Funkcionālnevienādības - atrisinājumi

1.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām izpildās nevienādība

$$f(x) + f(x+y) \leq f(xy) + f(y)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālnevienādību. Aplūkosim $P(x, 0)$:

$$f(x) + f(x) \leq f(0) + f(0) \implies f(x) \leq f(0)$$

Izmantosim simetrijas izjaukšanas ideju, apskatot $P(x, y)$ un $P(y, x)$

$$f(x) + f(x+y) \leq f(xy) + f(y)$$
$$f(y) + f(y+x) \leq f(yx) + f(x)$$

Saskaitot šīs nevienādības kopā, iegūsim, ka

$$2f(x+y) \leq 2f(xy) \implies f(x+y) \leq f(xy)$$

Iegūtajā sakarībā ievietosim $y = -x$, lai iegūtu, ka:

$$f(0) \leq f(-x^2)$$

Taču mēs no sākumā iegūtajiem rezultātiem zinām, ka $f(x) \leq f(0)$. Aizvietojot x ar $-x^2$, varam secnāt, ka

$$f(0) \leq f(-x^2) \leq f(0)$$

Tas nozīmē, ka $f(-x^2) = f(0)$, līdz ar to funkcija nepozitīvām vērtībām pieņem konstantu vērtību $f(0)$. Aplūkosim vēlreiz sakarību $f(x+y) \leq f(xy)$. Aizvietosim šajā sakarībā x, y ar $-t$, kur t ir pozitīvs skaitlis

$$f(-2t) \leq f(t^2)$$

Taču $-2t$ ir negatīvs skaitlis, līdz ar to iegūstam, ka $f(-2t) = f(0)$, taču mēs zinām, ka $f(t^2) \leq f(0)$, tāpēc esam ieguvuši, ka

$$f(0) = f(-2t) \leq f(t^2) \leq f(0)$$

Secinām, ka $f(t^2) = f(0)$. Tas nozīmē, ka funkcija pozitīvām vērtībām pieņem arī konstantu vērtību $f(0)$. Tā kā gan nenegatīviem, gan negatīviem skaitļiem funkcija pieņem vērtību $f(0)$, tad $f(x) = C$, kur C ir patvaļīga reāla konstante. Viegli pārbaudīt, ka visas šādas funkcijas tiešām der.

2.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām izpildās nevienādība

$$f(xy) \leq yf(x) + f(y)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālnevienādību. Aplūkosim $P(x, -1)$ un $P(-1, x)$

$$f(-x) \leq -f(x) + f(-1)$$
$$f(-x) \leq xf(-1) + f(x)$$

Saskaitot šīs divas nevienādības kopā, iegūsim, ka

$$2f(-x) \leq f(-1)(x + 1)$$

Šajā sakarībā aizvietojot x ar $-x$, iegūsim, ka

$$2f(x) \leq f(-1)(1 - x)$$

Savukārt no $P(0, x)$ iegūstam, ka

$$f(0) \leq xf(0) + f(x) \implies f(0)(1 - x) \leq f(x)$$

Secinām, ka

$$f(-1)(1 - x) \geq 2f(x) \geq 2f(0)(1 - x)$$

Aplūkosim šīs nevienādību ķēdes pirmo un trešo locekli

$$f(-1)(1 - x) \geq 2f(0)(1 - x)$$

Ievietojot $x = 0$, iegūsim, ka $f(-1) \geq 2f(0)$, savukārt, ievietojot $x = 2$, iegūsim, ka $f(-1) \leq 2f(0)$. Secinām, ka $f(-1) = 2f(0)$. Līdz ar to

$$2f(0)(1 - x) \geq 2f(x) \geq 2f(0)(1 - x)$$
$$2f(x) = 2f(0)(1 - x)$$
$$f(x) = f(0)(1 - x)$$

Esam ieguvuši, ka $f(x) = C - Cx$, kur C ir reāla konstante, līdz ar to

$$f(xy) \leq yf(x) + f(y)$$
$$C - Cxy \leq y(C - Cx) + C - Cy$$
$$C - Cxy \leq Cy - Cxy + C - Cy$$
$$C - Cxy \leq C - Cxy$$

Esam ieguvuši patiesu nevienādību, līdz ar to secinām, ka visas šādas funkcijas patiešām der.

