Leņķu izteikšana

Ilmārs Štolcers, Kims Georgs Pavlovs

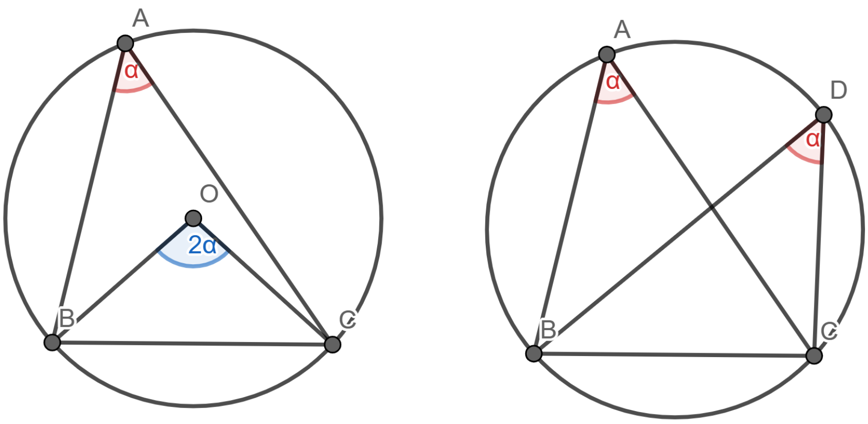
1 Ievads

Ģeometrijas stundās skolā parasti uzdevumos tiek prasīts aprēķināt kādu lielumu, ja zināmi daži nosacījumi. Olimpiāžu uzdevumos tipiski prasītais ir vispārīgāks - pierādīt, ka izpildās kāda īpašība. Kaut arī daudzi no faktiem, ko izmanto skolas uzdevumos, noder olimpiāžu uzdevumu risināšanā, lai veiksmīgi risinātu starptautisku sacensību uzdevumus, nepieciešams zināt daudz papildu faktu un metožu, ko skolas ģeometrijā neaplūko. Taču šajā materiālā mēs aplūkosim pamatmetodi ģeometrijā, ar kuru noteikti katram lasītājam jau kaut kādā mērā ir bijusi saskarsme un bez kuras labām iemaņām nav iespējams rēķināt lielāko daļu ģeometrijas uzdevumu - leņķu izteikšanu.

No lasītājiem tiek sagaidītas pamatzināšanas ģeometrijā - trijstūri, to leņķi un līnijas, ieskaitot augstumus, bisektrises, vidusperpendikulus un mediānas, kā arī ar šīm līnijām un to krustpunktiem saistītās īpašības, leņķi pie paralēlām taisnēm, vienādi un līdzīgi trijstūri, populārie četrstūru veidi, tostarp paralelogrami. Optimālā gadījumā ir zināšanas arī par ievilktiem un centra leņķiem riņķa līnijā, leņķiem pie pieskarēm un ievilktu četrstūru pazīmēm.

2 Leņķi un riņķa līnijas

Skolas kursā parasti viena no ģeometrijas tēmām ir leņķi riņķa līnijā. Diemžēl pēdējos gados veidojas uzskatāma tendence atteikties no daudziem ģeometrijas tematiem matemātikas apmācībā. Tādēļ aplūkosim pamatfaktus par leņķiem riņķa līnijā.



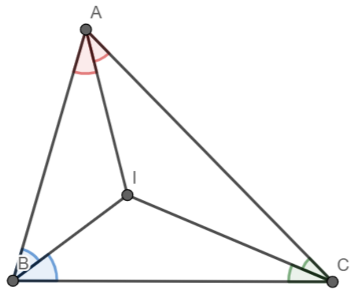
Pirmajā zīmējumā redzams, ka riņķa līnijā $\odot(ABC)$ ar centru punktā O uzzīmētais **centra leņķis** $\angle BOC$ ir 2 reizes lielāks par **ievilkto leņķi** $\angle BAC$, kur abi šie leņķi balstās uz loku $\widehat{BC}$. Tā ir vispārīga īpašība, ko var pierādīt, novelkot AO un izsakot leņķus.

Otrajā zīmējumā redzams secinājums, ko var iegūt no minētās īpašības - divi ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, ir vienādi (zīmējumā $\angle BAC = \angle BDC$). Tas izpildās tādēļ, ka attiecīgais centra leņķis abiem ievilktajiem leņķiem ir viens un tas pats.

Ģeometrijas kursā parasti tiek arī mācītas precīzas leņķu aprēķināšanas formulas, izmantojot riņķa līnijas loku lielumu, taču olimpiāžu uzdevumos parasti precīzi leņķu lielumi nav tik svarīgi - nozīmīgākas ir leņķu vienādības un cita veida to attiecības.

2.1 Vienkārši piemēri par leņķiem

1.piemērs. Trijstūrī $\triangle ABC$ punkts I ir bisektrišu krustpunkts. Pierādīt, ka $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$.



Atrisinājums. Izmantosim ierastos leņķu apzīmējumus bisektrišu krustpunkta gadījumā, ka $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ un $\angle BCA = 2\gamma$. Tādā gadījumā viegli redzams, ka

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ \implies \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \implies \beta + \gamma = 90^\circ - \alpha.$$

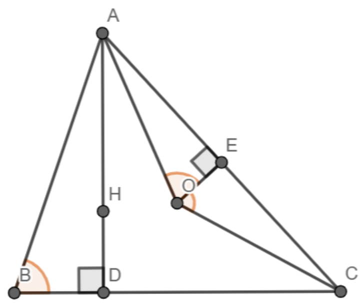
Aplūkojot trijstūri $\triangle BIC$, redzams, ka

$$\angle BIC = 180^\circ - \angle IBC - \angle ICB = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC,$$

kas bija jāpierāda.

Komentārs. Uzdevumos leņķu izteikšanu varētu vienkāršoti aprakstīt šādi - ir kāds leņķis, kuram mēs vēlētos uzzināt tā lielumu, taču par to trūkst informācijas. Lai to iegūtu, mēs meklējam veidus, kā caur citiem leņķiem izteikt meklēto leņķi, līdz tā lielums ir viennozīmīgi iegūts. Šajā uzdevumā leņķa lielumu izteikt palīdzēja **leņķu apzīmēšana**, kas var ievērojami atvieglot risināšanas gaitu, jo zīmējumā var viegli ar vienu burtu atzīmēt vienādus leņķu pārus.

2.piemērs. Dots trijstūris ABC, kura apvilktās riņķa līnijas centrs ir punkts O. Punkts D ir pamats augstumam, kas vilkts no virsotnes A. Pierādīt, ka $\angle BAD = \angle OAC$.

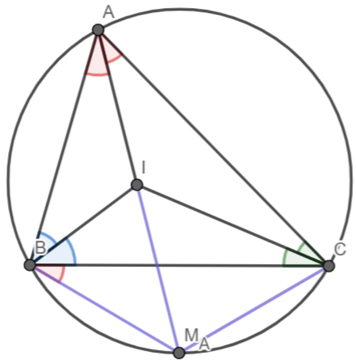


Atrisinājums. Pieņemsim, ka AD ir trijstūra $\triangle ABC$ augstums. Apzīmēsim $\angle ABC = \beta$. Tādā gadījumā $\angle BAD = 90^\circ - \beta$ (trijstūra leņķu summa $\triangle BAD$). Ievērosim, ka $\angle AOC = 2\beta$, jo tas ir centra leņķis, kas savelk loku $\overset{\frown}{AC}$. Atzīmēsim, ka trijstūris $\triangle AOC$ ir vienādsānu, jo $AO = OC$ kā rādiusi. Līdz ar to $\angle CAO = 90^\circ - \beta$. Secinām, ka $\angle BAD = \angle CAO$, kas arī bija jāpierāda.

Komentārs. Kad risināšanas gaitā ir jāpierāda, ka divi leņķi ir vienādi, pēc būtības pierādījums vienmēr balstās uz katra leņķa atkārtotu izteikšanu caur citiem leņķiem, līdz tiek iegūts, ka abus leņķus īstenībā var izteikt vienādā veidā. Ļoti bieži uzdevumos ir vērts izvēlēties sākotnēji doto figūru kā **atskaites figūru**, ar kuras leņķu palīdzību tiks izteikti prasītie leņķi. Šajā uzdevumā kā atskaites figūra ir izvēlēts $\triangle ABC$.

