Funkcionālnevienādības

Kims Georgs Pavlovs

1 Ievads

Iepriekšējā materiālā tika aplūkotas funkcionālvienādojumu risināšanas metodes. Funkcionālnevienādība ir līdzīgs koncepts, bet tomēr šāda veida uzdevumiem ir sava specifika. Lai izprastu šo materiālu, lasītājam **nav** nepieciešams pārzināt visas iepriekšējā materiālā aplūkotas tēmas, taču ir pāris tēmas, kuru laba izpratne būs svarīga šī materiāla izprašanai:

- parastās substitūcijas - lasītājam ir jāprot veikt klasiskās substitūcijas, piemēram, $P(0,0)$, $P(x,0)$, $P(0,x)$, $P(x,-x)$, $P(x,1)$ u.c.
- mainīgo noīsināšanas triks - ja vienādības kreisajā pusē ir saskaitāmais $f(A(x,y))$, bet nevienādības kreisajā pusē ir saskaitāmais $f(B(x,y))$, tad mēs varam mēģināt izvēlēties tādus x, y, lai $A(x,y) = B(x,y)$, kā rezultātā abi saskaitāmie noīsināsies.
- simetrijas izjaukšana - bieži vien ir vērts salīdzināt savā starpā $P(x,y)$ un $P(y,x)$ vai abus saskaitīt. Substitūcija $P(y,x)$ neizmaina simetriskos saskaitāmos, taču veic izmaiņu asimetriskajos saskaitāmajos.

Lai atrisinātu funkcionālnevienādību, parasti tiek veiktas klasiskās substitūcijas, mainīgo noīsināšanas triks, simetrijas izjaukšana un aplūkots, kādas interesantas sakarības tiek iegūtas. Jauniegūtās sakarības bieži vien motivē veikt nākamos soļus, kuros populāri ir novērtēt funkcijas vērtību. Kopumā funkcionālnevienādības prasa lielāku oriģinalitāti ideju izdomāšanā nekā funkcionālvienādojumi, tādēļ uzdevumu risināšanas piemēros tiks ilustrētas daudzas noderīgas idejas, kuras ir vērts paturēt prātā.

2 Uzdevumu risināšanas piemēri

1. piemērs Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām izpildās nevienādība

$$f(x^2) - f(y^2) \leq (f(x) + y)(x - f(y))$$

visiem reāliem skaitļiem x, y.

Atrisinājums. Ar $P(x,y)$ apzīmēsim doto funkcionālnevienādību. Sāksim ar parasto substitūciju $P(0,0)$:

$$f(0) - f(0) \leq -f(0)^2 \implies 0 \geq f(0)^2$$

Tā kā reāla skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad $f(0)^2 \geq 0$, tāpēc $f(0)^2 = 0 \implies f(0) = 0$. Iegūtais motivē veikt substitūciju $P(x,0)$:

$$f(x^2) - f(0) \leq (f(x)(x - f(0)) \implies f(x^2) \leq xf(x)$$

Būtu noderīgi apskatīties, ko pie reizes var iegūt no $P(0,x)$:

$$f(0) - f(x^2) \leq (f(0) + x)(-f(x)) \implies f(x^2) \geq xf(x)$$

No iegūtajām sakarībām var secināt, ka:

$$xf(x) \geq f(x^2) \geq xf(x) \implies f(x^2) = xf(x)$$

Aplūkosim iegūto sakarību sīkāk. Ir vērts atcerēties par triku aizstāt x ar $-x$ sakarībās, kur parādās izteiksmes, kuras satur x^2, jo šī substitūcija neizmaina x^2, bet var izmainīt pārējās izteiksmes. Ja mēs aizstājam x ar $-x$, tad iegūsim, ka:

$$f(x^2) = xf(x) = -xf(-x) \implies -f(x) = f(-x), \quad \text{ja } x \neq 0$$

Tātad esam ieguvuši, ka funkcija ir nepāra visiem nenulles reāliem skaitļiem, taču $f(0) = 0$, tāpēc tā ir nepāra visiem reāliem skaitļiem.

