Funkcionālvienādojumi

Šī mācību gada pirmajā nodarbībā aplūkojām vienādības un vienādojumus. Ir viegli paskaidrot, kas ir vienādojums: vienādība, kas satur mainīgos, piemēram, $x = 3x + 21$ vai $e^x = \sin(x)$. Vienādojumam var būt viens vai vairāki atrisinājumi; atkarībā no konkrētā vienādojuma veida, atrisināt vienādojumu var būt ļoti viegli vai arī ļoti grūti (atgādināsim, ka atrisināt vienādojumu nozīmē **atrast visus** tā atrisinājumus **un pierādīt**, ka citu atrisinājumu nav).

Tomēr nav retas situācijas, kad risināmā problēma ir krietni vispārīgāka; viena no šādām situācijām ir, kad nezināmi ir nevis atsevišķi mainīgie, bet gan *funkcijas*. Piemēram, uzdevums varētu būt atrast visas tādas funkcijas f, kas ir definētas naturāliem skaitļiem, pieņem naturālas vērtības un visiem naturāliem n un m apmierina vienādību $f(n + m) = f(n) + f(m)$. Atkal, atrisināt šādu uzdevumu nozīmē **atrast visas** šādas funkcijas f un **pierādīt, ka citu nav**.

Minētajā piemērā atrisinājums ir visas funkcijas $f(n) = c \cdot n$, kur c ir patvaļīgs naturāls skaitlis. Viegli pārliecināties, ka šādas funkcijas patiešām atrisina doto problēmu:

1) funkcija $f(n) = cn$ ir definēta naturāliem skaitļiem n;

2) tās vērtības ir naturāli skaitļi (ja vien c ir naturāls, ko mēs arī pieprasām);

3) funkcija apmierina vajadzīgo sakarību:

$$f(n + m) = c \cdot (n + m) = c \cdot n + c \cdot m = f(n) + f(m).$$

Taču nav acīmredzami, kāpēc šādas funkcijas ir vienīgās, t.i., kāpēc neder neviena funkcija, kas nav formā $f(n) = c \cdot n$. Kā pierādīt šo otro daļu – vēlāk redzēsim piemēros.

Vietā gan ir uzsvērt kādu funkcionālvienādojumu īpatnību, kas tos atšķir no citiem vienādojumu veidiem: ļoti palīdz, ja jau sākotnēji izdodas uzminēt, kāds būs atrisinājums (kā iepriekšējā piemērā: funkcijas $f(n) = c \cdot n$), jo tas parasti ļauj nojaust, kādi paņēmieni un pārveidojumi būs jālieto, lai pierādītu, ka citu atrisinājumu nav (vai arī atrastu šos citus atrisinājumus, ja tādi eksistē).

Pamatjēdzieni

Kā jau atzīmējām, viens no pirmajiem jautājumiem ir – kādā kopā funkcija f ir definēta un kādā kopā pieņem vērtības. Tādēļ atgādināsim svarīgākās skaitļu kopas un kā pieņemts īsi pierakstīt "funkcija definēta kopā . . . un pieņem . . . vērtības...".

Kopa ir matemātikas pamatjēdziens, kuru nedefinē. Ar kopu parasti saprot dažādu objektu, elementu, priekšmetu, skaitļu utt. apkopojumu; šīs nodarbības kontekstā mūs interesēs tikai skaitļu kopas, t.i., tādas kopas, kuru elementi ir skaitļi. Uzskata, ka kopa ir uzdota, ja par katru elementu (mūsu gadījumā – skaitli) x var pateikt, vai tas pieder šai kopai, vai arī nepieder.

Ja elements x pieder kopai A, to pieraksta kā $x \in A$. Ja elements x nepieder kopai A, to pieraksta kā $x \notin A$.

Atgādināsim svarīgākās skaitļu kopas:

- Naturālo skaitļu kopa $\mathbb{N}$ – sastāv no skaitļiem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; . . . ;
- Veselo skaitļu kopa $\mathbb{Z}$ – sastāv no naturālajiem skaitļiem, nulles un naturāliem skaitļiem pretējiem skaitļiem: . . . ; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; . . .
- Racionālo skaitļu kopa $\mathbb{Q}$ – sastāv no visiem skaitļiem, kurus var izteikt formā $\frac{k}{n}$, kur k ir vesels skaitlis, bet n ir naturāls skaitlis. Visus racionālos skaitļus var pierakstīt kā galīgus decimāldaļskaitļus vai arī bezgalīgus periodiskus decimāldaļskaitļus (varbūt ar priekšperiodu).

- Reālo skaitļu kopa $\mathbb{R}$ – visplašākā no šajā materiālā apskatītajām kopām; tajā ietilpst gan visi racionālie skaitļi, gan arī visi bezgalīgie neperiodiskie decimāldaļskaitļi.

Svarīgākās kopas

- Naturālo skaitļu kopa $\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\}$;
- Veselo skaitļu kopa $\mathbb{Z} = \{\ldots;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\} = \{-n,\ 0,\ n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- Racionālo skaitļu kopa $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{k}{n} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$;
- Reālo skaitļu kopa $\mathbb{R}$.

Bez šīm kopām lietosim arī dažas citas kopas; piemēram, lai īsi pateiktu "x ir naturāls skaitlis vai nulle", rakstīsim $x \in \mathbb{N}_0$; respektīvi, $\mathbb{N}_0$ definēsim kā kopu, kas satur visus naturālos skaitļus un nulli:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Lai pateiktu "x ir pozitīvs racionāls skaitlis", rakstīsim $x \in \mathbb{Q}_+$, respektīvi, $\mathbb{Q}_+$ definēsim kā kopu, kas satur visus pozitīvos racionālos skaitļus:

$$\mathbb{Q}_+ = \{q \mid q \in \mathbb{Q},\ q > 0\}.$$

Līdzīgi, var lietot apzīmējumu $\mathbb{Q}_{0+}$ visu nenegatīvo racionālo skaitļu kopai:

$$\mathbb{Q}_{0+} = \{q \mid q \in \mathbb{Q},\ q \geq 0\}.$$

Analoģiski lietosim apzīmējumus visu pozitīvo reālo skaitļu kopai:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$$

un visu nenegatīvo reālo skaitļu kopai:

$$\mathbb{R}_{0+} = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}.$$

Citas izmantotās kopas

- Veselo nenegatīvo skaitļu kopa $\mathbb{N}_0 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\} = \{0, n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- Racionālo pozitīvo skaitļu kopa $\mathbb{Q}_+ = \{q \mid q \in \mathbb{Q},\ q > 0\}$;
- Racionālo nenegatīvo skaitļu kopa $\mathbb{Q}_{0+} = \{q \mid q \in \mathbb{Q},\ q \geq 0\}$;
- Reālo pozitīvo skaitļu kopa $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$;
- Reālo nenegatīvo skaitļu kopa $\mathbb{R}_{0+} = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$.

Piezīme: lai arī šie apzīmējumi ir bieži sastopami, tie nav vispārpieņemti un pirms to lietošanas (olimpiādēs vai tml.) tie ir jāpaskaidro!

Pieņemsim, ka ir dotas kopas A un B. Lai īsi pierakstītu, ko nozīmē "funkcija f ir definēta kopas A elementiem un pieņem vērtības kopā B", mēdz rakstīt

$$f : A \to B.$$

Šis pieraksts nozīmē, ka f ir definēta visiem kopas A elementiem, un visi skaitļi $f(a)$, kur $a \in A$, pieder kopai B: $f(a) \in B$.

Piemēram,

- ja $f(x) = x^2$, tad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{0+}$, jo f ir definēta visiem reāliem skaitļiem x un pieņem reālas nenegatīvas vērtības;
- ja $f(x) = \frac{1}{x^2}$, tad $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$, jo f ir definēta visiem nenulles reāliem skaitļiem x (pieraksts $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nozīmē "visi reālie skaitļi izņemot nulli") un pieņem reālas pozitīvas vērtības;
- ja $f(x) = \sqrt{x}$, tad $f : \mathbb{R}_{0+} \to \mathbb{R}_{0+}$, jo f ir definēta nenegatīviem argumentiem un pieņem nenegatīvas vērtības.

Funkcijai $f : A \to B$ jābūt definētai visiem kopas A skaitļiem, taču nav jāpieņem visas vērtības no kopas B; piemēram, ja $f(x) = \sqrt{x}$, tā ir funkcija, kas definēta nenegatīviem skaitļiem un pieņem nenegatīvas vērtības, tāpēc mēs rakstām $f : \mathbb{R}_{0+} \to \mathbb{R}_{0+}$; taču var arī teikt, ka f pieņem reālas vērtības un rakstīt $f : \mathbb{R}_{0+} \to \mathbb{R}$. Šādi tiek "noklusēta" informācija par to, ka f vērtības ir nenegatīvas, taču pieraksts ir korekts. Tomēr nedrīkst rakstīt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jo $f(x) = \sqrt{x}$ nav definēta negatīviem skaitļiem.