2.2 Ievilkti leņķi

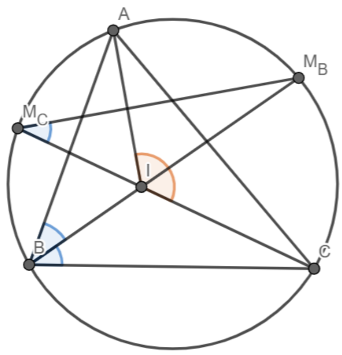
3.piemērs. Dots trijstūris ABC, kura ievilktās riņķa līnijas centrs ir punkts I. Punkts M_A ir viduspunkts lokam BC, kurš nesatur punktu A. Pierādīt, ka M ir trijstūra BIC apvilktās riņķa līnijas centrs.



Atrisinājums. Tā kā AI ir leņķa $\angle BAC$ bisektrise, tad tā dala loku, uz kuru balstās leņķis, divās vienādās daļās (jo ievilkta leņķa lielums ir puse no loka lieluma, uz kuru tas balstās, tāpēc vienādiem leņķiem atbilst vienādi loki). Tādēļ punkti A, I, M_A atrodas uz vienas taisnes. Vienādus lokus arī savelk vienādas hordas, tāpēc $M_AB = M_AC$.

Izmantosim ierasto konvenciju, ka $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ un $\angle BCA = 2\gamma$. Ievērosim, ka $\angle M_ABC = \angle M_AAC = \alpha$, jo tie balstās uz vienu loku, tātad $\angle M_ABI = \angle M_ABC + \angle CBI = \alpha + \beta$. Aplūkojot trijstūri $\triangle BIA$, redzams, ka ārējais leņķis $\angle BIM_A = \angle IBA + \angle BAI = \beta + \alpha$. Secinām, ka $\angle M_ABI = \angle BIM_A = \alpha + \beta$, līdz ar to $M_AB = M_AI$. Saliekot to kopā ar $M_AB = M_AC$, iegūstam, ka punkti B, I, C atrodas vienādā attālumā no punkta M_A jeb tie atrodas uz riņķa līnijas ar centru M_A un rādiusu M_AB, kas dod prasīto.

4.piemērs. Trijstūrī $\triangle ABC$ punkts I ir bisektrišu krustpunkts. Ar M_B un M_C apzīmēsim $\odot(ABC)$ mazo loku AC un AB viduspunktus. Pierādīt, ka $AI \perp M_BM_C$.

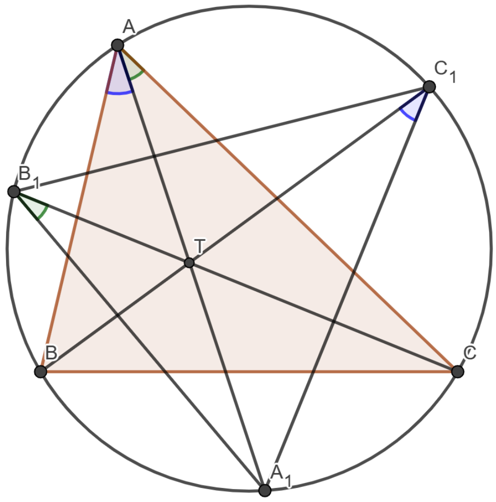


Atrisinājums. Iepriekšējā piemērā noskaidrojām, ka trijstūra leņķu bisektrises iet caur trijstūra apvilktās riņķa līnijas attiecīgo loku viduspunktiem. Tātad punkti B, I, M_B un C, I, M_C ir kolineāri. Līdz ar to varam izteikt $\angle CM_CM_B = \angle CBM_B = \frac{1}{2}\angle CBA$. Tā kā no 1.uzdevuma zināms, ka $\angle CIA = 90° + \frac{1}{2}\angle CBA$, tad $\angle AIM_C = 90° - \frac{1}{2}\angle CBA$. No tā viegli redzēt, ka taisnes AI un M_BM_C ir perpendikulāras, aplūkojot šo taišņu un nogriežņa M_CI veidoto trijstūri.

5.piemērs. Dots trijstūris ABC, kurā izvēlēts punkts T, kas apmierina šādas leņķu sakarības:

$$\angle BTC = \angle BAC + 60°, \quad \angle CTA = \angle CBA + 60°, \quad \angle ATB = \angle ACB + 60°.$$

Stari AT, BT, CT krusto trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju attiecīgi punktos A_1, B_1, C_1. Pierādīt, ka trijstūris $A_1B_1C_1$ ir vienādmalu.



Atrisinājums. Aprēķināsim leņķi $\angle B_1A_1C_1$. Ievērosim, ka $\angle B_1A_1T + \angle C_1A_1T = \angle B_1A_1C_1$. Ievērosim, ka no trijstūru B_1TA_1 un C_1TA_1 iekšējo leņķu summas izriet, ka

$$\begin{aligned}\angle B_1A_1C_1 &= \angle B_1A_1T + \angle C_1A_1T = \\ &= (180° - \angle A_1B_1T - \angle B_1TA_1) + (180° - \angle C_1TA_1 - \angle A_1C_1T) = \\ &= 360° - (\angle B_1TA_1 + \angle C_1TA_1) - (\angle A_1B_1T + \angle A_1C_1T)\end{aligned}$$

Ievērosim, ka $\angle B_1TA_1 = \angle ATC$ un $\angle C_1TA_1 = \angle ATB$. Līdz ar to

$$\begin{aligned}&\angle B_1TA_1 + \angle C_1TA_1 = \\ &= 60° + \angle ABC + 60° + \angle ACB = \\ &= 120° + (180° - \angle BAC) = \\ &= 300° - \angle BAC\end{aligned}$$

Ievērosim, ka $\angle A_1B_1T = \angle A_1AC$ un $\angle TC_1A_1 = \angle BAA_1$, līdz ar to

$$\angle A_1B_1T + \angle A_1C_1T = \angle A_1AC + \angle BAA_1 = \angle BAC.$$

Tādā gadījumā $\angle B_1A_1C_1$ vienkāršojas par

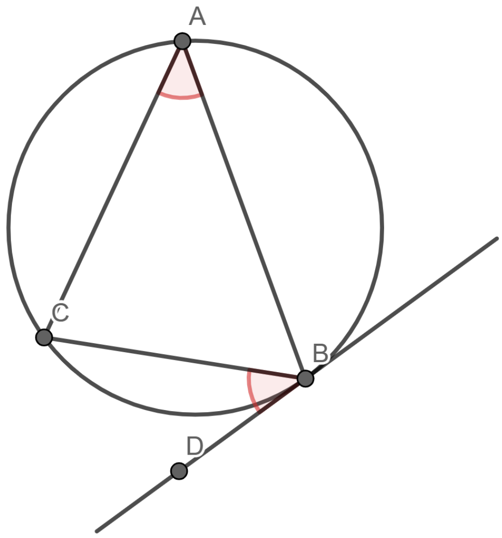
$$\begin{aligned}\angle B_1A_1C_1 &= 360° - (\angle B_1TA_1 + \angle C_1TA_1) - (\angle A_1B_1T + \angle A_1C_1T) = \\ &= 360° - (300° - \angle BAC) - \angle BAC = \\ &= 60°.\end{aligned}$$

Analoģiski varam pierādīt, ka atlikušie trijstūra $A_1B_1C_1$ leņķi ir $60°$, kas dod prasīto.

Komentārs. Bieži izmantota ideja uzdevumos ir **sadalīt leņķi mazākās daļās**, kuras uzdevumā var vieglāk izteikt. Šajā uzdevumā $\angle B_1A_1C_1$ tika izteikts mazākās daļās. Alternatīvs šīs pieejas izmantošanas veids ir izteikt leņķi kā starpību starp lielāku leņķi un lieko daļu.

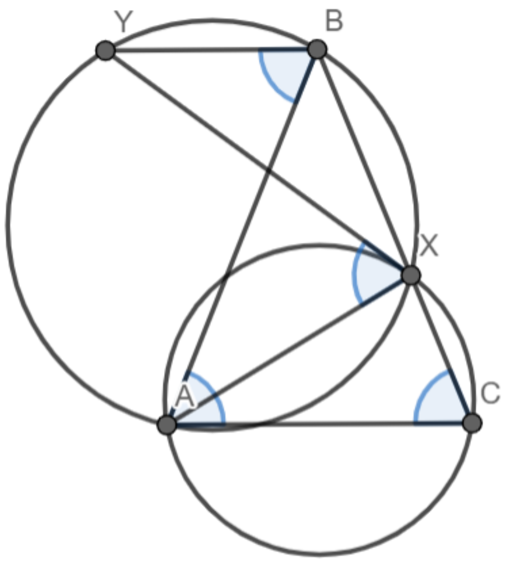
2.3 Pieskares leņķis

Aplūkosim situāciju, kurā trijstūrim ABC uzzīmēta apvilktā riņķa līnija un punktā B novilkta pieskare BD.



