Klasiskās nevienādības - atrisinājumi

1.uzdevums. Doti reāli pozitīvi skaitļi x, y, z ar īpašību, ka $xy + yz + zx = 27$. Pierādīt, ka

$$x + y + z \geq \sqrt{3xyz}.$$

Atrisinājums. No *AM-GM* nevienādības izriet, ka

$$27 = xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \implies 9 \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \implies 3^6 \geq x^2y^2z^2 \implies 27 = 3^3 \geq xyz$$

Līdz ar to varam secināt, ka $9 = \sqrt{81} \geq \sqrt{3xyz}$, kas nozīmē, ja mēs pierādām, ka $x + y + z \geq 9$, tad uzdevums ir atrisināts. Veiksim ekvivalentus pārveidojumus

$$\begin{gathered}
x + y + z \geq 9 \\
(x + y + z)^2 \geq 81 \\
(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \\
x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \\
2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \\
(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0
\end{gathered}$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo reālu skaitļu kvadrātu summa ir nenegatīvs lielums. Līdz ar to prasītā nevienādība ir pierādīta.

2.uzdevums. Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka $a+b+c=1$. Pierādīt, ka

$$\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{b+1}{\sqrt{b+ca}}+\frac{c+1}{\sqrt{c+ab}} \geq \frac{2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Atrisinājums. Ievērosim, ka

$$a+bc=a\cdot 1+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)$$

Analoģiski varam iegūt, ka $b+ca=(b+a)(b+c)$ un $c+ab=(c+a)(c+b)$. Līdz ar to mēs varam pārrakstīt doto nevienādību

$$\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{b+1}{\sqrt{b+ca}}+\frac{c+1}{\sqrt{c+ab}} \geq \frac{2}{a^2+b^2+c^2}.$$

$$\frac{(a+b)+(a+c)}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{(b+c)+(b+a)}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{(c+a)+(c+b)}{\sqrt{(c+b)(c+a)}} \geq \frac{2}{a^2+b^2+c^2}$$

No *AM-GM* nevienādības izriet, ka

$$(a+b)+(a+c) \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)} \implies \frac{(a+b)+(a+c)}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \geq 2$$

Analoģiski mēs varam iegūt, ka

$$\frac{(b+c)+(b+a)}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} \geq 2$$

$$\frac{(c+a)+(c+b)}{\sqrt{(c+b)(c+a)}} \geq 2$$

Līdz ar to varam secināt, ka

$$\frac{(a+b)+(a+c)}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{(b+c)+(b+a)}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{(c+a)+(c+b)}{\sqrt{(c+b)(c+a)}} \geq 2+2+2=6$$

Ja mēs pierādītu, ka

$$6 \geq \frac{2}{a^2+b^2+c^2} \implies 3(a^2+b^2+c^2) \geq 1,$$

tad uzdevums būtu atrisināts. Taču ievērosim, ka

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq 1$$

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

$$3a^2+3b^2+3c^2 \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ca$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo reālu skaitļu kvadrātu summa ir nenegatīvs lielums. Līdz ar to prasītā nevienādība ir pierādīta.

3.uzdevums. Doti pozitīvi reāli skaitļi x, y, z ar īpašību, ka $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Pierādīt, ka

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

Ievērosim, ka doto nosacījumu var pārrakstīt šādā veidā

$$\begin{gathered}
\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \\
-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-2 \\
1-\frac{1}{x}+1-\frac{1}{y}+1-\frac{1}{z}=1 \\
\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=1
\end{gathered}$$

Pārrakstīsim pierādāmo nevienādību

$$x+y+z \geq \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^{2}$$

No Koši nevienādības izriet, ka

$$1 \cdot (x+y+z)=\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right) \cdot (x+y+z) \geq \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^{2}$$

Līdz ar to secinām, ka prasītā nevienādība ir pierādīta.