Funkcijas definīcijas apgabalu drīkst "sašaurināt"; piemēram, funkcija $f(x) = 3x$ ir definēta visiem reāliem skaitļiem, tādēļ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; taču var arī prasīt tikai to, lai tā būtu definēta naturāliem skaitļiem x; tā kā visiem naturāliem skaitļiem x skaitlis $3x$ arī ir naturāls, tad tādā gadījumā var rakstīt $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Taču, ja tiek apskatīta funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tad nevar runāt piemēram, par $f(1.5)$, jo skaitlim 1.5 funkcija nav definēta (jo pieraksts $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nozīmē, ka f definēta tikai naturāliem skaitļiem. Tas jāievēro pat tad, ja visiem $x \in \mathbb{N}$ izpildās $f(x) = 3x$).

Funkciju īpašības

Lai risinātu funkcionālvienādojumus, ir svarīgi pārzināt būtiskākās funkciju īpašības. Šajā sadaļā atgādināsim daļu no svarīgākajām īpašībām. Jāpiebilst, ka tik un tā paliek nepieminētas vairākas svarīgas īpašības, kas noteiktos uzdevumos ir jāizmanto: tādas kā funkcijas nepārtrauktība, nekustīgie punkti utt.

Pāra un nepāra funkcijas

Pāra un nepāra funkcijas

Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sauc par

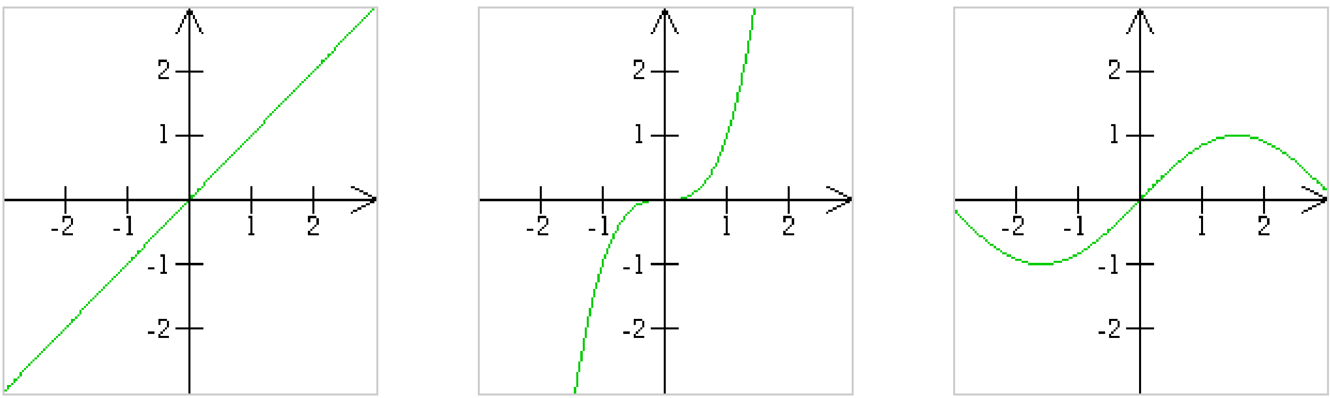
- pāra funkciju, ja visām argumenta vērtībām x izpildās vienādība $f(-x) = f(x)$;
- nepāra funkciju, ja visām argumenta vērtībām x izpildās vienādība $f(-x) = -f(x)$.

Protams, f var būt definēta ne tikai reāliem skaitļiem, bet arī, piemēram, racionāliem skaitļiem vai veseliem skaitļiem; turpretī nav jēgas runāt par pāra vai nepāra funkcijām, kas definētas tikai naturāliem skaitļiem, jo nevienam $n \in \mathbb{N}$ šāda funkcija nav definēta skaitlim $-n$.

Vispārīgi runājot, ja kopa A ir simetriska ap nulles punktu (t.i., ja $x \in A$, tad arī $-x \in A$), piemēram, $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Q}$ vai $A = \mathbb{R}$, tad funkciju $f : A \to B$ sauc par

- pāra funkciju, ja visiem $x \in A$ izpildās vienādība $f(-x) = f(x)$;
- nepāra funkciju, ja visiem $x \in A$ izpildās vienādība $f(-x) = -f(x)$.

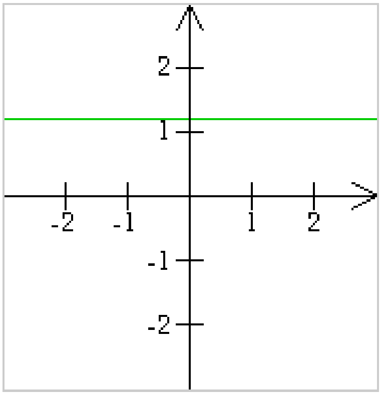
Nepāra funkcijas ir, piemēram, $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$.



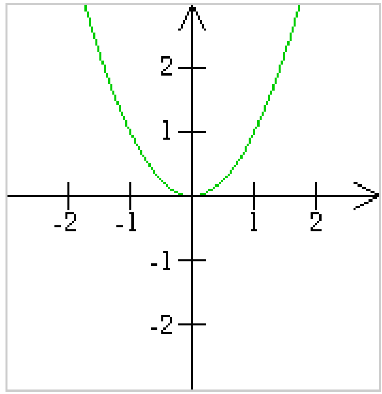
(a) Funkcija $f(x) = x$ (b) Funkcija $f(x) = x^3$ (c) Funkcija $f(x) = \sin(x)$

1. zīm.: Nepāra funkciju piemēri

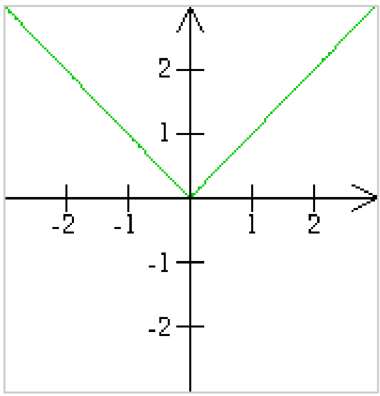
Pāra funkcijas ir, piemēram, $f(x) = c$ (konstantā funkcija), $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \cos x$ utt.



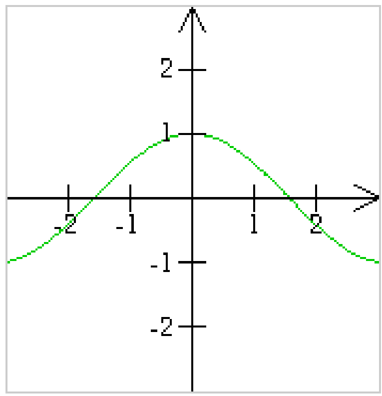
(a) Funkcija $f(x) = 1.3$



(b) Funkcija $f(x) = x^2$



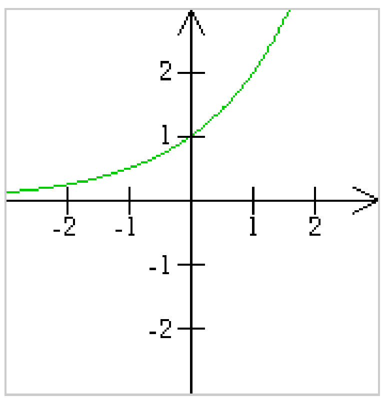
(c) Funkcija $f(x) = |x|$



(d) Funkcija $f(x) = \cos(x)$

2. zīm.: Pāra funkciju piemēri

Turpretī, piemēram, funkcija $f(x) = 2^x$ nav ne pāra, ne nepāra funkcija.



3. zīm.: Ne pāra, ne nepāra funkcija: $f(x) = 2^x$

Pāra un nepāra funkcijas var būt arī tādas, kas definētas veseliem skaitļiem; piemēram, funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, kas definēta ar sakarību $f(k) = (-1)^k \cdot |k|$, ir pāra funkcija (pārbaudīt patstāvīgi!).

Monotonitāte

Saka, ka funkcija ir stingri monotona, ja tā ir augoša vai dilstoša. Funkciju sauc par monotonu, ja tā ir nedilstoša vai neaugoša.