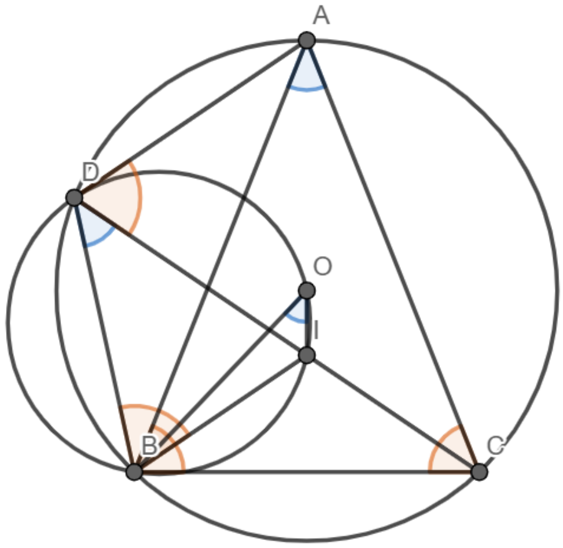
Tad izpildās leņķu vienādība $\angle CAB = \angle CBD$. Leņķi $\angle CBD$ ierasti sauc par *hordas-pieskares leņķi*. Šos leņķus daudz izmanto uzdevumos, kur ir dotas pieskares. Kā arī, ja caur trijstūra virsotni novilkta taisne, kura izpilda minēto leņķu vienādību, tad var secinājumu apgriezt un iegūt, ka minētā taisne tādēļ ir pieskare trijstūra apvilktajai riņķa līnijai. Pieskares būs svarīgas tālākajās ģeometrijas tēmās saistībā ar punkta pakāpi un projektīvo ģeometriju.

6.piemērs. Dots trijstūris ABC, kura apvilktās riņķa līnijas centrs ir punkts O. Punkts D ir pamats augstumam, kas vilkts no virsotnes A. Pierādīt, ka $\angle BAD = \angle OAC$.



Atrisinājums. Tā kā XY ir $\odot(AXC)$ pieskare, tad $\angle ACX = \angle YXA$. No otras puses, ir zināms, ka ap četrstūri $AXBY$ var apvilkt riņķa līniju, tāpēc $\angle YBA = \angle YXA$ kā leņķi, kas balstās uz vienu loku. Ievērosim, ka $\triangle ABC$ ir vienādsānu, kurā $BA = BC$, kas nozīmē, ka $\angle XCA = \angle BAC$. Secinām, ka $\angle BAC = \angle XCA = \angle YXA = \angle YBA$, kas nozīmē, ka $BY \parallel AC$, kas arī bija jāpierāda.

7.piemērs. Dots vienādsānu trijstūris, kuram $AB = AC$. Punkti O un I ir attiecīgi apvilktās un ievilktās riņķa līnijas centri. Trijstūrim $\triangle BIO$ apvilkto riņķa līniju apzīmēsim ar ω un pieņemsim, ka tā krusto $\odot(ABC)$ punktā D. Pierādīt, ka AD ir ω pieskare.



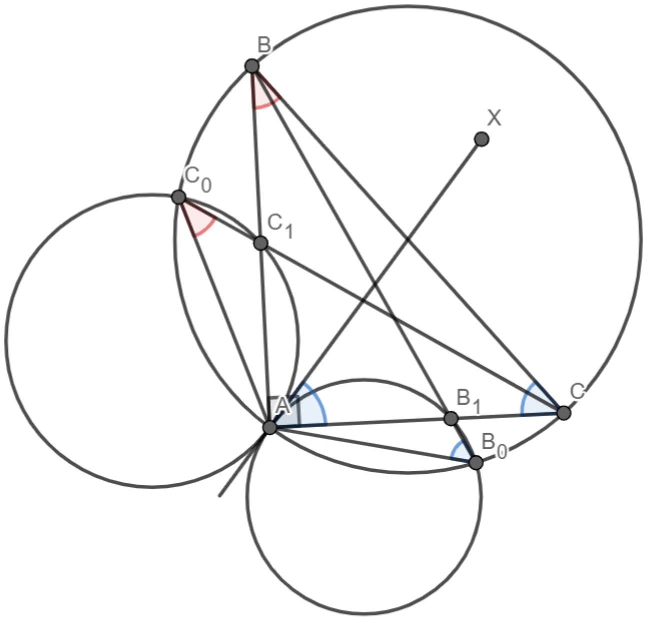
Atrisinājums. Vispirms pierādīsim, ka punkti D, I, C ir kolineāri (atrodas uz vienas taisnes). No riņķa līnijas $\odot(DOIB)$ zināms, ka $\angle BDI = \angle BOI$, jo tie balstās uz vienu loku. Tā kā taisne, kas iet caur punktiem A, O, I ir vienādsānu trijstūra $\triangle BAC$ vidusperpendikuls, tad simetrijas dēļ $\angle BOI = \frac{1}{2}\angle BOC$. Tā kā $\angle BOC$ ir centra leņķis riņķa līnijā $\odot(BAC)$, tad $\angle BOC = 2\angle BAC \implies \angle BOI = \angle BAC$. Varam arī ievērot, ka $\angle BDC = \angle BAC$, jo tie balstās uz vienu loku riņķa līnijā $\odot(BDAC)$. Tātad $\angle BDI = \angle BOI = \angle BAC = \angle BDC$, no kā varam secināt, ka punkti D, I, C atrodas uz vienas taisnes (no uzdevumā dotā acīmredzami, ka I un C atrodas vienā plaknes pusē un vienā virzienā no taisnes BD).

Tālāk apzīmēsim $\angle ACB = 2\alpha = \angle CBA$, jo trijstūris $\triangle ABC$ ir vienādsānu. No riņķa līnijas $\odot(BDAC)$ viegli ievērot, ka $\angle ACD = \angle ABD = \alpha$, jo tie balstās uz vienu loku un CI ir bisektrise. Līdz ar to $\angle IBD = \angle IBA + \angle ABD = \angle ICB + \angle ACD = \angle ACB = 2\alpha$, kur atkārtoti tika izmantots fakts, ka BI un CI ir bisektrises vienādsānu trijstūrī. Papildus no minētās riņķa līnijas varam iegūt, ka $\angle CDA = \angle CBA = 2\alpha$, jo minētie leņķi balstās uz vienu loku. Tātad $\angle CDA = \angle IBD = 2\alpha$, kas no apgrieztās pieskares īpašības nozīmē, ka AD ir $\odot(DOIB)$ pieskare, kas pierāda prasīto.

Komentārs. Pirmkārt, šajā uzdevumā varam redzēt, kā var pierādīt, ka **trīs punkti atrodas uz vienas taisnes** - nepieciešams pierādīt, ka divas taisnes atrodas vienādā leņķī pret trešo taisni, tātad tās ir sakrītošas (šeit tikai jāpiedomā, lai leņķu rotācija būtu vienāda, jo potenciāli tādu pašu leņķi varētu dot simetriska taisne no pretējās puses).

Otrkārt, šī uzdevuma viena no pamatidejām ir pierādīt, ka punkts D īstenībā atrodas uz $\angle ACB$ bisektrises, kas ievērojami atvieglo tālāko leņķu izteikšanu. Grūtākos ģeometrijas uzdevumos ar šādu īpašību uzminēšanu ir jāsaskaras bieži, jo nepieciešams ievērot lietas, kas nav dotas un ko nevar triviāli secināt no dotā. Gan šajā uzdevumā, gan līdzīgos to pamanīt var palīdzēt **precīzs un liels zīmējums**, kurā var izvirzīt hipotēzes un mēģināt tās pierādīt.

8.piemērs. Dots taisnleņķa trijstūris $\triangle ABC$, kuram $\angle BAC = 90°$. Uz $\odot(ABC)$ mazajiem lokiem $\widehat{AB}$ un $\widehat{AC}$ ir izvēlēti patvaļīgi punkti C_0 un B_0. Taisne BB_0 krusto nogriezni AC punktā B_1, savukārt taisne CC_0 krusto nogriezni AB punktā C_1. Pierādīt, ka riņķa līnijas AB_1B_0 un AC_1C_0 pieskaras viena otrai.