Acīgie var pamanīt, ka iegūtā sakarība $f(x^2) = xf(x)$ ļauj mums pārveidot sākotnēji doto nevienādību:

$$\begin{gathered} f(x^2) - f(y^2) \leq (f(x) + y)(x - f(y)) \\ f(x^2) - f(y^2) \leq xf(x) - f(x)f(y) + xy - yf(y) \\ f(x^2) - f(y^2) \leq f(x^2) - f(x)f(y) + xy - f(y^2) \\ f(x)f(y) \leq xy \end{gathered}$$

Izmantosim tagad to, ka funkcija ir nepāra. Iegūtajā sakarībā aizvietosim y ar $-y$:

$$f(x)f(-y) \leq -xy \implies -f(x)f(y) \leq -xy \implies f(x)f(y) \geq xy$$

Tas nozīmē, ka:

$$xy \geq f(x)f(y) \geq xy \implies f(x)f(y) = xy$$

Ievērosim, ka, pēdējā sakarībā ievietojot $x = y = 1$, iegūsim, ka $f(1)^2 = 1 \implies f(1) = \pm 1$. Tad ievietojot $y = 1$ iegūstam, ka $f(x)f(1) = x$. Ja $f(1) = 1$, tad $f(x) = x$, savukārt, ja $f(1) = -1$, tad $f(x) = -x$. Viegli pārbaudīt, ka abas funkcijas apmierina doto funkcionālnevienādību.

Komentārs. Atskatoties uz iegūto risinājumu, varam ievērot, ka ar standarta substitūcijām mēs ieguvām nevienādību virknes formā $M \geq f(\text{kaut kas}) \geq M$, no kurām mēs secinājām, ka $f(\text{kaut kas}) = M$. Tālāk iegūto informāciju mēs izmantojām, lai iegūtu kaut kādas jaunas funkcijai piemītošas īpašības. Ir vērts atzīmēt, ka šajā uzdevumā noderēja **simetrijas izjaukšanas triks attiecībā uz skaitļu zīmēm**. Šī trika būtība bija aizstāt y ar $-y$ un izmantot to, ka funkcija ir nepāra, lai iegūtu, ka $f(x)f(y) = xy$.

2. piemērs. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām izpildās nevienādības

$$f(x) + f(y) + 1 \geq f(x + y) \geq f(x) + f(y)$$

visiem reāliem skaitļiem x, y, kā arī izpildās šādas divas īpašības:

- visiem reāliem skaitļiem $0 \leq x < 1$ izpildās $f(0) \geq f(x)$;
- $-f(-1) = f(1) = 1$.

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim sakarību $f(x) + f(y) + 1 \geq f(x + y)$, bet ar $Q(x, y)$ apzīmēsim sakarību $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$. Aplūkosim standarta substitūciju $Q(0, 0)$:

$$f(0) \geq f(0) + f(0) \implies 0 \geq f(0)$$

Atcerēsimies, ka $f(1) = 1$ un $f(-1) = -1$. Līdz ar to varam aplūkot $Q(1, -1)$:

$$f(1 - 1) \geq f(1) + f(-1) \implies f(0) \geq 0$$

Tātad esam ieguvuši, ka $0 \geq f(0) \geq 0$, kas nozīmē, ka $f(0) = 0$. Tas nozīmē, ka visiem reāliem skaitļiem $0 \leq x < 1$ izpildās $f(0) = 0 \geq f(x)$.

Ir vērts atcerēties vispārīgo ar funkcionālvienādojumiem raksturīgo principu - ja ir zināma kāda funkcijas vērtība, tad tā ir jāpielieto. Acīmredzami veidi, kā to var izdarīt šī uzdevuma kontekstā, ir aplūkot $P(x, 1), P(1, x), Q(x, 1), Q(1, x)$ utt. Taču mēs varam arī pamēģināt izvēlēties tādu y, lai $f(x+y) = f(1) = 1$. Tas nozīmē, ka mums ir jāizvēlas $y = 1 - x$. Aplūkosim $P(x, 1 - x)$:

$$f(x) + f(1 - x) + 1 \geq f(1) = 1 \implies f(x) + f(1 - x) \geq 0$$

Tagad ir vērts atcerēties, ka visiem $0\ x < 1$ izpildās $0 \leq f(x)$. Iepriekš iegūtajā sakarībā izvēlēsimies x, ka $0 < x < 1$, tad $0 < 1 - x < 1$. Tādā gadījumā $0 \geq f(x)$ un $0 \geq f(1 - x)$, kas nozīmē, ka vienīgais veids, kā šo divu skaitļu summa var būt vismaz 0, ir tad un tikai tad, ja $f(x) = f(1 - x) = 0$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka visiem reāliem skaitļiem $0 \leq x < 1$ ir spēkā, ka $f(x) = 0$.