Augošas, dilstošas, nedilstošas un neaugošas funkcijas

Funkciju $f : A \to B$ sauc par

- **augošu** (jeb stingri augošu), ja visām argumenta vērtībām x_1, $x_2 \in A$, kurām $x_1 < x_2$, izpildās nevienādība
$$f(x_1) < f(x_2)$$
(jeb, palielinot argumenta vērtību, palielinās funkcijas vērtība);

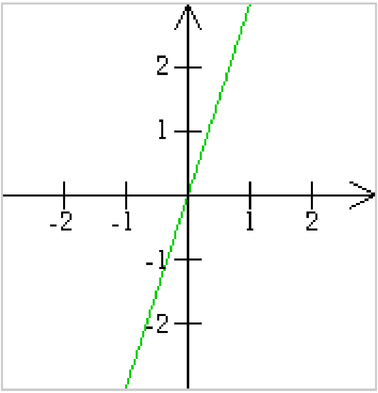
- **dilstošu** (jeb stingri dilstošu), ja visām argumenta vērtībām x_1, $x_2 \in A$, kurām $x_1 < x_2$, izpildās nevienādība
$$f(x_1) > f(x_2)$$
(jeb, palielinot argumenta vērtību, samazinās funkcijas vērtība);

- **nedilstošu**, ja visām argumenta vērtībām x_1, $x_2 \in A$, kurām $x_1 < x_2$, izpildās nevienādība
$$f(x_1) \leq f(x_2)$$
(jeb, palielinot argumenta vērtību, funkcijas vērtība nesamazinās);

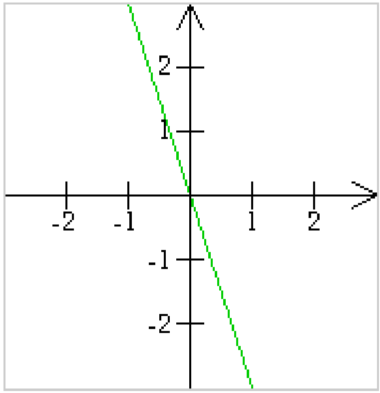
- **neaugošu**, ja visām argumenta vērtībām x_1, $x_2 \in A$, kurām $x_1 < x_2$, izpildās nevienādība
$$f(x_1) \geq f(x_2)$$
(jeb, palielinot argumenta vērtību, funkcijas vērtība nepalielinās).

Piemēram,

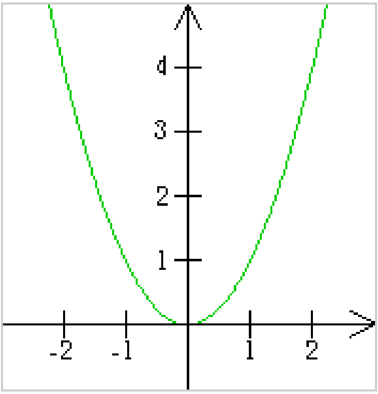
- $f(x) = 3x$ ir augoša funkcija;
- $f(x) = -3x$ ir dilstoša funkcija;
- funkcija $f(x) = x^2$ visā kopā $\mathbb{R}$ nav ne augoša, ne dilstoša; taču tā ir augoša intervālā $[0; +\infty)$ (jeb visiem $x_1, x_2 \in [0; +\infty)$, kuriem $x_1 < x_2$, izpildās $x_1^2 < x_2^2$) un dilstoša intervālā $(-\infty; 0]$ (jeb visiem $x_1, x_2 \in (-\infty; 0]$, kuriem $x_1 < x_2$, izpildās $x_1^2 > x_2^2$).
- Funkcija $f(x) = \sin(x)$ visā kopā $\mathbb{R}$ nav ne augoša, ne dilstoša; taču tā ir augoša, piemēram, intervālā $[0; \frac{\pi}{2}]$, t.i., visiem $x_1, x_2 \in [0; \frac{\pi}{2}]$, kuriem $x_1 < x_2$, izpildās $\sin(x_1) < \sin(x_2)$.



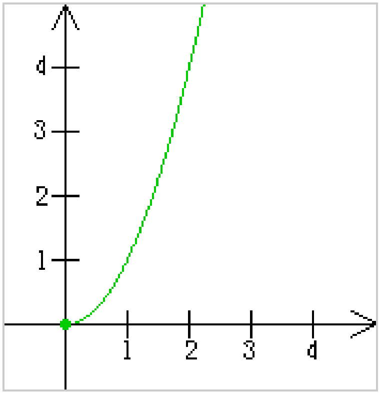
(a) Funkcija $f(x) = 3x$: augoša



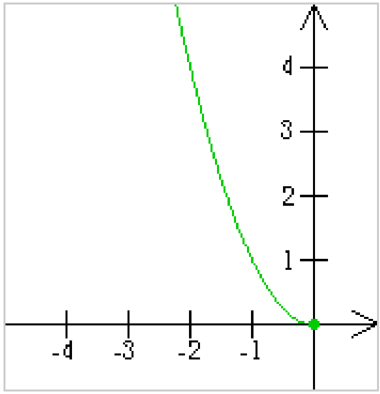
(b) Funkcija $f(x) = -3x$: dilstoša



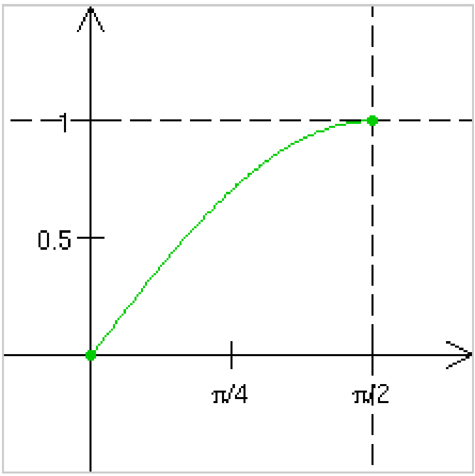
(c) Funkcija $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$: ne augoša, ne dilstoša



(d) Funkcija $f(x) = x^2$, $x \in [0; +\infty)$: augoša



(e) Funkcija $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$: dilstoša



(f) Funkcija $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$: augoša

4. zīm.: Augošu un dilstošu funkciju piemēri

Ierobežotība

Vienkārši runājot, funkciju sauc par ierobežotu, ja tās vērtības nevar būt ļoti lielas vai ļoti mazas. Precīzāk šo principu noformulē definīcija:

Ierobežota funkcija

Funkciju $f : A \to B$ sauc par ierobežotu, ja eksistē tāda konstante $C > 0$, ka visiem argumentiem $x \in A$ izpildās

$$|f(x)| \leq C$$

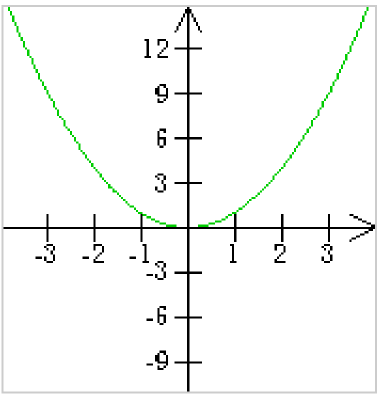
jeb

$$-C \leq f(x) \leq C,$$

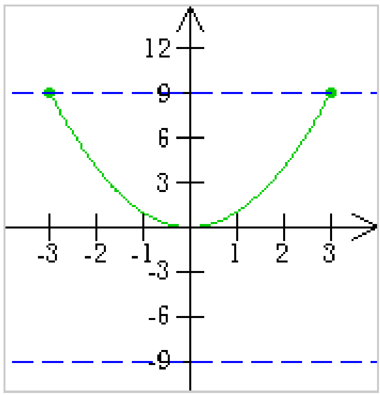
t.i., funkcijas vērtības pēc moduļa nepārsniedz C.

Piemēram,

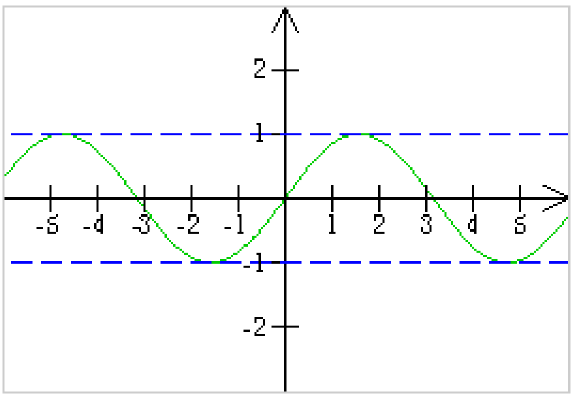
- funkcija $f(x) = x^2$ nav ierobežota, ja to apskata kā funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; taču, ja x pieder kādam ierobežotam intervālam, piemēram, $x \in [-3; 3]$, tad funkcija $f : [-3; 3] \to \mathbb{R}$, kas definēta ar sakarību $f(x) = x^2$, ir ierobežota (jo funkcijas vērtības pieder intervālam $[0; 9]$, līdz ar to var ņemt $C = 9$);
- funkcija $f(x) = \sin(x)$ ir ierobežota, jo visiem $x \in \mathbb{R}$ izpildās $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.