3.uzdevums Ar $\mathbb{R}_{\geq 0}$ apzīmēsim nenegatīvo reālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, kurām izpildās nevienādība

$$x + 2\max\{y, f(x), f(z)\} \geq f(f(x)) + 2\max\{z, f(y)\}$$

visiem nenegatīviem reāliem skaitļiem x, y, z.

Atrisinājums. Ar $P(x, y, z)$ apzīmēsim doto funkcionālnevienādību. Ievērojam, ka $\max\{0, f(0)\} = f(0)$, jo funkcijas vērtības ir nenegatīvas un attiecīgi $f(0) \geq 0$. No $P(0, 0, 0)$ izriet, ka

$$2\max\{0, f(0), f(0)\} \geq f(f(0)) + 2\max\{0, f(0)\}$$
$$0 \geq f(f(0)) \implies f(f(0)) = 0$$

Izmantojot šo faktu un apskatot $P(f(0), y, z)$, iegūstam, ka

$$f(0) + 2\max\{y, f(f(0)), f(z)\} \geq f(f(f(0))) + 2\max\{z, f(y)\}$$
$$f(0) + 2\max\{y, 0, f(z)\} \geq f(0) + 2\max\{z, f(y)\}$$
$$\max\{y, f(z)\} \geq \max\{z, f(y)\}$$

Samainot y un z vietām, iegūstam, ka

$$\max\{z, f(y)\} \geq \max\{y, f(z)\} \implies \max\{y, f(z)\} \leq \max\{z, f(y)\}$$

kas kopā ar iepriekšējo rindiņu dod, ka

$$\max\{y, f(z)\} = \max\{z, f(y)\}$$

Aizvietosim pēdējā funkcionālvienādojumā y un z attiecīgi ar 0 un $f(0)$. Tā kā $f(f(0)) = 0$, mēs iegūstam, ka

$$\max\{0, f(f(0))\} = \max\{f(0), f(0)\}$$
$$\max\{0, 0\} = \max\{f(0), f(0)\}$$
$$f(0) = 0$$

Tagad tajā pašā funkcionālvienādojumā aizvietosim y ar 0. Atceroties, ka funkcija definēta nenegatīvām vērtībām un pieņem nenegatīvas vērtības, iegūsim

$$\max\{0, f(z)\} = \max\{z, f(0)\}$$
$$f(z) = z$$

kas ir patiesi visām reālām nenegatīvām z vērtībām. Viegli pārliecināties, ka funkcija $f(x) = x$ apmierina uzdevumā doto nevienādību.

4.uzdevums Atrast visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām izpildās nevienādība

$$(x-y)\big(f(x)+f(y)\big) \leqslant f\big(x^2-y^2\big)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Ar $P(x,y)$ apzīmēsim doto funkcionālnevienādību. No $P(0,0)$ izriet, ka $0 \leq f(0)$. Savukārt, aplūkojot $P(1,0)$, secinām, ka

$$(1-0)(f(1)+f(0)) \leq f(1) \implies f(0) \leq 0$$

Tātad $0 \leq f(0) \leq 0 \implies f(0)=0$. Veiksim acīmredzamas substitūcijas $P(x,0)$ un $P(0,x)$, no kurām iegūstam, ka

$$\begin{gathered} xf(x) \leq f(x^2) \\ -xf(x) \leq f(-x^2) \end{gathered}$$

Saskaitot šīs 2 nevienādības kopā, iegūsim, ka

$$0 \leq f(x^2)+f(-x^2)$$

Ievērosim, ka x^2 ir pozitīvs reāls skaitlis, turpretī $-x^2$ ir negatīvs reāls skaitlis, tāpēc secinām, ka $0 \leq f(t)+f(-t)$ katram reālam skaitlim t. No $P(x,-x)$ izriet, ka

$$2x(f(x)+f(-x)) \leq 0$$

Līdz ar to pozitīviem skaitļiem x ir spēkā, ka $f(x)+f(-x) \leq 0 \leq f(x)+f(-x)$, kas nozīmē, ka $f(x)+f(-x)=0 \implies -f(x)=f(-x)$ visiem reāliem skaitļiem x.

