Ja mēs ieviešam funkciju $g(x) = f(x) - f(0)$, kas ir definēta veseliem skaitļiem un pieņem veselas vērtības, tad secinām, ka $g(x) + g(y) = g(x + y)$. Tas ir Košī vienādojums veselos skaitļos. No teorijas materiālā iegūtajiem rezultātiem secinām, ka vienīgais atrisinājums ir $g(x) = Cx$, kur C ir fiksēta konstante. Līdz ar to $f(x) = g(x) + f(0) = Cx + f(0)$. Esam ieguvuši, ka funkcija f ir lineāra funkcija $f(x) = kx + b$, kur k un b ir koeficienti. Ievietosim to sākotnējā funkcionālvienādojumā, lai iegūtu k un b vērtības

$$\begin{aligned} f(-f(x) - f(y)) &= 1 - x - y \\ f(-kx - b - ky - b) &= 1 - x - y \\ k(-kx - b - ky - b) + b &= 1 - x - y \\ -k^2(x + y) - 2kb + b &= -(x + y) + 1 \end{aligned}$$

Tā kā šai sakarībai jāizpildās visiem reāliem skaitļiem x un y, tad secinām, ka $-k^2 = -1$ un $b - 2kb = 1$. Tas nozīmē, ka $k = 1$ un $b = -1$ vai arī $k = -1$ un $b = \frac{1}{3}$, kas neder, jo tādā gadījumā $f(0) = \frac{1}{3}$, kas nav vesels skaitlis. Līdz ar to vienīgais atrisinājums ir $f(x) = x - 1$, kuram jau esam parādījuši, ka tas der.

5.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem x, y ir spēkā vienādība:

$$f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1.$$

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. No $P(0, 0)$ izriet, ka

$$f(0) = f(0) + f(0) - 1 \implies f(0) = 1$$

Pielietosim mainīgā noīsināšanās triku - izvēlēsimies tādus x un y, lai $xf(x) + 2y = y$ jeb $y = -xf(x)$. Tas nozīmē, ka mums ir jāaplūko $P(x, -xf(x))$

$$0 = f(x^2) + x - xf(x) - 1 \implies f(x^2) = xf(x) - x + 1$$

No $P(0, x)$ varam iegūt, ka

$$f(2x) = 1 + f(x) + x - 1 \implies f(2x) = x + f(x)$$

Ievērosim, ka tādā gadījumā

$$f(4x) = 2x + f(2x) = 2x + x + f(x) = 3x + f(x)$$

Aizstājot x ar x^2, iegūsim, ka

$$f(4x^2) = 3x^2 + f(x^2) = 3x^2 + xf(x) - x + 1$$

Aplūkosim sakarību $f(x^2) = xf(x) - x + 1$. Aizstāsim x ar $2x$, lai iegūtu, ka

$$f(4x^2) = 2xf(2x) - 2x + 1 = 2x(f(x) + x) - 2x + 1 = 2xf(x) + 2x^2 - 2x + 1$$

Salīdzinot savā starpā iegūtās izteiksmes par $f(4x^2)$, iegūsim, ka

$$\begin{gathered} 3x^2 + xf(x) - x + 1 = f(4x^2) = 2xf(x) + 2x^2 - 2x + 1 \\ x^2 + x = xf(x) \\ x + 1 = f(x) \end{gathered}$$

visiem $x \neq 0$. Taču $f(0) = 1$, tāpēc secinām, ka $f(x) = x + 1$ visiem reāliem skaitļiem x. Atliek pārbaudīt, ka šī funkcija tiešām der

$$\begin{gathered} f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1 \\ f(x(x + 1) + 2y) = x^2 + 1 + y + 1 + x + y - 1 \\ f(x^2 + x + 2y) = x^2 + 1 + 2y + x \\ x^2 + x + 2y + 1 = x^2 + 1 + 2y + x \end{gathered}$$

Secinām, ka šī funkcija apmierina sākotnējo funkcionālvienādojumu.

6.uzdevums Atrast visas funkcijas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem x, y ir spēkā vienādība:

$$f(xf(y)+2y)=f(xy)+xf(y)+f(f(y)).$$

Atrisinājums. Ar $P(x,y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. Aplūkosim $P(0,0)$

$$f(0)=f(0)+f(f(0)) \implies f(f(0))=0$$

Tas nozīmē, ka eksistē tāds reāls skaitlis u ar īpašību, ka $f(u)=0$. Aplūkosim $P(x,u)$

$$\begin{gathered}f(xf(u)+2u)=f(xu)+xf(u)+f(f(u))\\ f(2u)=f(xu)+f(0)\\ f(2u)-f(0)=f(xu)\end{gathered}$$

Ja $u\neq 0$, tad skaitlim x izejot cauri visiem reāliem skaitļiem, skaitlis xu iziet arī cauri visiem reāliem skaitļiem. Tā kā $f(2u)-f(0)$ ir fiksēts skaitlis, tad secinām, ka $f(x)=C$, kur C ir konstante. Noskaidrosim, kādas konstantas funkcijas der

$$\begin{gathered}f(xf(y)+2y)=f(xy)+xf(y)+f(f(y))\\ C=C+Cx+C\\ C(x-1)=0\end{gathered}$$

Tā kā tam ir jāizpildās visiem reāliem skaitļiem x, tad secinām, ka $C=0$. Līdz ar to $f(x)=0$ visiem reāliem skaitļiem.