(a) Funkcija $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$: neierobežota



(b) Funkcija $f(x) = x^2$, $x \in [-3; 3]$: ierobežota



(c) Funkcija $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$: ierobežota

5. zīm.: Ierobežotu un neierobežotu funkciju piemēri

Injekcijas, sirjekcijas un bijekcijas

Kā vienas no abstraktākajām, bet arī nozīmīgākajām īpašībām ir tas, vai funkcija ir injekcija, sirjekcija vai bijekcija (vai arī neviena no minētajām). Būtība ir ļoti vienkārša: ja dažādām argumenta vērtībām atbilst dažādas funkcijas vērtības, tad funkcija ir injekcija. Ja funkcija $f : A \to B$ pieņem katru vērtību no kopas B (katram $y \in B$ eksistē tāds $x \in A$, ka $f(x) = y$), tad funkcija ir sirjekcija. Ja funkcija $f : A \to B$ ir gan injekcija, gan sirjekcija, tad to sauc par bijekciju (tādā gadījumā funkcija f katram kopas A elementam piekārto tieši vienu kopas B elementu un otrādi: katram B elementam atbilst tieši viens kopas A elements).

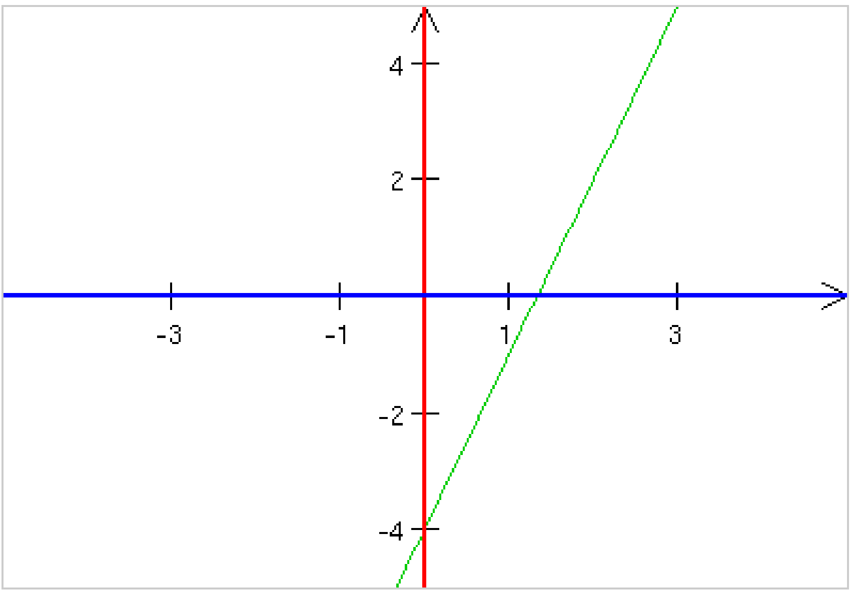
Injekcijas, sirjekcijas un bijekcijas

Funkciju $f : A \to B$ sauc par

- injekciju, ja visiem $x_1, x_2 \in A$, kam $x_1 \neq x_2$, izpildās $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- sirjekciju, ja visiem $y \in B$ eksistē tāds $x \in A$, ka $f(x) = y$.
- bijekciju, ja f ir gan injekcija, gan sirjekcija.

Piemēram,

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, ir bijekcija. Vēl jo vairāk, ja $a \neq 0$, tad jebkura funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definēta kā $f(x) = ax + b$, ir bijekcija.

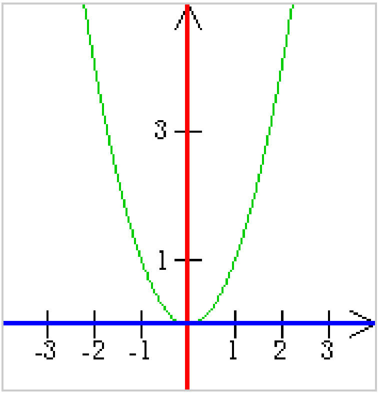


6. zīm.: Ja $a \neq 0$, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definēta ar $f(x) = ax + b$, ir bijekcija

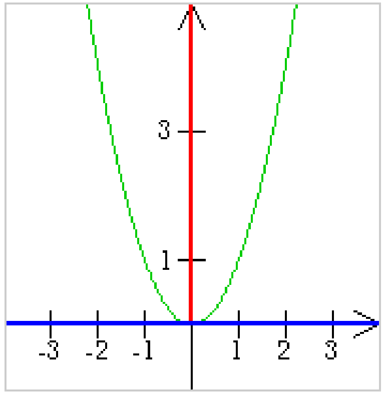
Piezīme: šajā un abos nākamajos zīmējumos ar zilu iezīmēta funkcijas $f : A \to B$ definīcijas kopa A, bet ar sarkanu krāsu – kopa B.

Piemēram,

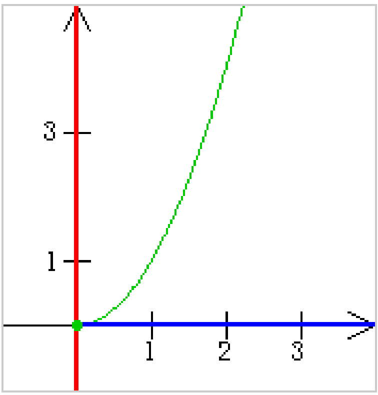
- Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kas definēta kā $f(x)=x^2$, nav ne injekcija $\big($jo, piemēram, $f(1)=f(-1)$, bet $1\neq -1\big)$, ne sirjekcija $\big($jo $\mathbb{R}$ satur arī negatīvos skaitļus, bet nevienam argumentam $x\in\mathbb{R}$ izteiksmes x^2 vērtība nav negatīva$\big)$.
- Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{0+}$, kas definēta kā $f(x)=x^2$, nav injekcija, taču ir sirjekcija.
- Funkcija $f:\mathbb{R}_{0+}\to\mathbb{R}$, kas definēta kā $f(x)=x^2$, ir injekcija $\big($ja $x,y\geq 0$ un $x\neq y$, tad $x^2\neq y^2\big)$, taču nav sirjekcija.
- Funkcija $f:\mathbb{R}_{0+}\to\mathbb{R}_{0+}$, kas definēta kā $f(x)=x^2$, ir gan injekcija, gan sirjekcija $\big($respektīvi, tā ir bijekcija$\big)$.



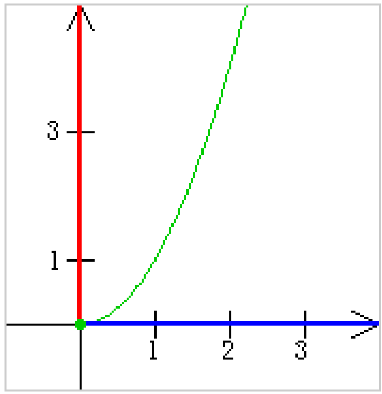
(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$:
ne injekcija, ne sirjekcija



(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{0+}$, $f(x)=x^2$:
nav injekcija, bet ir sirjekcija



(c) $f:\mathbb{R}_{0+}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$:
ir injekcija, bet ne sirjekcija

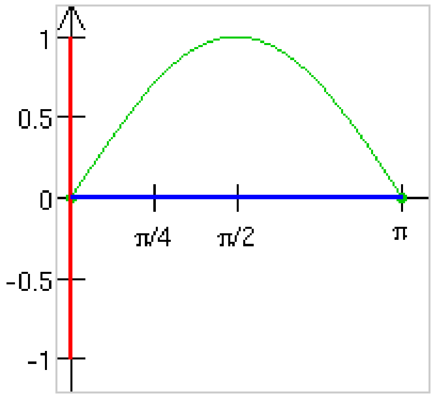


(d) $f:\mathbb{R}_{0+}\to\mathbb{R}_{0+}$, $f(x)=x^2$: bijekcija

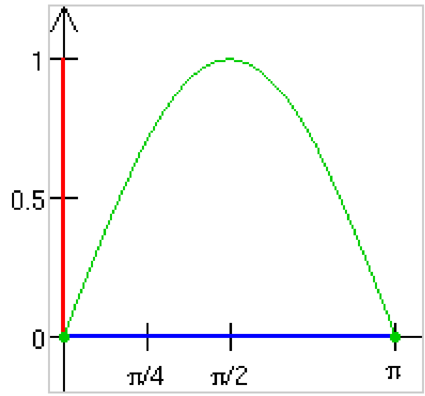
7. zīm.: Injekciju / sirjekciju / bijekciju piemēri