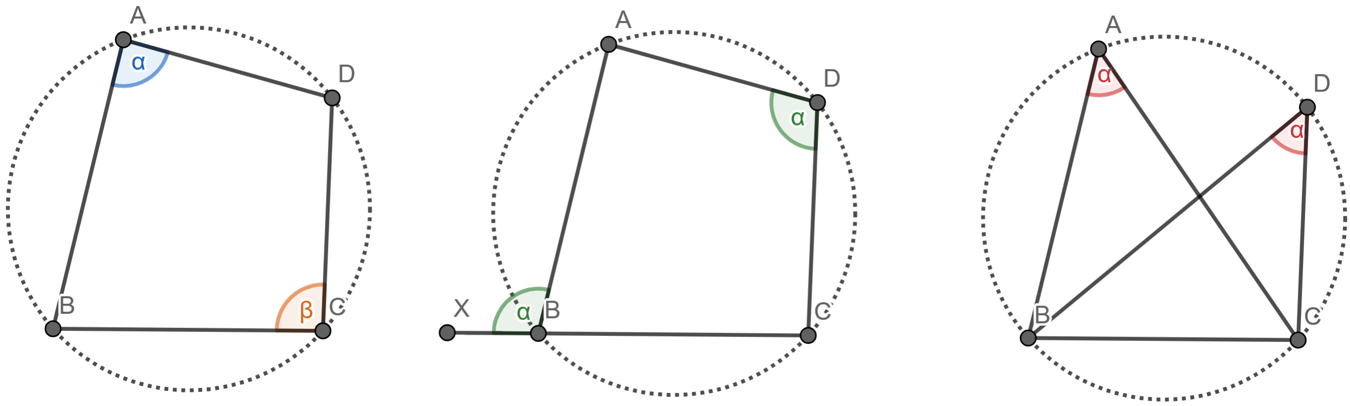


Atrisinājums. Pieņemsim, ka AX ir $\odot(AB_0B_1)$ pieskare punktā A. Tādā gadījumā $\alpha = \angle CAX = \angle B_1B_0A$. No otras puses, $\angle BCA = \angle B_1B_0A = \alpha$ kā leņķi, kas balstās uz viena loka. Tā kā $\triangle BAC$ ir taisnleņķa, tad $\angle ABC = 90° - \alpha$. Ievērosim, ka $\angle ABC = \angle AC_0C = \angle AC_0C_1 = 90° - \alpha$, taču $\angle C_1AX = \angle A - \angle CAX = 90° - \alpha$. Secinām, ka $\angle C_1C_0A = \angle C_1AX = 90° - \alpha$. No apgrieztās pieskares īpašības izriet, ka AX ir $\odot(C_0C_1A)$ pieskare. Tas nozīmē, ka abas riņķa līnijas $\odot(C_1C_0A)$ un $\odot(B_1B_0A)$ pieskaras punktā A, kas arī bija jāpierāda.

Komentārs. Šajā uzdevumā bija nepieciešams pierādīt, ka **divas riņķa līnijas pieskaras** - to parasti veic pēc uzdevuma risinājumā izmantotās shēmas, kurā pierāda, ka divām riņķa līnijām vienā un tajā pašā punktā ir sakrītošas pieskares. Tādā gadījumā var no simetrijas pierādīt, ka abām riņķa līnijām ir tieši viens kopīgs punkts, taču to parasti olimpiādēs atsevišķi nepierāda un pieņem kā vispārzināmu faktu.

3 Ievilkti četrstūri

Olimpiāžu ģeometrijas uzdevumos starptautiskās sacensībās visbiežāk meklētās un izmantotās figūras ir ievilkti četrstūri. Bez veiksmīgas to pamanīšanas un izmantošanas nav iespējams vairumā rēķināt jebkuras grūtības uzdevumus. Ievilkto četrstūru nozīmība būs labāk uzskatāma tālākajos piemēros, taču tie ir ļoti spēcīgs rīks, lai pa zīmējumu dažos soļos pārvietotu un izteiktu vienādus leņķus vietās, kur uzdevumā dotais nepalīdz. Lai tos veiksmīgi izmantotu, aplūkosim to noteikšanas pazīmes.



1.zīmējumā redzama klasiskā ievilktu četrstūru īpašība - ja četrstūra pretējo leņķu summa ir 180°, tad tas ir ievilkts riņķa līnijā (zīmējumā $\angle BAD + \angle BCD = 180°$). Šī īpašība darbojas arī apgrieztā virzienā.

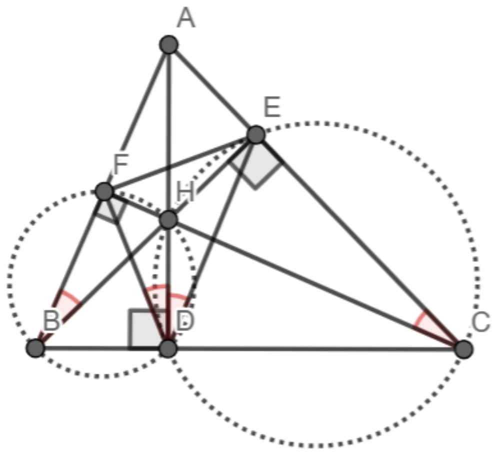
2.zīmējumā redzams papildinājums 1.īpašībai, izmantojot blakusleņķus. Ja pretējā leņķa blakusleņķis ir vienāds ar sākotnējo leņķi, tad četrstūris ir ievilkts riņķa līnijā (zīmējumā $\angle ADC = \angle ABX$). Šo īpašību bieži vien ir vieglāk pamanīt, jo parasti zīmējumā atzīmē vienādus leņķus. Arī šī īpašība darbojas apgrieztā virzienā.

3.zīmējumā redzama īpašība, kura ir iegūstama no iepriekš aplūkotajām ievilktu leņķu īpašībām. Ja divi leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu nogriezni, ir vienādi, tad attiecīgais četrstūris ir ievilkts riņķa līnijā (zīmējumā $\angle BAC = \angle BDC$). Šīs īpašības apgriezto versiju mēs redzējām jau iepriekš.

Lai ievilktus četrstūrus veiksmīgi izmantotu uzdevumā, ir nepieciešams apzināti tos meklēt. Visbiežāk var pamanīt vienu no lietām - vai nu kādi četri punkti *izskatās*, ka tie varētu atrasties uz vienas riņķa līnijas, vai arī, analizējot uzdevumā pierādāmo, izdodas iegūt, ka četrstūrim būtu jābūt ievilktam, lai izpildītos prasītais. Tālākie piemēri ir balstīti uz ievilktu četrstūru meklēšanu.

3.1 Meklēšana zīmējumā

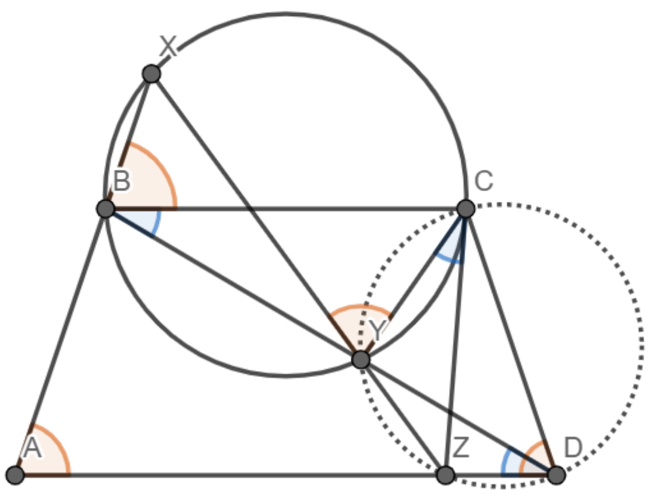
1.piemērs. Trijstūrī $\triangle ABC$ novilkti augstumi AD, BE, CF, kuri krustojas punktā H. Pierādīt, ka punkts H ir $\triangle DEF$ bisektrišu krustpunkts.



Atrisinājums. Tā kā $\angle BFC = \angle ADB = \angle BEC = 90°$, tad ap četstūriem $BFHD, DHEC$ un $BFEC$ var apvilkt riņķa līnijas, jo to pretējo leņķu summa ir $180°$. Tas nozīmē, ka $\angle FBE = \angle FCE$ kā leņķi, kas balstās uz vienu loku. No otras puses, tā paša iemesla dēļ $\angle FBE = \angle FDH$ un $\angle FCE = \angle HDE$. Varam secināt, ka $\angle FDH = \angle EDH$, kas nozīmē, ka DH ir leņķa $\angle FDE$ bisektrise. Analoģiski var pierādīt, ka FH, EH ir leņķu $\angle EFD$ un $\angle FED$ bisektrises, kas nozīmē, ka punkts H ir $\triangle DEF$ ir bisektrišu krustpunkts, kas arī bija jāpierāda.