Ja tāds $u\neq 0$ neeksistē, tad secinām, ka $f(0)=0$ un funkcija ir injektīva punktā 0. No $P(0,y)$ izriet, ka

$$f(2y)=f(f(y))$$

1.apgalvojums. Neeksistē tāds reāls skaitlis $t\neq 0$ ar īpašību, ka $f(t)=t$.
Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka tāds reāls skaitlis t eksistē. Tādā gadījumā

$$f(2t)=f(f(t))=f(t)=t$$

Ievērosim, ka arī to, ka

$$f(4t)=f(f(2t))=f(t)=t$$

Aplūkosim $P(2,t)$, lai iegūtu, ka

$$\begin{gathered}f(2f(t)+2t)=f(2t)+2f(t)+f(f(t))\\ f(4t)=t+2t+f(t)\\ t=t+2t+t\\ t=0\end{gathered}$$

Tas ir pretrunā ar to, ka $t\neq 0$.

2.apgalvojums. Funkcija f ir injektīva.
Pierādījums. Pieņemsim, ka kaut kādiem diviem reāliem skaitļiem $a,b\neq 0$ ir spēkā, ka $f(a)=f(b)$. Pielietosim mainīgā noīsināšanās triku, lai noīsinātu $f(xf(y)+2y)$ un $f(xy)$. Tādā gadījumā mums ir jāizvēlas skaitļi x un y šādā veidā

$$xf(y)+2y=xy \implies x=\frac{2y}{f(y)-y}$$

Atcerēsimies, ka, pirmkārt, funkcija f ir injektīva punktā 0 un, otrkārt, visiem nenulles y ir spēkā, ka $f(y) - y \neq 0$, līdz ar to dalīšana ar $f(y) - y$ ir atļauta. Veiksim substitūciju $P\left(\frac{2y}{f(y)-y}, y\right)$, lai iegūtu, ka

$$\frac{2yf(y)}{f(y) - y} + f(f(y)) = 0 \implies f(f(y)) = \frac{2yf(y)}{y - f(y)}$$

Tā kā $f(a) = f(b) \neq 0$, tad secinām, ka

$$\begin{gathered} f(f(a)) = f(f(b)) \\ \frac{2af(a)}{f(a) - a} = \frac{2bf(b)}{f(b - b)} \\ \frac{a}{f(a) - a} = \frac{b}{f(b) - b} \\ a(f(b) - b) = b(f(a) - a) \\ af(b) - ab = bf(a) - a \\ af(b) = bf(a) \\ (a - b)f(a) = 0 \implies a = b \end{gathered}$$

Tas pierāda to, ka funkcija f ir injektīva.

Atcerēsimies, ka $f(f(y)) = f(2y)$. No injektivitātes izriet, ka $f(y) = 2y$. Pārbaudīsim, ka šī funkcija tiešām der

$$\begin{gathered} f(xf(y) + 2y) = f(xy) + xf(y) + f(f(y)) \\ f(2xy + 2y) = 2xy + 2xy + f(2y) \\ 4xy + 4y = 4xy + 4y \end{gathered}$$

Pēdējā identitāte ir patiesa, līdz ar to šī funkcija patiešām der.

7.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem a, b, c ar īpašību, ka $a + f(b) + f(f(c)) = 0$, ir spēkā vienādība:

$$f(a)^3 + bf(b)^2 + c^2 f(c) = 3abc.$$

Atrisinājums. Lasītājam kā vingrinājums ir pārbaudīt, ka funkcijas $f(x) = 0$, $f(x) = x$ un $f(x) = -x$ apmierina uzdevuma prasības. Pieņemsim, ka eksistē kaut kāds cits atrisinājums f, kas nav nekāds no augstāk minētajiem. Ar $P(a, b, c)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu, kur a, b un c ir tādi skaitļi, kuriem izpildās $a + f(b) + f(f(c)) = 0$. No $P(-f(0) - f(f(0)), 0, 0)$ izriet, ka

$$f(-f(0) - f(f(0)))^3 + 0 + 0 = 0 \implies f(-f(0) - f(f(0))) = 0$$

Savukārt no $P(-f(f(0)), -f(0) - f(f(0)), 0)$ izriet, ka

$$f(-f(f(0)))^3 + (-f(0) - f(f(0))) \cdot 0^2 + 0 = 0 \implies f(-f(f(0))) = 0$$

1. apgalvojums. Ja $f(x_1) = f(x_2) = 0$, tad $x_1 = x_2$.
Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tādi reāli skaitļi x_1 un x_2, ka $f(x_1) = f(x_2) = 0$ un $x_1 \neq x_2$. Tādā gadījumā aplūkosim $P(-f(b) - f(0), b, x_1)$ un $P(-f(b) - f(0), b, x_2)$ $(b \neq 0)$

$$f(-f(b) - f(0))^3 + bf(b)^2 = 3(-f(b) - f(0))bx_1$$
$$f(-f(b) - f(0))^3 + bf(b)^2 = 3(-f(b) - f(0))bx_2$$