Piemēram,

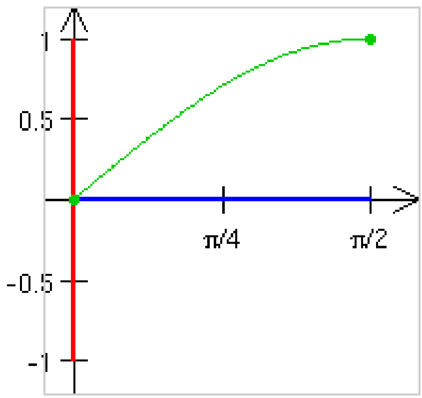
- Funkcija $f : [0; \pi] \to [-1; 1]$, kas definēta kā $f(x) = \sin(x)$, nav ne sirjekcija, ne injekcija.
- Funkcija $f : [0; \pi] \to [0; 1]$, kas definēta kā $f(x) = \sin(x)$, ir sirjekcija, bet ne injekcija.
- Funkcija $f : [0; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$, kas definēta kā $f(x) = \sin(x)$, ir injekcija, bet ne sirjekcija.
- Funkcija $f : [0; \frac{\pi}{2}] \to [0; 1]$, kas definēta kā $f(x) = \sin(x)$, ir gan injekcija, gan sirjekcija (resp., tā ir bijekcija).



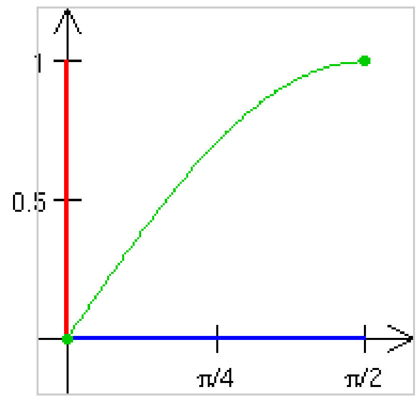
(a) $f : [0; \pi] \to [-1; 1]$, $f(x) = \sin(x)$: ne injekcija, ne sirjekcija



(b) $f : [0; \pi] \to [0; 1]$, $f(x) = \sin(x)$: nav injekcija, bet ir sirjekcija



(c) $f : [0; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$, $f(x) = \sin(x)$: ir injekcija, bet ne sirjekcija



(d) $f : [0; \frac{\pi}{2}] \to [0; 1]$, $f(x) = \sin(x)$: bijekcija

8. zīm.: Injekciju / sirjekciju / bijekciju piemēri

Tipiskākie funkcionālvienādojumu risināšanas paņēmieni

Ievietošanas paņēmiens

Visbiežāk lietotais paņēmiens, kā iegūt kādu informāciju no dotā funkcionālvienādojuma: ievietot dotajā sakarībā nezināmā argumenta vietā konkrētas vērtības; piemēram, x vietā ievietot $x=0$, $x=1$ vai $x=-1$; tālāk (ja tas ir iespējams), mēģināt padarīt kādu dotā vienādojuma daļu par konstantu lielumu. Piemēram, ja dotajā vienādojumā parādās izteiksme $f(x+y)$ un mēs esam atraduši $f(0)$ vērtību, ir vērts paskatīties, kāda sakarība tiek iegūta, ņemot $y=-x$.

1. piemērs. Atrast visas funkcijas $f(x)$, kas definētas reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības $\left(\text{t.i., } f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\right)$, tādas, ka visiem reāliem x un y izpildās vienādība

$$f\left(f(x)+3y\right)+3y=f(x+4y)+2f(x).$$

Risinājums.

Mērķtiecīgi izvēlamies tādu y, lai saīsinātos locekļi $f\left(f(x)+3y\right)$ un $f(x+4y)$; t.i., izvēlas tādu y, lai

$$f(x)+3y=x+4y.$$

Tātad ņem $y=f(x)-x$. Ievietojot šo y vērtību dotajā vienādībā, iegūstam

$$f\left(f(x)+3f(x)-3x\right)+3f(x)-3x=f\left(x+4f(x)-4x\right)+2f(x)$$

jeb

$$3f(x)-3x=2f(x),$$

no kurienes seko, ka $f(x)=3x$.

Atliek pārbaudīt, ka funkcija $f(x)=3x$ patiešām apmierina doto funkcionālvienādojumu:

$$\begin{aligned}&f\left(3x+3y\right)+3y=3\left(x+4y\right)+2\left(3x\right),\\&3\left(3x+3y\right)+3y=3x+12y+6x,\\&9x+12y=9x+12y.\end{aligned}$$

Tātad $f(x)=3x$ ir vienīgais dotās problēmas atrisinājums.

2. piemērs. Funkcija f definēta veseliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības $\left(f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}\right)$. Zināms, ka visiem veseliem skaitļiem m un n ir spēkā vienādība

$$f(m+n)+f(m-n)=f(3m).$$

Atrast visas šādas funkcijas f un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.

Risinājums.

1) Ievietojot dotajā vienādībā $m=n=0$, iegūstam $f(0)+f(0)=f(0)$. Tātad $f(0)=0$.

2) Ievietojot dotajā vienādībā $m=n$, iegūstam $f(2m)+f(0)=f(3m)$. Tā kā $f(0)=0$, tad visiem veseliem m izpildās vienādība $f(2m)=f(3m)$.

3) Ievietojot dotajā vienādībā $m=3n$, iegūstam $f(4n)+f(2n)=f(9n)$. No iepriekšējā punkta seko

$$f(3\cdot 3n)=f(2\cdot 3n)=f(3\cdot 2n)=f(2\cdot 2n)=f(4n).$$

Tātad $f(4n)+f(2n)=f(4n)$ jeb $f(2n)=0$, visiem veseliem n. No iepriekšējā punkta seko, ka tad arī $f(3n)=f(2n)=0$, visiem veseliem n.

4) Visbeidzot, parādīsim, ka visiem veseliem m izpildās $f(m)=0$. Ņem $n=0$, iegūstot vienādību $f(m)+f(m)=f(3m)$. No iepriekšējā punkta seko, ka $f(3m)=0$, tātad $f(m)=\frac{f(3m)}{2}=0$.

Līdz ar to vienīgais uzdevuma atrisinājums ir konstantā funkcija $f(n)=0$.

3. piemērs. Dots, ka $f(x)$ ir stingri augoša funkcija, kas definēta visiem reāliem skaitļiem x $\big($t.i., $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\big)$. Bez tam visiem x un y pastāv vienādība

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + f(0).$$

Atrast visas šādas funkcijas f.

Risinājums.

Ievieto $y = -x$, iegūstot sakarību

$$f\left(f(x) - x\right) = 2f(0).$$

Ievērosim, ka $2f(0)$ ir konstants lielums, bet funkcija f ir stingri augoša; tas nozīmē, ka, ja eksistētu tādas argumenta vērtības x_1 un x_2, ka $f(x_1) - x_1 < f(x_2) - x_2$, tad no tā arī sekotu, ka $f\left(f(x_1) - x_1\right) < f\left(f(x_2) - x_2\right)$, taču tas nav iespējams, jo visiem x_1, x_2 jāapmierina vienādības

$$f\left(f(x_1) - x_1\right) = f\left(f(x_2) - x_2\right) = 2f(0).$$

Tātad arī izteiksmei $f(x) - x$ jābūt konstantam lielumam, t.i., eksistē tāds reāls skaitlis c, ka visiem x izpildās vienādība

$$f(x) - x = c.$$

Taču tas nozīmē, ka par atrisinājumiem var derēt tikai funkcijas $f(x) = x + c$.

Vēl jāpārbauda, ka funkcijas šādā formā patiešām ir dotā uzdevuma atrisinājumi. Ievērosim, ka funkcija $f(x) = x + c$ ir definēta visiem reāliem skaitļiem un tā ir stingri augoša funkcija; pārbaudām, ka tā arī apmierina doto funkcionālvienādojumu:

$$\begin{aligned}
&f(f(x) + y) = f(x + y) + f(0)\\
&f\Big((x + c) + y\Big) = \Big((x + y) + c\Big) + (0 + c)\\
&(x + y + c) + c = x + y + c + c\\
&x + y + 2c = x + y + 2c.
\end{aligned}$$

Funkcijām $f(x) = x + c$ dotais funkcionālvienādojums pārvēršas par vienādību $x + y + 2c = x + y + 2c$, kas ir patiesa visiem argumentiem x un y. Tātad dotā uzdevuma atrisinājums ir visas funkcijas formā $f(x) = x + c$, kur c – patvaļīgs reāls skaitlis.