4.uzdevums Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c. Pierādīt, ka

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b}+\frac{b^3+3c^3}{5b+c}+\frac{c^3+3a^3}{5c+a}\geq\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Atrisinājums. Pārrakstīsim doto nevienādību sekojošā veidā

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b}+\frac{b^3+3c^3}{5b+c}+\frac{c^3+3a^3}{5c+a}\geq\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$$
$$\frac{a^3}{5a+b}+\frac{3b^3}{5a+b}+\frac{b^3}{5b+c}+\frac{3c^3}{5b+c}+\frac{c^3}{5c+a}+\frac{3a^3}{5c+a}\geq\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$$
$$\left(\frac{a^3}{5a+b}+\frac{b^3}{5b+c}+\frac{c^3}{5c+a}\right)+3\left(\frac{b^3}{5a+b}+\frac{c^3}{5b+c}+\frac{a^3}{5c+a}\right)\geq\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

Pirmajos 2 šī mājasdarba uzdevumos mēs pierādījām, ka $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$. Šo faktu mēs izmantosim, lai atrisinātu uzdevumu. No Titu lemmas izriet, ka

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3}{5a+b}+\frac{b^3}{5b+c}+\frac{c^3}{5c+a}=\\
&=\frac{a^4}{5a^2+ab}+\frac{b^4}{5b^2+bc}+\frac{c^4}{5c^2+ac}\geq\\
&\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{5(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}\geq\\
&\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{6(a^2+b^2+c^2)}=\\
&=\frac{a^2+b^2+c^2}{6}
\end{aligned}$$

No Titu lemmas izriet arī, ka

$$\begin{aligned}
&\frac{b^3}{5a+b}+\frac{c^3}{5b+c}+\frac{a^3}{5c+a}=\\
&=\frac{b^4}{5ab+b^2}+\frac{c^4}{5bc+c^2}+\frac{a^4}{5ca+a^2}\geq\\
&\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{5ab+5bc+5ca+a^2+b^2+c^2}\geq\\
&\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{6(a^2+b^2+c^2)}=\\
&=\frac{a^2+b^2+c^2}{6}
\end{aligned}$$

Secinām, ka

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a^3}{5a+b}+\frac{b^3}{5b+c}+\frac{c^3}{5c+a}\right)+3\left(\frac{b^3}{5a+b}+\frac{c^3}{5b+c}+\frac{a^3}{5c+a}\right)\geq\\
&\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{6}=\\
&=\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)
\end{aligned}$$

Prasītā nevienādība ir pierādīta.

5.uzdevums. Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Pierādīt, ka

$$a^a bc + b^b ca + c^c ab \geq 27bc + 27ca + 27ab.$$

Atrisinājums. Pārveidosim pierādāmo nevienādību, abas puses izdalot ar abc, kas ir atšķirīgs no 0 skaitlis

$$a^a \cdot \frac{1}{a} + b^b \cdot \frac{1}{b} + c^c \cdot \frac{1}{c} \geq 27\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 27$$

No *AM-GM* ar svariem izriet, ka

$$a^a \cdot \frac{1}{a} + b^b \cdot \frac{1}{b} + c^c \cdot \frac{1}{c} \geq a^{a\cdot\frac{1}{a}} b^{b\cdot\frac{1}{b}} c^{c\cdot\frac{1}{c}} = abc$$

Līdz ar to, ja mēs pierādām, ka $abc \geq 27$, tad uzdevums ir atrisināts. Ievērosim, ka doto nosacījumu var pārrakstīt sekojošā veidā

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1 \implies ab+bc+ca = abc$$

No *AM-GM* nevienādības izriet, ka

$$abc = ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$
$$\sqrt[3]{abc} \geq 3$$
$$abc \geq 27$$

Prasītā nevienādība ir pierādīta.