Komentārs. Šajā uzdevumā uzskatāmi redzama bieža ideja ģeometrijas uzdevumos - ja zīmējumā ir daudz leņķu, kas ir $90°$ grādus lieli, tad zīmējumā var atrast daudz četrstūru, kas ir ievilkti riņķa līnijā. Šeit arī redzama jēga ievilkto četrstūru meklēšanai - tie ļauj pa zīmējumu ļoti ātri iegūt daudz vienādu leņķu pāru, kurus var izmantot, lai izteiktu meklētos leņķus. To uzskatāmi ilustrēs arī visi nākamie piemēri.

2.piemērs. Dota vienādsānu trapece $ABCD$, kur $BC \parallel AD$. Riņķa līnija ω, kas iet caur punktiem B un C, krusto nogriezni BD punktā Y, bet nogriežņa AB pagarinājumu punktā X. Pieskare punktā C riņķa līnijai ω krusto nogriezni AD punktā Z. Pierādīt, ka punkti X, Y, Z atrodas uz vienas taisnes.



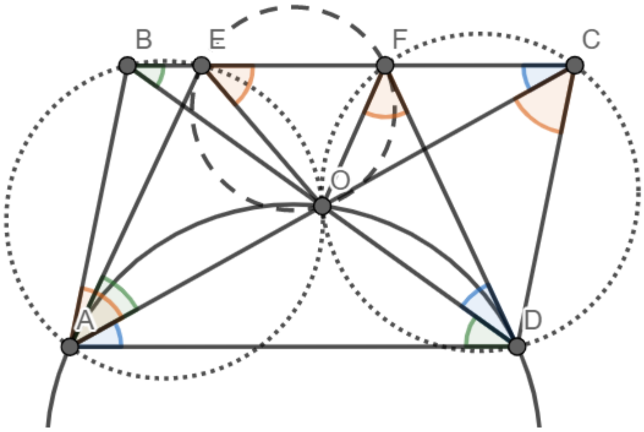
Atrisinājums. Atrisinājums sastāvēs no diviem soļiem.

1.solis Ap četrstūri $CYZD$ var apvilkt riņķa līniju.
Pierādījums: No pieskares īpašības izriet, ka $\angle YBC = \angle YCZ$. No otras puses, $BC \parallel AD$, tāpēc $\angle YBC = \angle YDA$. Līdz ar to secinām, ka $\angle YCZ = \angle YDA$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $CYZD$ var apvilkt riņķa līniju.

2.solis: Punkti X, Y, Z atrodas uz vienas taisnes.
Pierādījums: Apzīmēsim, $\angle CDA = \alpha$. Tā kā ap četrstūri $CYZD$ var apvilkt riņķa līniju, $\angle ZYC = 180° - \angle CDZ = 180° - \alpha$. No otras puses, $\angle ABC = 180° - \alpha$ (no vienādsānu trapeces $ABCD$). Ievērosim, ka ap četrstūri $XBYC$ var apvilkt riņķa līniju, tāpēc $\angle CYX = 180° - \angle ABC = \alpha$. Līdz ar $\angle CYX + \angle CYZ = 180°$, kas nozīmē, ka punkti X, Y, Z atrodas uz vienas taisnes, k.b.j.

Komentārs. Šajā uzdevumā redzams vēl viens veids, kā pierādīt, ka trīs punkti atrodas uz vienas taisnes - pierādīt, ka divu leņķu, kuri atrodas blakus, summa ir $180°$, tātad īstenībā tie ir blakusleņķi un to malas veido vienu un to pašu taisni.

3.piemērs. Dots paralelograms $ABCD$, kura diagonāles krustojas punktā O. Uz nogriežņa BC ir atlikti tādi punkti E un F, ka taisnes AE un DF pieskaras $\odot(AOD)$. Pierādīt, ka taisnes AE un DF ir arī $\odot(EOF)$ pieskares.

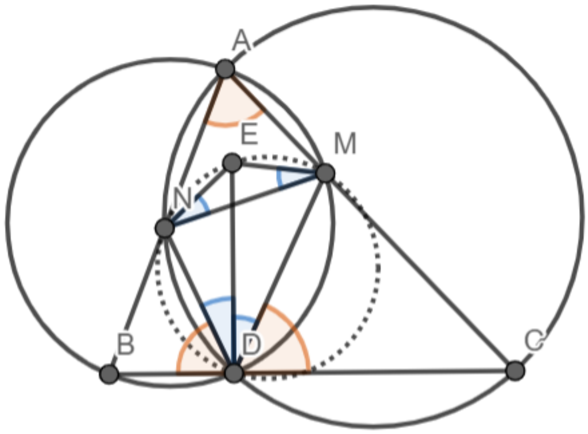


Atrisinājums. Atrisinājums sastāvēs no diviem soļiem.

1.solis Ap četrstūriem $ABEO$ un $OFCD$ var apvilkt riņķa līnijas.
Pierādījums: Tā kā EA ir $\odot(AOD)$ pieskare, tad $\angle EAO = \angle ODA$. No otras puses, mēs zinām, ka $BC \parallel AD$, tāpēc $\angle ODA = \angle OBE$. Tas nozīmē, ka $\angle OBE = \angle OAE$, līdz ar to ap četrstūri $ABEO$ var apvilkt riņķa līniju. Analoģiski pierāda to, ka ap četrstūri $OFCD$ var apvilkt riņķa līniju.

2.solis AE un DF ir $\odot(OEF)$ pieskares.
Pierādījums: Ievērosim, ka tā kā ap četrstūri $OFCD$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle OFD = \angle OCD$. No otras puses, mēs zinām, ka $AB \parallel CD$, tāpēc $\angle OCD = \angle OAB$. Taču ap četrstūri $ABEO$ var apvilkt riņķa līniju, tāpēc $\angle OAB = \angle OEF$. Varam secināt, ka $\angle OFD = \angle OEF$. No apgrieztās pieskares īpašības izriet, ka DF ir $\odot(EFO)$ pieskare. Analoģiski var pierādīt, ka DF ir $\odot(EFO)$ pieskare, k.b.j.

4.piemērs. Dots šaurleņķu trijstūris ABC. Uz tā malas BC ir izvēlēts patvaļīgs punkts D. Zināms, ka $\odot(ADB)$ krusto malu AC punktā M, bet $\odot(ADC)$ krusto malu AB punktā N. Ar E apzīmēsim $\triangle AMN$ apvilktās riņķa līnijas centru. Pierādīt, ka $ED \perp BC$.

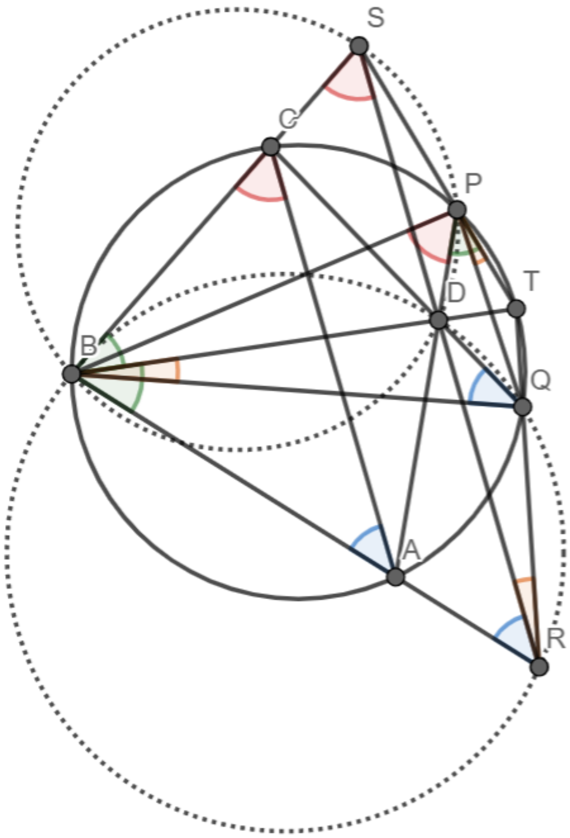


Atrisinājums. Tā kā ap četrstūri $AMDB$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle MDC = \angle A$. Līdzīgi varam spriest, ka tā kā ap četrstūri $ANDC$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle NDB = \angle A$. Tas nozīmē, ka $\angle MDN = 180^\circ - \angle NDB - \angle MDC = 180^\circ - 2\angle A$. Atcerēsimies, ka punkts E ir $\triangle AMN$ apvilktās riņķa līnijas centrs, līdz ar to $\angle NEM = 2\angle A$ kā centra leņķis. Ievērosim, ka $\angle NEM + \angle NDM = 2\angle A + 180^\circ - 2\angle A = 180^\circ$, tāpēc ap četrstūri $EMDN$ var apvilkt riņķa līniju.