Substitūcijas

Parasti ar ievietošanas paņēmienu vien nepietiek; bieži ir izdevīgi pāriet uz jauniem mainīgiem, vai pat definēt jaunu funkciju g, kas ir atkarīga no nezināmās funkcijas f $\big($piemēram, var definēt $g(x) = f(x) - x\big)$. Mērķis ir panākt, lai, pārrakstot doto funkcionālvienādojumu ar jaunajiem mainīgajiem $\big/$ funkcijām, tiktu iegūta vienkāršāka sakarība, kuru ir vieglāk pētīt.

4. piemērs. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\big($funkcijas definētas visiem reāliem skaitļiem un kuru vērtības ir reāli skaitļi$\big)$, kuras apmierina funkcionālvienādojumu

$$f\left(f(x + y)\right) = f\left(x^2 - y^2\right) + 4xyf\left(x + y\right).$$

Risinājums.

Doto vienādojumu var pārrakstīt formā

$$f\left(f(x + y)\right) = f\left((x + y)(x - y)\right) + 4xyf\left(x + y\right).$$

Apzīmēsim $u = x + y$ un $v = x - y$. Tad var izteikt

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2 = u^2 - v^2.$$

Līdz ar to jaunajos mainīgajos doto vienādojumu var pārrakstīt kā

$$f(f(u)) = f(uv) + (u^2 - v^2)f(u),$$

visiem $u, v \in \mathbb{R}$.

Ievietojot šajā sakarībā $u = 1$, iegūstam

$$f(f(1)) = f(v) + (1 - v^2) f(1), \tag{1}$$

visiem $v \in \mathbb{R}$.

Ja arī $v = 1$, tad iegūstam $f(f(1)) = f(1)$. Apzīmēsim $c = f(1) = f(f(1))$, tad no (1) seko, ka

$$c = f(v) + (1 - v^2) c$$

jeb

$$f(v) = cv^2,$$

visiem $v \in \mathbb{R}$.

Ievietojot $v = c$, iegūstam, ka $f(c) = c^3$. No otras puses,

$$f(c) = f(f(1)) = f(1) = c.$$

Tātad esam ieguvuši vienādību $c^3 = c$, līdz ar ko $c \in \{-1, 0, 1\}$ un vienīgie dotā uzdevuma atrisinājumi var būt funkcijas $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2$ un $f(x) = 0$. Pārbaudām, ka visas trīs funkcijas patiešām ir atrisinājumi:

- Ja $f(x) = x^2$, tad jāpārbauda, vai visiem $x, y \in \mathbb{R}$ izpildās vienādība

  $$\left((x+y)^2\right)^2 = \left(x^2 - y^2\right)^2 + 4xy\,(x+y)^2.$$

  Ekvivalenti pārveidojam šo vienādību:

  $$\begin{aligned}
  &\left(x^2 + 2xy + y^2\right)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4xy\left(x^2 + 2xy + y^2\right)\\
  &x^4 + 4x^2y^2 + y^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 2x^2y^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 8x^2y^2 + 4x^3y + 4xy^3\\
  &x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.
  \end{aligned}$$

  Iegūta patiesa vienādība, tātad arī sākotnējā, ekvivalentā vienādība ir patiesa. Secinām, ka $f(x) = x^2$ apmierina doto funkcionālvienādojumu.

  Piezīme. Pārveidojot vienādības kreiso pusi, ērtāk būtu bijis lietot Ņūtona binoma formulu:

  $$\left((x+y)^2\right)^2 = (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

- Ja $f(x) = -x^2$, tad jāpārbauda, vai visiem $x, y \in \mathbb{R}$ izpildās vienādība

  $$-\left(-(x+y)^2\right)^2 = -\left(x^2 - y^2\right)^2 - 4xy\,(x+y)^2.$$

  jeb, ekvivalenti,

  $$\left((x+y)^2\right)^2 = \left(x^2 - y^2\right)^2 + 4xy\,(x+y)^2.$$

  Taču šīs vienādības patiesumu pārbaudījām jau iepriekšējā punktā.

- Ja $f(x) = 0$, tad dotais funkcionālvienādojums kļūst par vienādību $0 = 0 + 4xy \cdot 0$, kas ir patiesa vienādība visiem $x, y \in \mathbb{R}$.

Nevienādības un novērtējumi

Papildus iepriekšminētajiem paņēmieniem gandrīz vienmēr ir nepieciešams izmantot arī dažādus novērtējumus funkcijas vērtībām. Protams, šeit jo īpaši var noderēt jebkāda informācija, kas par nezināmo funkciju ir dota uzdevuma formulējumā – sevišķi tādas īpašības kā ierobežotība, monotonitāte vai kādas dotas nevienādības, kuras nezināmā funkcija apmierina.

5. piemērs. Funkcijai $f(n)$ gan argumenti, gan vērtības ir naturāli skaitļi $(f : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$, un katriem diviem naturāliem skaitļiem x un y pastāv vienādība

$$xf(y) + yf(x) = (x+y) \cdot f\left(x^2 + y^2\right).$$

Atrast visas šādas funkcijas un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.

Risinājums.

Skaidrs, ka der visas konstantās funkcijas: $f(x) = m$, kur $m \in \mathbb{N}$.

Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav. Pierādījums no pretējā: pieņem, ka var atrast tādus naturālus x un y, ka $f(x) < f(y)$. Tādā gadījumā izvēlas tādus x un y, lai starpība $f(y) - f(x)$ būtu pozitīva un mazākā iespējamā (šāda x un y izvēle ir iespējama, jo starpībai $f(y) - f(x)$ jābūt naturālam skaitlim). Tādā gadījumā

$$f(x) = \frac{xf(x) + yf(x)}{x + y} < \frac{xf(y) + yf(x)}{x + y} < \frac{xf(y) + yf(y)}{x + y} = f(y).$$

Šeit gan pirmā, gan otrā nevienādība iegūta, aizstājot $f(x)$ ar lielāku skaitli $f(y)$.

Taču no dotā izriet, ka $\dfrac{xf(y) + yf(x)}{x + y} = f(x^2 + y^2)$. Tātad

$$f(x) < f(x^2 + y^2) < f(y),$$

kas ir pretruna ar x un y izvēli (starpība $f(y) - f(x)$ ir lielāka nekā, piemēram, starpība $f(y) - f(x^2 + y^2)$).

6. piemērs. Funkcija $f(x)$ definēta visiem $x \in [-1; 1]$; tās vērtības pēc moduļa nepārsniedz 1 (citiem vārdiem, $f : [-1; 1] \to [-1; 1]$). Visām pieļaujamām x un y vērtībām izpildās nevienādība

$$|xf(y) - yf(x)| \geq x - y.$$

Atrast visas šādas funkcijas f.

Risinājums.

Ievietojot $x = 1$ un $y = 0$, iegūst $|f(0)| \geq 1$; tā kā dots, ka funkcijas vērtības pēc moduļa nepārsniedz 1, tad $|f(0)| = 1$. Tātad vai nu $f(0) = 1$, vai arī $f(0) = -1$.

Ievietojot $y = -x$, kur $x > 0$, iegūstam nevienādību

$$|xf(-x) + xf(x)| \geq 2x,$$

jeb (dalot nevienādību ar pozitīvu skaitli x),

$$|f(x) + f(-x)| \geq 2.$$

No otras puses,

$$|f(x) + f(-x)| \leq |f(x)| + |f(-x)| \leq 1 + 1 = 2,$$

kur pirmā nevienādība seko no trīsstūra nevienādības (divu skaitļu summas modulis nav lielāks kā moduļu summa), bet otrā nevienādība izriet no dotā (funkcijas vērtības pēc moduļa nepārsniedz 1). Tātad jābūt

$$|f(x) + f(-x)| = |f(x)| + |f(-x)| = 2,$$

kas ir iespējams tikai tad, ja $f(x) = f(-x) = 1$ vai arī $f(x) = f(-x) = -1$.