Tagad atgriezīsimies pie idejas paspēlēties ar acīmredzamām substitūcijām, kuras satur 1 un -1. Šeit īsti nav nekādu vispārīgu ieteikumu, kuras tieši substitūcijas izmēģināt, jo ir jāizmēģina visas un jāskatās, kuras dod visnoderīgāko informāciju. Izmēģinot visas iespējamo substitūciju variācijas, var uzdurties, ka $Q(x, 1)$ dod mums:

$$f(x + 1) \geq f(x) + f(1) = f(x) + 1$$

Savukārt $Q(x + 1, -1)$ dod mums, ka:

$$f(x + 1 - 1) \geq f(x + 1) - 1 \implies f(x) + 1 \geq f(x + 1)$$

Bet šis mums ļauj iegūt vienādību

$$f(x) + 1 \geq f(x + 1) \geq f(x) + 1 \implies f(x + 1) = f(x) + 1$$

Var teikt, ka uzdevums ir atrisināts, jo, tā kā visiem $0 \leq x < 1$ ir spēkā, ka $f(x) = 0$, tad visiem $1 \leq x < 2$ ir spēkā, ka $f(x) = 1$. Citiem vārdiem sakot, varam pierādīt ar indukciju, ka $f(x) = \lfloor x \rfloor$ visiem reāliem skaitļiem. Mēs to pierādīsim tikai pozitīviem reāliem skaitļiem - pierādījums negatīviem skaitļiem ir viegli modificējams no pierādījuma pozitīviem skaitļiem un paliek kā vingrinājums lasītajam.

Indukcijas bāze mums ir, tāpēc pieņemsim, ka kaut kādam naturālam skaitlim k ir spēkā, ka visiem $k \leq x < k + 1$ ir spēkā, ka $f(x) = \lfloor x \rfloor = k$. Tādā gadījumā $f(x + 1) = f(x) + 1 = k + 1$, kas nozīmē, ka $f(x) = k + 1 = \lfloor x \rfloor$ visiem $k + 1 \leq x < k + 2$. Tas pierāda induktīvo pāreju, tāpēc $f(x) = \lfloor x \rfloor$ visiem reāliem pozitīviem skaitļiem. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija tiešām der.

Komentārs. Līdzīgi kā iepriekšējā uzdevumā, mēs spēlējāmies ar parastām substitūcijām, līdz ieguvām aizvien jaunu informāciju, kuru tālāk aizveda mūs līdz risinājumam. Protams, šajā uzdevumā es teiktu, ka daudzu risinājuma soļu motivācija nāk no tā, ka, risinātājam neatrisinot uzdevumu līdz galam, bija skaidrs, kāda ir atbilde. Ja uzdevuma sākumā var **uzminēt**, kāda ir atbilde, tad var mēģināt pierādīt īpašības, kas piemīt uzminētajai funkcijai. Kā nākamo uzdevumu aplūkosim funkcionālnevienādību no šī gada Baltijas Ceļa atlases.

3.piemērs. Ar $\mathbb{R}$ apzīmēsim reālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām visiem reāliem skaitļiem x, y izpildās

$$xf(y) + f(x+y) \geq (y+1)f(x) + f(y).$$

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālnevienādību. Aplūkosim $P(0, y)$:

$$f(y) \geq (y+1)f(0) + f(y) \implies 0 \geq (y+1)f(0)$$

Šī nevienādība izpildās katram y. Ja mēs paņemam, ka $y = 0$, tad $0 \geq f(0)$, bet, ja mēs paņemam, ka $y = -2$, tad $0 \geq -f(0) \implies f(0) \geq 0$. Līdz ar to $0 \geq f(0) \geq 0 \implies f(0) = 0$.