Aplūkosim $P(y,x)$ un izmantosim to, ka funkcija f ir nepāra:

$$\begin{gathered} (y-x)(f(y)+f(x)) \leq f(y^2-x^2) \\ (y-x)(f(y)+f(x)) \leq -f(x^2-y^2) \\ (x-y)(f(x)+f(y)) \geq f(x^2-y^2) \end{gathered}$$

Secinām, ka

$$\begin{gathered} (x-y)(f(x)+f(y)) \leq f(x^2-y^2) \leq (x-y)(f(x)+f(y)) \\ (x-y)(f(x)+f(y)) = f(x^2-y^2) \end{gathered}$$

Mēs esam ieguvuši funkcionālvienādojumu, kuru apzīmēsim $Q(x,y)$. No iepriekšējiem rezultātiem mēs zinām, ka funkcija ir nepāra un ka $f(0)=0$. Aplūkosim $Q(x,-y)$

$$\begin{gathered} (x+y)(f(x)+f(-y)) = f(x^2-y^2) \\ (x+y)(f(x)-f(y)) = f(x^2-y^2) \end{gathered}$$

Esam ieguvuši, ka

$$\begin{gathered} (x+y)(f(x)-f(y)) = f(x^2-y^2) = (x-y)(f(x)+f(y)) \\ (x+y)(f(x)-f(y)) = (x-y)(f(x)+f(y)) \\ xf(x)-xf(y)+yf(x)-yf(y) = xf(x)+xf(y)-yf(x)-yf(y) \\ 2yf(x) = 2xf(y) \\ yf(x) = xf(y) \end{gathered}$$

Pēdējā sakarībā ievietojot $y=1$, iegūsim, ka $f(x)=xf(1)$, kas nozīmē, ka atrisinājums ir formā $f(x)=Cx$, kur C ir reāla konstante. Viegli pārliecināties, ka visi šie atrisinājumi tiešām der.

5.uzdevums Pierādīt, ka neeksistē funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurai izpildās nevienādība

$$f(x - f(y)) \leq x - yf(x)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka eksistē funkcija, kas apmierina doto nevienādību visiem reāliem skaitļiem x un y. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālnevienādību. Aplūkosim $P(x, 0)$

$$f(x - f(0)) \leq x$$

Aizvietojot x ar $x + f(0)$, iegūsim, ka

$$f(x) \leq x + f(0)$$

Tagad apskatīsim substitūciju $P(f(x), x)$

$$f(0) \leq f(x) - xf(f(x))$$

Izmantosim novērtējumu, ko mēs ieguvām iepriekš par $f(x)$, lai iegūtu, ka

$$f(0) \leq f(x) - xf(f(x)) \leq x + f(0) - xf(f(x)) \implies xf(f(x)) \leq x$$

Pēdējā nevienādībā aplūkosim tādus x, kuri ir negatīvi. Dalot abas puses ar x iegūsim, ka

$$f(f(x)) \geq 1$$

Tā kā $f(x) \leq x + f(0)$, tad

$$f(f(x)) \leq f(x) + f(0) \leq x + 2f(0)$$

Līdz ar to katram negatīvam x ir jāizpildās nevienādībai

$$x + 2f(0) \geq f(f(x)) \geq 1 \implies x \geq 1 - 2f(0)$$

Taču $1-2f(0)$ ir fiksēts skaitlis. Mēs varam izvēlēties tādu negatīvu x, ka $x < 1-2f(0)$, kas ir pretruna. Līdz ar to meklētā funkcija neeksistē.