Tātad katram x no definīcijas apgabala ir spēkā $f(x) = f(-x) = \pm 1$. Parādīsim: ja x un y ir dažādi nenulles skaitļi no intervāla $[-1; 1]$, tad $f(x) = f(y)$. Pierādījums no pretējā: pieņemsim, ka x un y ir atšķirīgi no nulles, bet $f(x) \neq f(y)$, tad $f(x) = -f(y)$ (jo $f(x) = \pm 1$ un $f(y) = \pm 1$).

Mēs drīkstam pieņemt, ka vienlaikus $x > 0 > y$ un $x + y \geq 0$ (tas izpildās, ja skaitlis, kurš ir lielākais pēc moduļa, ir pozitīvs un tiek apzīmēts ar x, bet skaitlis, kurš ir mazākais pēc moduļa, ir negatīvs un tiek apzīmēts ar y; ja tā nebūtu, piemēram, ja x būtu mazāks nekā 0, tad x vietā varētu ņemt skaitli $-x$, tā kā $f(x) = f(-x)$). Tādā gadījumā dotā nevienādība

$$|xf(y) - yf(x)| \geq x - y$$

kļūst par

$$|xf(y) - y \cdot (-f(y))| \geq x - y$$

jeb

$$|f(y)|\,|x + y| \geq x - y.$$

Taču $|f(y)| = 1$ un $|x + y| = x + y$. Iegūstam nevienādību

$$x + y \geq x - y$$

jeb $y \geq 0$ – taču tā ir pretruna ar sākotnējo pieņēmumu, ka $y < 0$.

Secinām, ka $f(0) = \pm 1$ un visiem $x \in [-1;0) \cup (0;1]$ izpildās $f(x) = c$, kur $c = \pm 1$. Tātad par atbildi var derēt tikai šādas funkcijas:

$$f(x) = 1,$$
$$f(x) = -1,$$
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ -1, & x \in [-1;0) \cup (0;1], \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ 1, & x \in [-1;0) \cup (0;1]. \end{cases}$$

Viegli pārbaudīt, ka katra no tām patiešām apmierina uzdevuma prasības.

Matemātiskā indukcija

Vēl viena metode, kas arī parādās vairākos uzdevumos par funkcionālvienādojumiem, ir matemātiskās indukcijas princips. Īsi atgādināsim par standarta matemātisko indukciju. Pieņemsim, ka $A(n)$ ir kāds vispārīgs apgalvojums, kas ir atkarīgs no naturāla skaitļa n (piemēram, apgalvojums $A(n)$ varētu būt: "dotā funkcionālvienādojuma atrisinājums apmierina vienādību $f(n) = 3n + 1$, ja n ir naturāls skaitlis").

Matemātiskās indukcijas princips

Ja
1) apgalvojums $A(1)$ ir patiess,
2) katram naturālam k no tā, ka patiess ir apgalvojums $A(k)$, izriet apgalvojuma $A(k+1)$ patiesums,
tad apgalvojums $A(n)$ ir patiess visiem naturāliem skaitļiem n.

Tātad, lai pierādītu $A(n)$ patiesumu,
1) jāpārbauda, vai apgalvojums $A(1)$ ir patiess;
2) jāpieņem, ka $A(k)$ ir patiess, un, izmantojot to, jāpierāda, ka patiess ir arī apgalvojums $A(k+1)$.

7. piemērs. Funkcija f definēta naturāliem skaitļiem, pieņem naturālas vērtības $(f : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$ un apmierina vienādību $f(n+m) = f(n) + f(m)$ visiem naturāliem skaitļiem n un m.

Atrast visas šādas funkcijas un pierādīt, ka citu nav.

Risinājums.

Kā jau ievadā minēts, jebkura funkcija formā $f(n) = c \cdot n$, kur $c \in \mathbb{N}$ – jebkurš naturāls skaitlis, apmierina uzdevuma prasības. Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav.

Apzīmēsim $c = f(1)$ un ar indukciju pēc n parādīsim, ka $f(n) = c \cdot n$.

- Indukcijas bāze: ja $n = 1$, tad izpildās vienādība $f(1) = c \cdot 1$, saskaņā ar mūsu apzīmējumu.
- Induktīvais pieņēmums: pieņemsim, ka $f(k) = ck$ kādam naturālam skaitlim k.
- Induktīvā pāreja: saskaņā ar doto vienādojumu, izpildās vienādība

$$f(k+1) = f(k) + f(1) = ck + c = c(k+1).$$

Tātad pierādīts, ka $f(k+1) = c(k+1)$, un induktīvā pāreja izdarīta.

Līdz ar to apgalvojums $f(n) = c \cdot n$ ir pierādīts visiem naturāliem skaitļiem n.

8. piemērs. Funkcija f definēta naturāliem skaitļiem un tās vērtības ir naturāli skaitļi $\left(f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\right)$. Visiem naturāliem x un y pastāv vienādība

$$f\left(f(x)+f(y)\right)=x+y.$$

Atrast visas tādas funkcijas f.

Risinājums.

Patvaļīgiem naturāliem x un y izpildās

$$\begin{aligned}&f\left(f(x)+f(y)\right)=x+y,\\&f(1)+f\left(f(x)+f(y)\right)=f(1)+x+y,\\&f\Bigg(f(1)+f\left(f(x)+f(y)\right)\Bigg)=f\Bigg(f(1)+x+y\Bigg).\end{aligned}$$

Atkal izmantojot doto funkcionālvienādojumu, iegūst vienādību

$$f\Bigg(f(1)+f\left(f(x)+f(y)\right)\Bigg)=1+f(x)+f(y).$$

Tātad visiem naturāliem x un y esam pamatojuši vienādību

$$f\Bigg(f(1)+x+y\Bigg)=f\Bigg(f(1)+f\left(f(x)+f(y)\right)\Bigg)=1+f(x)+f(y).$$

Tātad

$$f(x)+f(y)=f\Bigg(f(1)+x+y\Bigg)-1,$$

un izteiksmes $f(x)+f(y)$ vērtība ir atkarīga tikai no skaitļu x un y summas $x+y$.

Ņemot $x=n+1$ un $y=1$, kur $n\in\mathbb{N}$ – jebkurš naturāls skaitlis, iegūstam

$$f(n+1)+f(1)=f\Bigg(f(1)+n+2\Bigg)-1.$$

Ņemot $x=n$ un $y=2$, iegūstam

$$f(n)+f(2)=f\Bigg(f(1)+n+2\Bigg)-1.$$

Tātad visiem naturāliem n ir spēkā vienādība

$$f(n+1)+f(1)=f(n)+f(2).$$

Šo vienādību ekvivalenti pārveidojam formā

$$f(n+1)-f(n)=f(2)-f(1),$$

kas izpildās visiem naturāliem n.

Parādīsim, ka $f(n)$ ir aritmētiskā progresija, t.i., f ir formā $f(n)=an+b$. Apzīmēsim $a=f(2)-f(1)$ un $f(1)=a+b$ jeb $b=f(1)-a$. Tad ar indukciju pierādīsim, ka $f(n)=an+b$.

- Indukcijas bāze: vienādība $f(1)=a+b$ ir spēkā, saskaņā ar apzīmējumu;
- Induktīvais pieņēmums: pieņem, ka $f(k)=ak+b$, naturālam skaitlim k;
- Induktīvā pāreja: parādīsim, ka $f(k+1)=a(k+1)+b$. Saskaņā ar iepriekšpierādīto,

$$f(k+1)-f(k)=f(2)-f(1)=a.$$

Tad

$$f(k+1)=f(k)+a=ak+b+a=a(k+1)+b.$$

Induktīvā pāreja pabeigta.

Ievieto dotajā funkcionālvienādojumā $x = 1$ un $y = 1$, iegūstot sakarību

$$f\left(f(1) + f(1)\right) = 2.$$

No otras puses, tā kā $f(n) = an + b$, tad $f(1) = a + b$, tātad izpildās vienādība

$$f\left(a + b + a + b\right) = 2$$

jeb, tā kā $f\left(2a + 2b\right) = a\left(2a + 2b\right) + b$, tad

$$a(2a + 2b) + b = 2.$$

Ievieto dotajā funkcionālvienādojumā $x = 2$ un $y = 1$, iegūstot sakarību

$$f\left(f(2) + f(1)\right) = 3.$$

No otras puses, tā kā $f(2) = 2a + b$, tātad izpildās vienādība

$$f\left(2a + b + a + b\right) = 3$$

$$a(3a + 2b) + b = 3.$$

Esam ieguvuši vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2a^2 + 2ab + b = 2, \\ 3a^2 + 2ab + b = 3. \end{cases}$$

No otrā vienādojuma atņemot pirmo, iegūst vienādību

$$a^2 = 1,$$

no kā izriet, ka $a = 1$ $\big($ja $a = -1$, tad funkcijas $f(n) = an + b$ vērtības būtu negatīvas lieliem n, taču dots, ka $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\big)$.