Atņemot šos divus vienādojumus, iegūsim, ka

$$3(-f(b) - f(0))b(x_1 - x_2) = 0 \implies f(b) = -f(0)$$

visiem $b \neq 0$. Ja kāds no skaitļiem x_1 vai x_2 ir 0, tad iegūstam, ka $f(0) = 0$, kas nozīmē, ka $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem. Pretējā gadījumā, sakarībā $f(b) = -f(0)$ ievietojot b vietā x_1, iegūsim, ka $0 = f(x_1) = -f(0)$, kas arī nozīmē, ka $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem. Bet tas ir pretrunā ar to, ka f ir kāds cits nekā sākotnējie minētie atrisinājumi, līdz ar to secinām, ka sākotnējais pieņēmums ir aplams, tāpēc $x_1 = x_2$, kas arī bija jāpierāda.

Tagad, ņemot vērā, ka $f(-f(0) - f(f(0))) = 0$ un $f(-f(f(0))) = 0$, varam secināt, ka

$$-f(0) - f(f(0)) = -f(f(0)) \implies f(0) = 0$$

Tātad, ja $f(x) = 0$, tad $x = 0$. Aplūkosim $P(-f(f(c)), 0, c)$ un $P(-f(f(c)), f(c), 0)$, kur $c \neq 0$:

$$f(-f(f(c)))^3 + c^2 f(c) = 0$$
$$f(-f(f(c)))^3 + f(c)f(f(c))^2 = 0$$

Atņemot šos divus vienādojumus iegūsim, ka

$$f(c)(c^2 - f(f(c))) = 0 \implies f(f(c)) = \pm c$$

2. apgalvojums. $f(f(c)) = c$ visiem reāliem skaitļiem c.
Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds reāls skaitlis $x_0 \neq 0$ un $f(f(x_0)) = -x_0$. Apskatot $P(-f(f(x_0)), 0, x_0)$ iznāk, ka

$$f(x_0)^3 + x_0^2 f(x_0) = 0$$
$$f(x_0)^2 + x_0^2 = 0$$

Esam ieguvuši, ka divu reālu skaitļu kvadrātu summa ir vienāda 0, kas nozīmē, ka katrs no saskaitāmajiem ir vienāds ar 0, līdz ar to $x_0 = 0$, kas ir pretruna — apgalvojums pierādīts.

Tagad aplūkosim $P(-f(f(c)), 0, c)$, kur $c \neq 0$, lai iegūtu, ka

$$f(-f(f(c)))^3 + c^2 f(c) = 0 \implies f(-c)^3 + c^2 f(c) = 0 \implies f(-c)^3 = -c^2 f(c)$$

Aizstāsim c ar $-c$ un kāpināsim iegūto vienādību 3. pakāpē, lai iegūtu, ka

$$f(c)^9 = -c^6 f(-c)^3 = c^8 f(c) \implies f(c)^8 = c^8$$

No pēdējās sakarības izriet, ka $f(c) = \pm c$ katram reālam skaitlim c.

3. apgalvojums. Visiem reāliem skaitļiem x ir spēkā, ka $f(x) = x$ vai arī visiem reāliem skaitļiem x ir spēkā, ka $f(x) = -x$.
Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tādi reāli skaitļi a un b, ka $f(a) = a$ un $f(b) = -b$, pie tam $a, b \neq 0$. Atcerēsimies, ka $f(f(b)) = b$, kas padara substitūciju $P(-a-b, a, b)$ atļautu:

$$\begin{gathered} f(-a-b)^3 + a^3 - b^3 = 3ab(-a-b) \\ f(-a-b)^3 = b^3 - a^3 - 3ab(a+b) \end{gathered}$$

Ja $f(-a-b)^3 = (a+b)^3$, tad iegūstam, ka

$$\begin{gathered} a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = b^3 - a^3 - 3ab(a+b) \\ 2a^3 + 6ab(a+b) = 0 \\ a^2 + 3b(a+b) = 0 \\ \left(a + \frac{3}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0 \end{gathered}$$

Tā kā divu kvadrātu summa var būt tikai 0, ja katrs saskaitāmais ir 0, tad secinām, ka $b = 0$, kas ir pretruna.
Ja $f(-a-b)^3 = (-a-b)^3$, tad iegūstam, ka

$$\begin{gathered} -a^3 - 3ab(a+b) - b^3 = b^3 - a^3 - 3ab(a+b) \\ 2b^3 = 0 \\ b = 0 \end{gathered}$$

Esam ieguvuši pretrunu. Līdz ar to secinām, ka vienīgi atrisinājumi ir $f(x) = x$ katram reālam skaitlim un $f(x) = -x$ katram reālam skaitlim, taču tie ir paši atrisinājumi, kas bija minēti sākumā.