Tā kā punkts E ir $\triangle EMN$ apvilktās riņķa līnijas centrs, tad $EM = EN$ un $\angle NEM = 2\angle A$, kas nozīmē, ka $\angle EMN = 90^\circ - \angle A$. Līdz ar to $\angle EMN = \angle EDN = 90^\circ - \angle A$ kā leņķi, kas balstās uz viena loka. Tas nozīmē, ka $\angle EDB = \angle EDN + \angle NDB = 90^\circ - \angle A + \angle A = 90^\circ$, kas ļauj mums secināt, ka $ED \perp BC$, kas arī bija jāpierāda.

Komentārs. Šis uzdevums ir laba ilustrācija par to, ka bieži vien bez ievilktajiem četrstūriem nemaz īsti nevar pierādīt uzdevumā prasīto, taču pašus ievilktos četrstūrus tik viegli uzdevumā nevar pamanīt. Tādēļ jebkurā ģeometrijas uzdevumā vienmēr ir nepieciešams pievērst uzmanību, vai kāds iegūtais fakts var palīdzēt iegūt ievilktus četrstūrus.

5.piemērs. Dots izliekts četrstūris $ABCD$ ar īpašību, ka punkts D atrodas $\odot(ABC)$ iekšpusē un atrodas uz $\angle ABC$ bisektrises. Taisnes AD un CD krusto $\odot(ABC)$ attiecīgi punktos P un Q. Savukārt taisne, kas vilkta caur punktu D paralēli taisnei AC, krusto taisnes AB un BC attiecīgi punktos R un S. Pierādīt, ka punkti P, Q, R, S atrodas uz vienas riņķa līnijas.



Atrisinājums. Atrisinājums sastāvēs no vairākiem soļiem.

1.solis: Ap četrstūriem $DBRQ$ un $DBSP$ var apvilkt riņķa līnijas.
Pierādījums: Ievērosim, ka $\angle BAC = \angle BRD$ un $\angle BCA = \angle BSD$, jo $AC \parallel RS$. No otras puses, mēs zinām, ka $\angle BAC = \angle BQC = \angle BQD$ un $\angle BCA = \angle BPA = \angle BPD$ kā leņķi, kas balstās uz viena loka. Līdz ar to $\angle BRD = \angle BQD$ un $\angle BSD = \angle BPD$, kas nozīmē, ka ap četrstūriem $BRQD$ un $BQPS$ var apvilkt riņķa līnijas, jo vienādie leņķi balstās uz vienu nogriezni, kas arī bija jāpierāda.

Pieņemsim, ka BD krusto $\odot(ABC)$ punktā T.

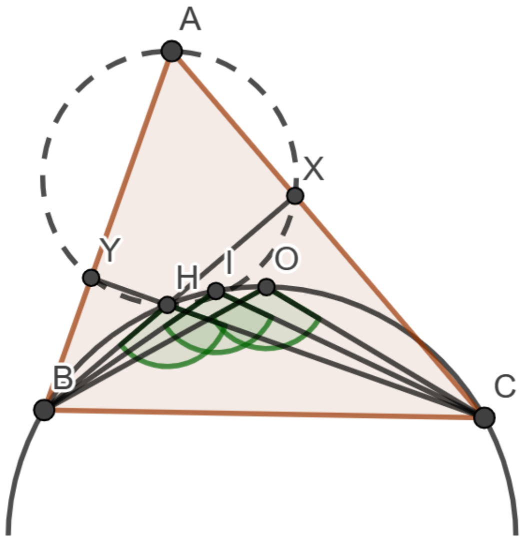
2.solis: Punkti R, Q, T un S, P, T ir kolineāri (atrodas uz vienas taisnes).
Pierādījums: Pieņemsim, ka $\angle ABD = \angle DBC = \alpha$ (BD ir leņķa $\angle ABC$ bisektrise). Tā kā ap četrstūri $BRQD$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle RQD = 180° - \angle ABD = 180° - \alpha$. No otras puses, mēs zinām, ka $\angle DBC = \angle TBC = \angle CQT = \angle DQT = \alpha$ kā leņķi, kas balstās uz vienu loku. Līdz ar to $\angle RQT = \angle RQD + \angle DQT = 180° - \alpha + \alpha = 180°$. Tas nozīmē, ka punkti R, Q, T atrodas uz vienas taisnes. Analoģiski pierāda, ka punkti S, P, T atrodas uz vienas taisnes.

Atliek ievērot, ka tā kā ap četrstūri $BRQD$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle DBQ = \angle DRQ = \angle SRQ$. No otras puses, mēs zinām, ka $\angle DBQ = \angle QPT$, jo tie balstās uz vienu loku. Secinām, ka $\angle SRQ = \angle QPT$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $PQRS$ var apvilkt riņķa līniju, kas arī bija jāpierāda.

3.2 Piecu punktu triks

Reizēm uzdevumos izdodas veiksmīgi atrast kādu četrstūri, kuram būtu jābūt ievilktam. Tomēr izrādās, ka ap kādu no četrstūra virsotnēm leņķus izteikt ir ļoti grūti, tādēļ no ierastās leņķu izteikšanas neizdodas pierādīt, ka šie četri punkti ir uz vienas riņķa līnijas. Tādā gadījumā palīgā var nākt *piecu punktu triks* - pierādīt, ka uz meklētās riņķa līnijas atrodas vēl piektais punkts. Ņemot šo punktu ar trijiem no sākotnējiem četriem punktiem, var pierādīt, ka veidojas vairāki citi ievilkti četrstūri, kuri īstenībā ir ievilkti vienā un tajā pašā riņķa līnijā, tādējādi pierādot sākotnēji vēlamos četrus punktus uz riņķa līnijas. Šis princips darbojas, jo jebkuri 3 punkti atrodas uz vienas unikālas riņķa līnijas.

6.piemērs. Dots trijstūris ABC, kurā $\angle BAC = 60°$. Ar punktiem H, I, O apzīmēsim attiecīgi $\triangle ABC$ ortocentru (augstumu krustpunktu), incentru (bisektrišu krustpunktu) un apvilktās riņķa līnijas centru. Pierādīt, ka trijstūra HIO apvilktā riņķa līnija iet caur punktu B.



Atrisinājums. Pirmajā materiāla piemērā mēs pierādījām, ka $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC = 120°$. Ievērosim, ka $\angle BOC = 2\angle BAC = 120°$ kā centra leņķis. Esam ieguvuši, ka $\angle BIC = \angle BOC = 120°$, kas nozīmē, ka punkti B, I, O, C atrodas uz vienas riņķa līnijas.

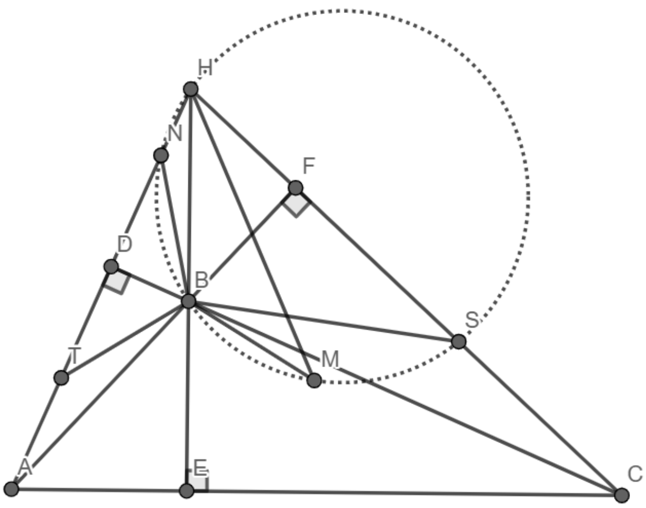
Pieņemsim, ka BH krusto AC punktā X un CH krusto AB punktā Y. Ievērosim, ka $\angle HXA = \angle HYA = 90°$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $AXHY$ var apvilkt riņķa līniju. Tādā gadījumā $\angle BAC + \angle XHY = 180° \implies \angle BHC = \angle XHY = 180° - 60° = 120°$. Tas nozīmē, ka $\angle BHC = \angle BOC = 120°$, kas nozīmē, ka punkti B, H, O, C atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Esam ieguvuši, ka punkti B, H, O, C un B, I, O, C atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas nozīmē, ka visi 5 punkti B, H, I, O, C atrodas uz vienas riņķa līnijas (ko unikāli definē punkti B, O, C), kas dod prasīto.