6.uzdevums Ar $\mathbb{R}_{\geq 0}$ apzīmēsim nenegatīvo reālo skaitļu kopu. Aplūkosim funkciju $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, kurai izpildās

- visiem reāliem skaitļiem $x, y \geq 0$ izpildās $f(x)f(y) \leq y^2 f(\frac{x}{2}) + x^2 f(\frac{y}{2})$
- visiem $0 \leq x \leq 1$ ir spēkā, ka $f(x) \leq 2023^{2023^{2023}}$

Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem $x \geq 0$ izpildās $f(x) \leq x^2$.

Atrisinājums. Aizstājot x un y ar nullēm pirmajā nevienādībā, iegūstam, ka $f(0)^2 \leq 0$, taču jebkura skaitļa kvadrātam jābūt nenegatīvam, no kā secinām, ka $f(0) = 0$.

Pierādīsim uzdevumā prasīto no pretēja jeb pieņemsim, ka eksistē tāds pozitīvs skaitlis x_0, ka $f(x_0) > x_0^2$.

Apgalvojums. $f(\frac{x_0}{2^n}) > 2^{2^n-2n-1}x_0^2$ visām naturālam n vērtībām.
Pierādījums. Aizvietojot x un y ar x_0 dotajā nevienādībā, iegūstam

$$f(x_0)^2 \leq 2x_0^2 f\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

un no x_0 definīcijas secinām, ka

$$(x_0^2)^2 < f(x_0)^2 \leq 2x_0^2 f\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

$$2x_0^2 f\left(\frac{x_0}{2}\right) > x_0^4$$

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) > \frac{x_0^2}{2} = 2^{2^1-2\cdot 1-1}x_0^2$$

jeb apgalvojums ir patiess pie $n = 1$. Tagad pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess pie $n = k$ jeb ka $f(\frac{x_0}{2^k}) > 2^{2^k-2k-1}x_0^2$ ir patiess kādai k naturālai vērtībai. Aizvietosim x un y ar $\frac{x_0}{2^k}$ dotajā nevienādībā. Iegūstam, ka

$$f\left(\frac{x_0}{2^k}\right)^2 \leq 2\left(\frac{x_0}{2^k}\right)^2 f\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right)$$

Ievērojam arī, ka

$$f\left(\frac{x_0}{2^k}\right) > 2^{2^k-2k-1}x_0^2 \implies f\left(\frac{x_0}{2^k}\right)^2 > (2^{2^k-2k-1}x_0^2)^2 = 2^{2^{k+1}-4k-2}x_0^4$$

Izmantojot šo faktu kopā ar iepriekšējo, iegūstam, ka

$$2\left(\frac{x_0}{2^k}\right)^2 f\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right) \geq f\left(\frac{x_0}{2^k}\right)^2 > (2^{2^k-2k-1}x_0^2)^2 = 2^{2^{k+1}-4k-2}x_0^4$$

$$f\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right) > (2^{2^{k+1}-4k-2}x_0^4)/(2\left(\frac{x_0}{2^k}\right)^2)$$

$$f\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right) > 2^{2^{k+1}-4k-2+2k-1}x_0^4$$

$$f\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right) > 2^{2^{k+1}-2(k+1)-1}x_0^2$$

kas nozīmē, ka apgalvojums ir patiess arī pie $n = k + 1$. Tā kā mēs pierādījām, ka apgalvojums ir patiess pie $n = 1$ un, ja pie $n = k$ apgalvojums ir patiess, tad tas arī ir patiess pie $n = k + 1$, secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālam n vērtībām. Tā kā $f(\frac{x_0}{2^n}) > 2^{2^n-2n-1}x_0^2$ visām naturālam n vērtībām, paņemot n pietiekami lielu, lai $\frac{x_0}{2^n} < 1$ un $2^{2^n-2n-1}x_0^2 > 2023^{2023^{2023}}$ mēs dabūsim

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) > 2^{2^n-2n-1}x_0^2 > 2023^{2023^{2023}}$$

kas dod pretrunu ar to, ka visiem $0 \leq x \leq 1$ ir spēkā, ka $f(x) \leq 2023^{2023^{2023}}$. Līdz ar to mēs esam pierādījuši, ka tāds x_0, ka $f(x_0) > x_0^2$, neeksistē jeb visiem reāliem skaitļiem $x \geq 0$ izpildās $f(x) \leq x^2$, kas bija jāpierāda.