Pirms turpinām nodarboties ar specifiskām substitūcijām, veiksim pāris svarīgus novērojumus. Ievērosim, ka mums $P(x, y)$ satur $f(x + y)$, kas ir simetrisks attiecībā pret x un y. Līdz ar to mēs varam aplūkot $P(x, y)$ un $P(y, x)$ (tas ir, izmantot tā saucamo simetriju):

$$xf(y) + f(x+y) \geq (y+1)f(x) + f(y)$$
$$yf(x) + f(y+x) \geq (x+1)f(y) + f(x)$$

Saskaitīsim šīs divas nevienādības kopā:

$$2f(x+y) \geq 2f(x) + 2f(y) \implies f(x+y) \geq f(x) + f(y)$$

Izmantosim to, ka $f(0) = 0$, pēdējā iegūtajā sakarībā. To var izdarīt, aizvietojot y ar $-x$, lai iegūtu, ka $f(0) = 0 \geq f(x) + f(-x) \implies -f(-x) \geq f(x)$.

Atgriezīsimies pie specifisku substitūciju veikšanas. Varam aplūkot $P(0, x)$, $P(x, x)$ un citas ierastās substitūcijas. Bet pievērsīsim uzmanību vienai konkrētai. Ideja ir pārvērst par 0 locekli $(y + 1)f(x)$. To var izdarīt, ievietojot $y = -1$, līdz ar to aplūkosim $P(x, -1)$:

$$xf(-1) + f(x-1) \geq f(-1) \implies f(x-1) \geq f(-1)(1-x)$$

Šī sakarība izskatās noderīga, vienīgi būtu ērtāk, ja $f(x - 1)$ vietā būtu $f(x)$. To var izdarīt, aizvietojot x ar $x + 1$. Tad iegūsim, ka:

$$f(x) \geq -f(-1)x$$

Šeit ir vērts atcerēties, ka mēs ieguvām, ka $-f(-x) \geq f(x)$. Līdz ar to:

$$-f(-x) \geq f(x) \geq -f(-1)x \implies f(-x) \leq f(-1)x$$

No otras puses, sakarībā $f(x) \geq -f(-1)x$ aizvietojot x ar $-x$, iegūsim, ka $f(-x) \geq f(-1)x$. Esam ieguvuši, ka:

$$f(-1)x \geq f(-x) \geq f(-1)x \implies f(-x) = xf(-1)$$

Tas nozīmē, ka ikkatram reālam skaitlim x ir spēkā, ka $f(x) = Cx$, kur C ir patvaļīga reāla konstante. Pārbaudīsim, ka šī funkciju kopa tiešām der:

$$xf(y) + f(x+y) \geq (y+1)f(x) + f(y)$$
$$Cxy + Cx + Cy \geq (y+1)Cx + Cy$$
$$Cxy + Cx + Cy \geq Cxy + Cx + Cy$$
$$0 \geq 0$$

Secinām, ka šī funkciju kopa sniedz visus atrisinājumus.

Komentārs. Redzam, ka šis uzdevums balstās uz tradicionālām funkcionālvienādojumu rēķināšanas metodēm - simetrijas izmantošanu, kā arī tādu vērtību ievietošanu, lai par 0 kļūst kaut kādi saskaitāmie, spēlēšanos ar x un $-x$, kas arī parādījās 1. piemērā. Kā nākamo uzdevumu apskatīsim vidēji grūto pirmās dienas uzdevumu no IMO 2022. Tiks aplūkoti 2 risinājumi - pirmais vairāk balstās uz oficiālo uzdevuma atrisinājumu, otrais ir risinājums, ko autors izdomāja olimpiādes laikā.