Komentārs. Šajā uzdevumā piektais punkts ir C, ar kura palīdzību var daudz vieglāk iegūt ievilktos četrstūrus $BHOC$ un $BIOC$, jo leņķu $\angle BIC$, $\angle BOC$ un $\angle BHC$ lielums ir labi zināms jebkuram pieredzējušam risinātājam.

Jāatzīmē, ka patvaļīgā trijstūrī minētie 5 punkti neatrodas uz vienas riņķa līnijas - šajā uzdevumā to nodrošināja īpašais nosacījums, ka $\angle BAC = 60°$.

7.piemērs. Dots platleņķa trijstūris ABC ar plato leņķi $\angle B$ un augstumiem AD, BE, CF. Punkti T un S ir attiecīgi nogriežņu AD un CF viduspunkti. Punkti M un N ir attiecīgi punkta T simetriskie attēlojumi pāri taisnēm BE un BD. Pierādīt, ka S atrodas uz trijstūra BMN apvilktās riņķa līnijas.



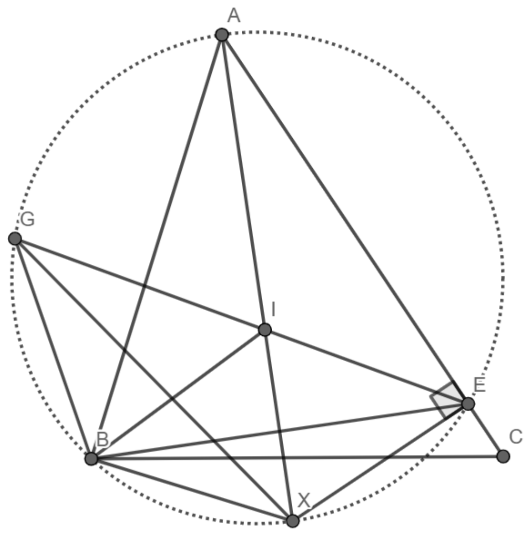
Atrisinājums. Definēsim punktu H kā taišņu AD un FC krustpunktu. Viegli ievērot, ka punkts B ir trijstūra AHC augstumu krustpunkts, tāpēc punkti E, H, B atrodas uz vienas taisnes.

1.solis: Ap četrstūri $BNHM$ var apvilkt riņķa līniju.
Pierādījums: Ievērosim, ka $BT = BN$, tāpēc $\angle BTN = \angle BNT$. No otras puses, $HT = HM$, tāpēc no simetrijas apsvērumiem izriet, ka $\angle BTH = \angle BMH$. Līdz ar to $\angle BNT = \angle BMH$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $HNBM$ var apvilkt riņķa līniju.

2.solis: Ap četrstūri $HNBS$ var apvilkt riņķa līniju.
Atrisinājums: Ievērosim, ka ap četrstūri $ADFC$ var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle ADC = \angle AFC = 90°$. Līdz ar to $\angle DAB = \angle FCB$ kā leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka. Līdz ar to $\triangle ADB \sim \triangle CFB$. Tā kā punkts T ir nogriežņa AD viduspunkts, bet punkts S ir nogriežņa FC viduspunkts, tad nogriežņi BT un BS ir atbilstošie nogriežņi līdzīgos trijstūros, tāpēc $\angle BTN = \angle BSH$. Taču $\angle BSH = \angle BTN = \angle BNT$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $HNBS$ var apvilkt riņķa līniju.

Tā kā ap četrstūriem $HNBS$ un $HNBM$ var apvilkt riņķa līnijas, tad secinām, ka punkti H, N, B, M, S atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas atrisina uzdevumu.

8.piemērs. Dots trijstūris ABC, kurā $AB < AC$ un bisektrišu krustpunkts ir I. Punkts E izvēlēts uz malas AC tā, ka izpildās $AE = AB$. Punkts G izvēlēts uz taisnes EI tā, ka $\angle IBG = \angle CBA$ un I atrodas starp punktiem E un G.
Pierādīt, ka taisne AI, caur E vilktais perpendikuls pret AE un leņķa $\angle BGI$ bisektrise krustojas vienā punktā.



Atrisinājums. Ar X apzīmējam pret AE caur E vilktā perpendikula un AI krustpunktu.

1. solis. Punkti A, E, X, B, G atrodas uz vienas riņķa līnijas.
Pierādījums: Tā kā $\triangle BAE$ ir vienādsānu un AI - $\angle BAE$ bisektrise - ir tā simetrijas ass, tad no simetrijas un dotā $\angle XBA = \angle AEX = 90°$. Tātad $\angle XBA + \angle AEX = 180°$, kas pierāda, ka punkti A, E, X, B atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Tālāk aplūkojam $\angle CBG$. No dotā zināms, ka $\angle IBG = \angle CBA$. No abiem šiem leņķiem atņemot to kopīgo daļu $\angle IBA$, iegūstam, ka $\angle ABG = \angle CBI$. Tā kā I ir $\triangle CBA$ incentrs, tad $\angle CBI = \angle IBA$. No iepriekš iegūtās simetrijas varam secināt, ka $\angle IBA = \angle AEI$. Tātad

$$\angle ABG = \angle CBI = \angle IBA = \angle AEI = \angle AEG,$$

kas pierāda, ka punkti A, E, B, G atrodas uz vienas riņķa līnijas. Tā kā abām iegūtajām riņķa līnijām sakrīt 3 punkti, tās ir sakrītošas, kas pierāda soli.

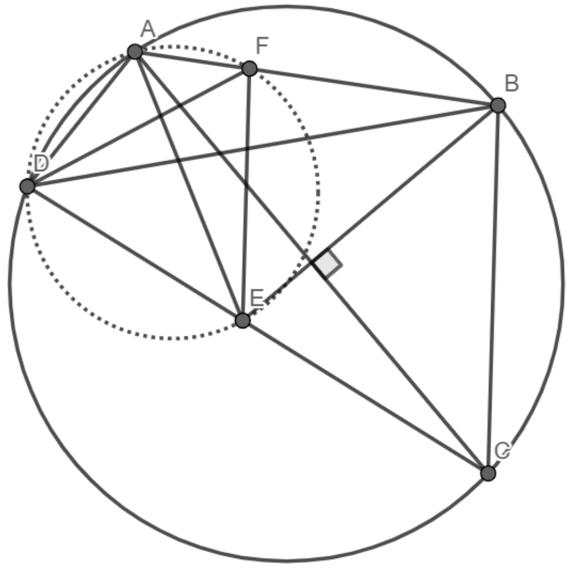
2. solis. GX ir $\angle BGI$ bisektrise.
Pierādījums: No 1. solī iegūtās simetrijas varam secināt, ka $XB = XE$. Tad četrstūrī $XBGE$ varam secināt, ka hordas XB un XE savelk vienādus lokus, tādēļ $\angle BGX = \angle XGE$, kas pierāda, ka GX ir $\angle BGI$ bisektrise. Līdz ar to varam secināt, ka uzdevumā prasītais izpildās.

Komentārs. Šajā uzdevumā kā piekto punktu var uztvert A - caur to ir iespējams pierādīt, ka punkti G, B, X, E atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas pēc tam diezgan vienkārši dod prasīto. Tomēr šis piemērs jau reālistiskāk parāda starptautisko olimpiāžu ģeometrijas uzdevumus - tajos bieži vien nepieciešams iegūt vairākus rezultātus ar dažādām metodēm, lai no tiem visiem kopā iegūtu prasīto.

Šeit piecu punktu triks mums palīdzēja iegūt papildu informāciju, tomēr ar to tikai nepietiek, lai atrisinātu uzdevumu, jo sākotnēji nepieciešams gudri izvēlēties punkta X definīciju, lai to varētu veiksmīgi iesaistīt uzdevumā. Vairāk šādus grūtākus uzdevumus aplūkosim tālākajos piemēros.