7.uzdevums Ar $\mathbb{R}^+$ apzīmēsim pozitīvo reālo skaitļu kopu. Pierādīt, ka katrai funkcijai $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ var atrast reālus skaitļus $x>0$ un $y>0$ ar īpašību, ka

$$f(x+y)<yf(f(x)).$$

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, tad eksistē tāda funkcija $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, ka visiem pozitīviem reāliem skaitļiem x,y ir spēkā, ka

$$f(x+y)\geq yf(f(x))$$

Ar $P(x,y)$ apzīmēsim iegūto funkcionālnevienādību. Pierādīsim vairākus apgalvojumus, kas palīdzēs mums atrisināt uzdevumu.

1.apgalvojums. Funkcija f ir neierobežota.
Pierādījums. Aplūkosim patvaļīgu pozitīvu reālu skaitli M, tad no $P\big(x,\frac{M}{f(f(x))}\big)$ izriet, ka

$$f\left(x+\frac{M}{f(f(x))}\right)\geq M$$

Tas nozīmē, ka funkcija f var pieņemt pēc patikas lielas vērtības, kas pierāda prasīto.

2.apgalvojums. Visiem pozitīviem reāliem skaitļiem ir spēkā, ka $x+1\geq f(x)$.
Pierādījums. Ja kaut kādam pozitīvam reālam skaitlim x ir spēkā, ka $x\geq f(x)$, tad iegūstam, ka $x+1>x\geq f(x)$. Ja savukārt kaut kādam x ir spēkā, $f(x)>x$, tad varam pielietot mainīgā noīsināšanas triku, tas ir, mēs vēlamies, lai $x+y=f(x)$ jeb $y=f(x)-x$, kas ir lielāks par 0 un attiecīgi pieder definīcijas apgabalam. Līdz ar to aplūkojam $P(x,f(x)-x)$:

$$f(f(x))\geq(f(x)-x)f(f(x))\implies 1\geq f(x)-x\implies x+1\geq f(x)$$

Tas pierāda prasīto.

3.apgalvojums. Visiem pozitīviem reāliem skaitļiem x ir spēkā, ka $1\geq f(f(x))$.
Pierādījums. Ievērosim, ka no 2.apgalvojuma izriet, ka $x+y+1\geq f(x+y)$, līdz ar to secinām, ka

$$x+y+1\geq f(x+y)\geq yf(f(x))$$

Aplūkosim nevienādību $x+y+1\geq yf(f(x))$. To var pārrakstīt šādi:

$$\frac{x+1}{f(f(x))-1}\geq y$$

Ja kaut kādam x_0 ir spēkā, ka $f(f(x_0))>1$, tad esam ieguvuši, ka visiem pozitīviem reāliem skaitļiem y ir jābūt spēkā $\frac{x_0+1}{f(f(x_0))-1}\geq y$, taču tā ir pretruna, jo y varbūt pēc patikas liels.

4.apgalvojums Visiem reāliem skaitļiem x ir spēkā, ka $1+\frac{1}{f(f(1))}\geq f(x)$.
Pierādījums. Ja $1\geq f(x)$, tad $1+\frac{1}{f(f(1))}>1\geq f(x)$, kas arī bija jāpierāda. Ja savukārt kaut kādam x ir spēkā, ka $f(x)>1$, tad aplūkosim $P(1,f(x)-1)$:

$$f(f(x))\geq(f(x)-1)f(f(1))$$

Izmantojot 3. apgalvojumu, secinām, ka

$$1\geq f(f(x))\geq(f(x)-1)f(f(1))\implies 1\geq(f(x)-1)f(f(1))\implies 1+\frac{1}{f(f(1))}\geq f(x)$$

Tas pierāda prasīto.

No 4. apgalvojuma izriet, ka funkcija ir ierobežota, savukārt 1. apgalvojumā tika pierādīts, ka funkcija ir neierobežota. Pretruna, līdz ar to mūsu sākotnējais pieņēmums ir aplams, tāpēc prasītais izpildās.