4.piemērs. Ar $\mathbb{R}^+$ apzīmēsim pozitīvo reālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ar īpašību, ka katram $x \in \mathbb{R}^+$ eksistē tieši viens $y \in \mathbb{R}^+$, kam izpildās nevienādība

$$xf(y) + yf(x) \leq 2$$

1.atrisinājums. Sākumā ir noderīgi uzminēt, kāda ir funkcija, kurai piemīt dotā īpašība. Acīgie var ievērot, ka $f(x) = \frac{1}{x}$ katram pozitīvam reālam skaitlim der, jo

$$xf(y) + yf(x) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

kur mēs izmantojām AM-GM nevienādību. Vienādība izpildās tad un tikai tad, ja $x = y$. Līdz ar to katram x vienīgais y ar īpašību, ka $xf(y)+yf(x) \leq 2$, ir $y = x$. Tas pierāda, ka minētā funkcija patiešām der. Pierādīsim, ka tā ir vienīgā iespējamā atbilde.

Katram x skaitli y, kuram izpildās $xf(y) + yf(x) \leq 2$, sauksim par skaitļa x *draugu*. Ievērosim simetrijas dēļ — ja skaitļa x draugs ir y, tad skaitļa y draugs ir x. Pieņemsim, ka skaitļa x draugs nav pats skaitlis x. Tad tā kā nevienādība $yf(x) + xf(y) \leq 2$ izpildās tikai skaitļa x draugam, tad, ievietojot $y = x$, iegūsim, ka:

$$xf(x) + xf(x) > 2 \implies f(x) > \frac{1}{x}$$

Pieņemsim, ka skaitļa x draugs ir kaut kāds skaitlis $y^\star$. Tad līdzīgi varam iegūt, ka:

$$y^\star f(y^\star) + f(y^\star)y^\star > 2 \implies f(y^\star) > \frac{1}{y^\star}$$

Mēs zinām, ka ir jāizpildās:

$$xf(y^\star) + y^\star f(x) \leq 2$$

Taču no iegūtajām sakarībām varam iegūt, ka:

$$xf(y^\star) + y^\star f(x) > \frac{x}{y^\star} + \frac{y^\star}{x} \geq 2$$

Tā ir pretruna, tāpēc mūsu pieņēmums ir aplams. Līdz ar to skaitļa x draugs ir pats skaitlis x.

Iegūtais ļauj mums pārrakstīt uzdevuma nosacījumus. Mēs zinām, ka $xf(x) + xf(x) \leq 2 \implies f(x) \leq \frac{1}{x}$ un katram $y \neq x$ ir spēkā, ka

$$xf(y) + yf(x) > 2$$

Mūsu mērķis ir pierādīt, ka $f(x) = \frac{1}{x}$. Pieņemsim, ka kaut kādam reālam skaitlim c ir spēkā, ka $f(c) < \frac{1}{c}$. Tādā gadījumā $f(c) = \frac{1}{c+\epsilon}$, kur ϵ ir kaut kāds reāls pozitīvs skaitlis. Ievērosim, ka tādā gadījumā:

$$cf(c+\epsilon) + (c+\epsilon)f(c) \leq c \cdot \frac{1}{c+\epsilon} + (c+\epsilon) \cdot \frac{1}{c+\epsilon} = 1 + \frac{c}{c+\epsilon} < 2$$

Bet tas nozīmē, ka skaitļa c draugs ir $c+\epsilon$. Tā ir pretruna, jo pierādījām, ka vienīgais skaitļa c draugs ir c. Līdz ar to mūsu pieņēmums ir aplams, kas nozīmē, ka $f(c) = \frac{1}{c}$. Atkārtojot šo spriedumu, katram reālam skaitlim x iegūsim, ka $f(x) = \frac{1}{x}$.

2.atrisinājums. Izmantosim pirmajā risinājumā iegūto faktu, ka skaitļa x draugs ir pats skaitlis x. Ievērosim, ka tādā gadījumā $f(x) \leq \frac{1}{x}$ un visiem reāliem skaitļiem $y \neq x$ izpildās:

$$xf(y) + yf(x) > 2 \implies \frac{f(y)}{y} + \frac{f(x)}{x} > \frac{2}{xy}$$

Tas motivē mūs ieviest jaunu funkciju $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Ievērosim, ka, pirmkārt, $g(x) \leq \frac{1}{x^2}$ un visiem reāliem skaitļiem x un $y \neq x$ izpildās