6.uzdevums. Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$ un pozitīvi reāli skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pierādīt, ka

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \cdots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq n.$$

Atrisinājums. No *AM-GM* nevienādības izriet, ka

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \cdots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq n\sqrt[n]{\frac{(1+x_1^2)(1+x_2^2)\ldots(1+x_n^2)}{(1+x_1x_2)\ldots(1+x_nx_1)}}$$

No Koši nevienādības izriet, ka

$$\begin{gathered}(1+x_1^2)(1+x_2^2) \geq (1+x_1x_2)^2 \\ (1+x_2^2)(1+x_3^2) \geq (1+x_2x_3)^2 \\ \ldots \\ (1+x_n^2)(1+x_1^2) \geq (1+x_nx_1)^2\end{gathered}$$

Sareizinot šīs n nevienādības kopā, iegūsim, ka

$$\begin{gathered}\left((1+x_1^2)\ldots(1+x_n^2)\right)^2 \geq (1+x_1x_2)^2\ldots(1+x_nx_1)^2 \\ (1+x_1^2)(1+x_2^2)\ldots(1+x_n^2) \geq (1+x_1x_2)\ldots(1+x_nx_1) \\ \frac{(1+x_1^2)(1+x_2^2)\ldots(1+x_n^2)}{(1+x_1x_2)\ldots(1+x_nx_1)} \geq 1\end{gathered}$$

Līdz ar to secinām, ka

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \cdots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq n\sqrt[n]{\frac{(1+x_1^2)(1+x_2^2)\ldots(1+x_n^2)}{(1+x_1x_2)\ldots(1+x_nx_1)}} \geq n$$

7.uzdevums. Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c, d ar īpašību, ka $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}=3$. Pierādīt, ka

$$\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{bcd}+\sqrt[3]{cda}+\sqrt[3]{dab}\le\frac{4}{3}.$$

Atrisinājums. Pārveidosim doto nosacījumu

$$\begin{gathered}
\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}=3\\
-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}=-3\\
1-\frac{1}{a+1}+1-\frac{1}{b+1}+1-\frac{1}{c+1}+1-\frac{1}{d+1}=1\\
\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}=1
\end{gathered}$$

Apzīmēsim

$$\frac{a}{a+1}=x,\quad \frac{b}{b+1}=y,\quad \frac{c}{c+1}=z,\quad \frac{d}{d+1}=t$$

Tādā gadījumā esam ieguvuši, ka $x+y+z+t=1$. Izteiksim katru no skaitļiem a, b, c, d kā funkciju no x, y, z, t, tas ir,

$$\frac{a}{a+1}=x\implies a=ax+x\implies a(1-x)=x\implies a=\frac{x}{y+z+t}$$

Analoģiski varam iegūt, ka

$$b=\frac{y}{x+z+t},\quad c=\frac{z}{x+y+t},\quad d=\frac{t}{x+y+z}$$

Ievērosim, ka no *AM-GM* nevienādības izriet, ka

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{abc}&=\sqrt[3]{\frac{x}{y+z+t}\cdot\frac{y}{x+z+t}\cdot\frac{z}{x+y+t}}=\\
&=\sqrt[6]{\frac{(xyz)^2}{(y+z+t)^2(x+z+t)^2(x+y+t)^2}}\le\\
&\le\frac{1}{6}\left(\frac{y+z}{y+z+t}+\frac{x+z}{x+z+t}+\frac{y+x}{x+y+t}\right)
\end{aligned}$$

Analoģiski varam iegūt, ka

$$\begin{aligned}
\sqrt{bcd}&\le\frac{1}{6}\left(\frac{z+t}{x+z+t}+\frac{y+t}{x+y+t}+\frac{y+z}{x+y+z}\right)\\
\sqrt{cda}&\le\frac{1}{6}\left(\frac{t+x}{x+y+t}+\frac{x+z}{x+y+z}+\frac{z+t}{y+z+t}\right)\\
\sqrt{dab}&\le\frac{1}{6}\left(\frac{y+x}{x+y+z}+\frac{t+y}{y+z+t}+\frac{t+x}{x+z+t}\right)
\end{aligned}$$

Saskaitot šīs četras nevienādības kopā, iegūsim prasīto.