No pirmā vienādojuma iegūstam $b = 0$, līdz ar to funkcija f ir $f(n) = n$. Atliek pārbaudīt, ka tā patiešām apmierina doto funkcionālvienādojumu.

Dažādi uzdevumi

Dažkārt nepieciešams nevis atrast visas funkcijas, kas apmierina doto funkcionālvienādojumu, bet gan noskaidrot/pierādīt visu šādu funkciju īpašības – piemēram, pierādīt, ka visas funkcijas, kas apmierina doto vienādojumu ir augošas; vai arī noskaidrot šādu funkciju vērtību konkrētiem argumentiem utt.

9. piemērs. Dota funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurai visiem reāliem x izpildās

$$f\left(f(x)\right) = x^2 - x + 1.$$

Atrast $f(0)$ vērtību.

Risinājums.

Apzīmēsim $f(0) = a$ un $f(1) = b$. Tad $f(a) = f(f(0))$, bet no dotās vienādības seko, ka

$$f(f(0)) = 0^2 - 0 + 1 = 1.$$

Tātad $f(a) = 1$.

Līdzīgi,

$$f(b) = f(f(1)) = 1^2 - 1 + 1 = 1.$$

Tātad $1 = f(a) = f(b)$.

Tad varam iegūt, ka

$$f(1) = f(f(a)) = a^2 - a + 1$$
$$f(1) = f(f(b)) = b^2 - b + 1.$$

Tātad

$$a^2 - a + 1 = b$$

un

$$b^2 - b + 1 = b.$$

No pēdējās vienādības izriet, ka $(b-1)^2 = 0$ jeb $b = 1$. Tātad $a^2 - a + 1 = 1$, līdz ar to

$$a^2 - a = 0.$$

No šejienes seko, ka ir divas iespējamās a vērtības: $a_0 = 0$ un $a_1 = 1$. Tomēr nav iespējams, ka $f(0) = 0$, jo tad

$$f(f(0)) = f(0) = 0,$$

kas ir pretrunā ar vienādību $f(f(0)) = 1$. Tātad vērtība $a = 0$ neder; turpretī, ja $a = 1$, tad

$$f(f(0)) = f(1) = b = 1.$$

Tātad $f(0) = 1$.

10. piemērs. Funkcijas $f(x)$ un $g(x)$ definētas visiem naturāliem skaitļiem, pieņem naturālas vērtības $\big(f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\big)$ un tām ir šādas īpašības:

a) f ir augoša, t.i., $f(1) < f(2) < f(3) < \ldots$;

b) g ir augoša, t.i., $g(1) < g(2) < g(3) < \ldots$;

c) f un g vērtību kopām nav kopēju elementu;

d) f un g vērtību kopu apvienojums ir visa naturālo skaitļu kopa;

e) katram naturālam n izpildās $g(n) = f(f(n)) + 1$.

Aprēķināt $f(56)$.

Risinājums.

No nosacījuma e) seko, ka $g(n) > 1$ katram naturālam n. Tāpēc no nosacījumiem d) un a) secinām, ka $f(1) = 1$; tad $g(1) = f(f(1)) + 1 = f(1) + 1 = 2$. Ievērojot nosacījumus a) un c), iegūstam, ka $f(2) \geq 3$. Tādēļ no nosacījuma a) var secināt, ka $f(n) > n$, ja $n > 1$. Bet tad $g(n) = f(f(n)) + 1 > f(f(n)) \geq f(n)$, tātad visiem naturāliem n ir pareiza nevienādība

$$g(n) > f(n).$$

No šīs nevienādības un no tā, ka $f(1) = 1, g(1) = 2$, secinām, ka $f(2) = 3$.

Aplūkosim naturālos skaitļus no intervāla $[1, g(n) - 1]$.

- Tā kā $g(n) - 1 = f(f(n))$, tad šajā intervālā atrodas skaitlis $f(f(n))$;
- tā kā f ir augoša funkcija, tad intervālā $[1, g(n) - 1]$ atrodas arī visi skaitļi $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(f(n) - 1)$;
- tātad šajā intervālā atrodas $f(n)$ funkcijas f vērtības.
- Tā kā g ir augoša funkcija, tad minētajā intervālā atrodas vērtības $g(1), g(2), \ldots, g(n-1)$, tātad $(n-1)$ funkcijas g vērtība.
- Ievērojot nosacījumus d) un e), iegūstam, ka $f(n) + n - 1 = g(n) - 1$, jo katrs no apskatāmajā intervālā ietilpstošajiem $g(n) - 1$ naturālajiem skaitļiem pieder tieši pie vienas no kopām $\{f(1); f(2); \ldots; f(f(n)) - 1\}$ vai $\{g(1); g(2); \ldots; g(n-1)\}$.

Tā kā $f(n) + n - 1 = g(n) - 1 = f(f(n))$, tad

$$f(f(n)) = f(n) + n - 1.$$

Tagad, izmantojot iegūto sakarību un iepriekš atrasto vienādību $f(2) = 3$, varam aprēķināt vajadzīgo:

$$\begin{aligned}
&f(3) = f(f(2)) = f(2) + 2 - 1 = 3 + 2 - 1 = 4,\\
&f(4) = f(f(3)) = f(3) + 3 - 1 = 4 + 3 - 1 = 6,\\
&f(6) = 9,\\
&f(9) = 14,\\
&f(14) = 22,\\
&f(22) = 35,\\
&f(35) = 56,\\
&f(56) = 90,
\end{aligned}$$

ko arī vajadzēja aprēķināt.

11. piemērs. Dota funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ $\big(f$ definēta naturāliem skaitļiem un tās vērtības ir veseli nenegatīvi skaitļi$\big)$. Zināms, ka

- $f(2) = 0$ un $f(3) > 0$;
- visiem naturāliem n un m ir spēkā nosacījums
$$f(n+m) - f(n) - f(m) \in \{0, 1\};$$
- $f(9999) = 3333$.

Aprēķināt $f(2014)$.

Risinājums.

No dotā seko, ka $f(n+m) = f(n) + f(m)$ vai $f(n+m) = f(n) + f(m) + 1$, visiem naturāliem n un m. Jebkurā gadījumā izpildās nevienādība $f(n+m) \geq f(n) + f(m)$. Turklāt var secināt, ka f ir nedilstoša $\big($ņemot $m = 1$, iegūstam $f(n+1) \geq f(n) + f(1) \geq f(n)$, jo $f(1) \geq 0$ $\big)$.

Ievietojot šajā nevienādībā $m = n$, iegūstam $f(2n) \geq 2f(n)$.

Dots, ka $0 = f(2)$. No tikko pamatotā, $f(2) \geq 2f(1)$. Tā kā $f(1) \geq 0$ $\big($funkcijas vērtības ir nenegatīvas$\big)$, tad secinām, ka
$$0 = f(2) \geq 2f(1) \geq 0,$$
taču tas var izpildīties tikai, ja $f(1) = 0$.

Vēl ir dots, ka $0 < f(3)$. No otras puses,
$$f(3) = f(1+2) - 0 - 0 = f(1+2) - f(1) - f(2) \in \{0, 1\}.$$
Tā kā $f(3) \neq 0$, tad jābūt $f(3) = 1$.

Tagad no nevienādības
$$f(m+n) \geq f(m) + f(n),$$
ņemot $n = 3$, seko
$$f(m+3) \geq f(m) + 1,$$
visiem naturāliem m.

Tātad
$$3333 = f(9999) \geq f(9996) + 1 \geq f(9993) + 2 \geq f(9990) + 3 \geq \ldots \geq f(3) + 3332 = 3333.$$
Tātad visām šīm nevienādībām patiesībā jābūt vienādībām, t.i., $f(3k) = k$, ja $k = 1, 2, \ldots, 3333$.

Secinām, ka $f(2013) = 671$ un $f(2016) = 672$. Tā kā funkcija f ir nedilstoša, tad
$$671 = f(2013) \leq f(2014) \leq f(2016) = 672.$$

Pierādīsim, ka $f(2014) = 671$. Pierādījums no pretējā: ja $f(2014) = 672$, tad

- $f(2014 \cdot 3) = 2014$, jo $2014 < 3333$;
- $f(2014 \cdot 3) \geq f(2 \cdot 2014) + f(2014) \geq 3f(2014)$,

tātad izpildītos nevienādība $2014 = f(2014 \cdot 3) \geq 3f(2014) = 3 \cdot 672 = 2016$ – pretruna.