$$g(x) + g(y) > \frac{2}{xy}$$

Tas motivē mūs ieviest vēl vienu funkciju $h(x) = \frac{1}{x^2} - g(x)$, jo tā pieņem pozitīvas vērtības un mūsu mērķis būtu pierādīt, ka visām pozitīvām x vērtībām ir spēkā, ka $h(x) = 0$. Pārrakstīsim doto nevienādību:

$$g(x) + g(y) > \frac{2}{xy}$$

$$\frac{1}{x^2} - h(x) + \frac{1}{y^2} - h(y) > \frac{2}{xy}$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 > h(x) + h(y)$$

Tālākā risinājuma motivācija balstās uz šādu domu - dotā nevienādība ir lokāla, tāpēc ir vērts mēģināt apskatīties uz kādu globālu nevienādību. Ievērosim, ka loceklis $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2$ summējot ļaus mums uztaisīt apgriezto kvadrātu summu, kas ir ierobežots lielums, taču tam ir jābūt lielākam par nevienādības labo pusi, kuru mēs varam pataisīt bezgalīgi lielu.

Realizēsim šo ideju. Ar $P(x,y)$ apzīmēsim pēdējo iegūto nevienādību. Pieņemsim, ka kaut kādam reālam skaitlim x_0 ir spēkā, ka $h(x_0)\neq 0$. Aplūkosim $P(x_0,\frac{1}{2}x_0), P(x_0,\frac{2}{3}x_0), P(x_0,\frac{4}{3}x_0),\ldots,P(x_0,\frac{n-1}{n}x_0)$. Mēs iegūsim nevienādības

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x_0^2 &> h(x_0)+h(2x_0)\\ \frac{1}{9}x_0^2 &> h(x_0)+h\Big(\frac{3}{2}x_0\Big)\\ \frac{1}{16}x_0^2 &> h(x_0)+h\Big(\frac{4}{3}x_0\Big)\\ &\ldots\\ \frac{1}{n^2}x_0^2 &> h(x_0)+h\Big(\frac{n}{n-1}x_0\Big)\end{aligned}$$

Summējot šīs nevienādības iegūsim, ka:

$$x_0^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) > nh(x_0)+\text{kaut kādi nenegatīvi saskaitāmie}\geq nh(x_0)$$

Citiem vārdiem sakot, katram naturālam skaitlim n ir spēkā, ka

$$x_0^2\left(\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) > nh(x_0)$$

Noderīga lemma. Katram naturālam skaitlim n ir spēkā, ka

$$1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$$

Pierādījums. Ievērosim, ka $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$ visiem $n\geq 3$, līdz ar to:

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} &< 1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}=\\ &=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\\ &=2-\frac{1}{n}<2\end{aligned}$$

Lemma ir pierādīta.

Atgriežoties pie uzdevuma risinājuma, tad secinām, ka:

$$2x_0^2 > x_0^2\left(\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) > nh(x_0) \implies 2x_0^2 > nh(x_0)$$

Paņemot n pietiekami lielu, varam iegūt, ka $nh(x_0)\to\infty$, kas ir pretruna ar iegūto nevienādību, jo ieguvām, ka $nh(x_0)$ ir ierobežots no augšas. Līdz ar to secinām, ka mūsu pieņēmums ir aplams, tādēļ $h(x_0)=0$. Atkārtojot šo spriedumu katram reālam skaitlim x, iegūsim, ka $h(x)=0$, kas nozīmē, ka $g(x)=\frac{1}{x^2}\implies f(x)=\frac{1}{x}$ katram reālam skaitlim x, kas arī bija jāpierāda.

Komentārs. Diezgan būtiska uzdevuma daļa bija uzminēt atbildi. To izdarot, var viegli ievērot, ka atbildei izpildās īpašība, ka skaitļa x draugs ir pats skaitlis x. Tas motivē mūs pierādīt šo īpašību uzdevumā dotajai funkcijai. Tālāk pirmajā risinājumā pieņemot pretējo, ka $f(x)\neq\frac{1}{x}$, varam iegūt pretrunu, apskatot vienu lielumu. Savukārt otrajā risinājumā mēs ieviešam jaunas funkcijas, lai iegūtu globālu lielumu, ko apskatīt, kas noved pie pretrunas. Noslēgumā apskatīsim 2011. gada IMO pirmās dienas grūto uzdevumu.

5.piemērs. Funkcijai $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izpildās nevienādība

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

visiem reāliem skaitļiem x un y. Pierādīt, ka $f(x) = 0$ visiem $x \leq 0$.

Atrisinājums. Izvēlēsimies tādus x, y, lai saskaitāmais $f(x+y)$ kļūtu par $f(f(y))$. To var izdarīt, ja y vietā paņem $f(y) - x$, līdz ar to aplūkosim $P(x, f(y) - x)$

$$f(f(y)) \leq (f(y) - x)f(x) + f(f(x))$$

Jauniegūtajā sakarībā samainīsi skaitļus x un y vietām (izmantosim simetriju), lai iegūtu, ka

$$f(f(x)) \leq (f(x) - y)f(y) + f(f(y))$$

Saskaitīsim kopā abas iegūtās nevienādības

$$f(f(y)) + f(f(x)) \leq (f(y) - x)f(x) + (f(x) - y)f(y) + f(f(x)) + f(f(y))$$
$$xf(x) + yf(y) \leq 2f(x)f(y)$$

Būtu ērti saīsināt saskaitāmos šajā nevienādībā. Izvēlamies $yf(y) = 2f(x)f(y) \implies y = 2f(x)$. Pēdējā sakarībā ievietosim y vietā $2f(x)$, lai iegūtu, ka

$$xf(x) + 2f(x)f(2f(x)) \leq 2f(x)f(2f(x)) \implies xf(x) \leq 0$$

No pēdējās nevienādības izriet — ja $x > 0$, tad $f(x) \leq 0$, savukārt, ja $x < 0$, tad $f(x) \geq 0$.

Mums ir jāpierāda, ka $f(x) = 0$ visiem $x < 0$. Mēs zinām to, ka $f(x) \geq 0$ visiem $x < 0$. Pieņemsim, ka eksistē kaut kāds reāls skaitlis $x_0 < 0$ ar īpašību, ka $f(x_0) > 0$. Ievērosim, ka, tā kā visiem $x > 0$ ir spēkā, ka $f(x) \leq 0$, tad, ja $f(x_0) > 0$, mēs varam secināt, ka $f(f(x_0)) \leq 0$. Līdz ar to no $P(x_0, -1)$ varam iegūt

$$f(x_0 - 1) \leq -f(x_0) + f(f(x_0)) < 0 + 0 = 0$$

Taču, ja x_0 ir negatīvs skaitlis, tad $x_0 - 1$ arī ir negatīvs skaitlis. Tādā gadījumā no iepriekš iegūtajiem rezultātiem izriet, ka $f(x_0 - 1) \geq 0$, bet mēs esam ieguvuši, ka $f(x_0 - 1) < 0$ — pretruna. Līdz ar to visiem $x < 0$ esam ieguvuši, ka $f(x) = 0$.

Atliek pierādīt, ka $f(0) = 0$. Aplūkosim $P(-1, -1)$, lai iegūtu, ka

$$f(-1-1) \leq -f(-1) + f(f(-1)) \implies 0 \leq 0 + f(0) = f(0)$$

Aplūkosim $P(x, 0)$, lai iegūtu, ka

$$f(y) \leq yf(0) + f(f(0))$$

Mēs zinām, ka $f(0) \geq 0$. Pieņemsim, ka $f(0) > 0$, tad izvēlēsimies tādu y, lai $yf(0) + f(f(0)) < 0$ jeb $y < -\frac{f(f(0))}{f(0)}$. Piedevām mēs varam izvēlēties tādu y, lai tas ir arī negatīvs. Līdz ar to iegūstam, ka

$$f(y) \leq yf(0) + f(f(0)) < 0$$

Taču mēs pierādījām, ka negatīviem skaitļiem funkcijas vērtība ir 0 — pretruna. Līdz ar to mūsu pieņēmums ir aplams, kas nozīmē, ka $f(0) = 0$. Prasītais ir pierādīts.