4 Grūtāki piemēri no olimpiādēm

1.piemērs. Dots izliekts četrstūris $ABCD$, kas ir ievilkts riņķa līnijā un kam izpildās $DA < AB = BC < CD$. Punkti E un F ir izvēlēti attiecīgi uz malām CD un AB tā, ka $BE \perp AC$ un $EF \parallel BC$. Pierādīt, ka $FB = FD$.



Atrisinājums. Atrisinājums sastāvēs no vairākiem soļiem.

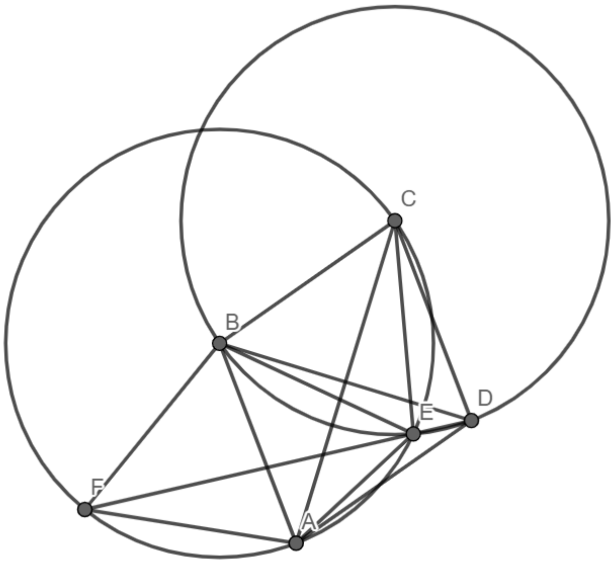
1.solis: Ap četrstūri $DAFE$ var apvilkt riņķa līniju.
Pierādījums: Ievērosim, ka $\angle BCD = \angle FED = 180° - \angle DAB = 180° - \angle DAF$. Tas nozīmē, ka četrstūra $DAFE$ pretējo leņķu summa ir 180°, tāpēc ap šo četrstūri var apvilkt riņka līniju.

Ievērosim, ka punkti E un F atrodas uz nogriežņa AC vidusperpendikula, tāpēc $AE = EC$. Tas nozīmē, ka $\angle EAC = \angle ECA = \alpha$ un $\angle DEA = 2\alpha$, jo tas ir $\triangle AEC$ ārējais leņķis.

2.solis: Ir spēkā sakarība $FD = FB$.
Pierādījums: Tā kā ap četrstūri $DAFE$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle DEA = \angle DFA = 2\alpha$. No otras puses, mēs zinām, ka ap četrstūri $ABCD$ arī var apvilkt riņķa līniju, tāpēc $\angle DCA = \angle ECA = \angle ABD = \angle FBD = \alpha$. Līdz ar to varam secināt, ka $\angle FDB = \angle DFA - \angle FBD = \alpha$. Tas nozīmē, ka $\angle FBD = \angle FDB = \alpha \implies FB = FD$.

No iepriekšējiem soļiem izriet prasītais.

2.piemērs. Dots rombs $ABCD$ un riņķa līnija Γ_B, kuras centrs ir punktā B un kuras rādiuss ir BC. Novilkta arī riņķa līnija Γ_C, kuras centrs ir punktā C un kuras rādiuss ir BC. Vienu no riņķa līniju Γ_B un Γ_C krustpunktiem apzīmēsim ar E. Taisne ED krusto Γ_B punktā F. Atrast visas iespējamās leņķa $\angle AFB$ vērtības.



Atrisinājums. Atrisināsim uzdevumu, ja rombā $\angle ABC$ ir plats. Gadījumu, ja tas ir šaurs, risina analoģiski.

1.solis: $\triangle AFB$ ir vienādmalu.
Pierādījums: Tā kā $BC = CE$ kā rādiusi Γ_C un $BC = BE$ kā rādiusi Γ_B, tad $CE = BC = BE$ un trijstūris BCE ir vienādmalu.

Apzīmējam $\angle AFE = \angle ACE = \alpha$ un $\angle ABE = 2\alpha$ (vienādi leņķi un centra leņķis Γ_B). Varam ievērot, ka $\angle ABC = \angle ABE + \angle EBC = 2\alpha + 60°$. Tad no romba leņķiem $\angle BCD = 180° - \angle ABC = 120° - 2\alpha$. Tādā gadījumā $\angle ECD = \angle BCD - \angle BCE = 60° - 2\alpha$. Tā kā $\triangle ECD$ ir vienādsānu, tad $\angle CDE = 0.5(180° - \angle ECD) = 60° + \alpha$. Tā kā rombā pretējie leņķi ir vienādi, tad $\angle CDA = \angle ABC = 2\alpha + 60°$. Līdz ar to $\angle FDA = \angle EDA = \angle CDA - \angle CDE = (2\alpha + 60°) - (60° + \alpha) = \alpha$.

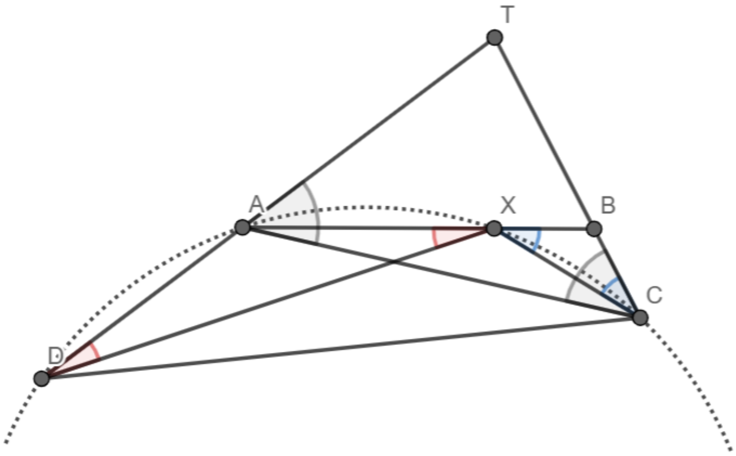
Varam redzēt, ka $\angle FDA = \alpha = \angle AFD \implies AF = AD$. No romba $ABCD$ malām zināms, ka $AB = AD$, bet no Γ_B, ka $AB = BF$ kā rādiusi. Tātad

$$AD = AF = AB = BF,$$

kas nozīmē, ka $\triangle AFB$ ir vienādmalu.

No $\triangle AFB$ uzreiz secinām, ka vienīgā iespējamā $\angle AFB$ vērtība ir $60°$.

3.piemērs. Dots izliekts četrstūris $ABCD$, kurā izpildās $\angle CAD + \angle BCA = 180°$ un $AB = BC + AD$. Pierādīt, ka $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.



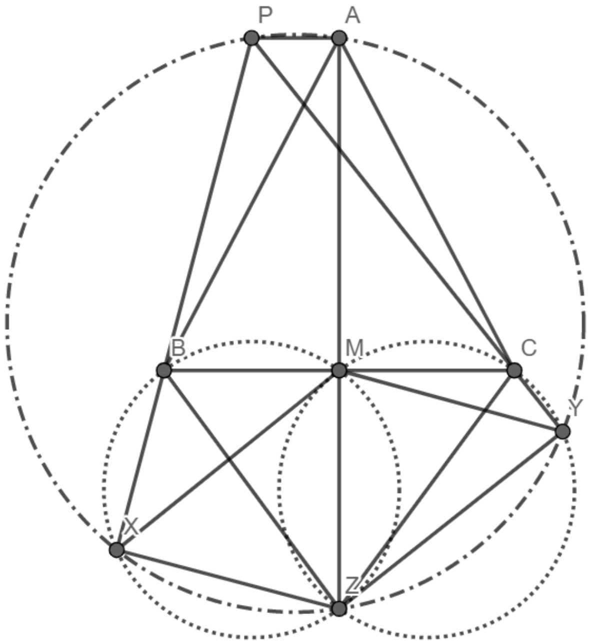
Atrisinājums. Pieņemsim, ka taisnes AD un BC krustojas punktā T. Ievērosim, ka $\angle BCA = 180° - \angle CAD = \angle TAC$. Tas nozīmē, ka $\triangle TAC$ ir vienādsānu, līdz ar to $\angle ATC = 180° - 2\angle TAC$.

Atliksim uz nogriežņa AB tādu punktu X, ka $AD = AX$, tad tā kā $AB = BC + AD$, tad izriet, ka $BX = BC$. Apzīmēsim $\angle ADX = \angle AXD = \alpha$ un $\angle BXC = \angle BCX = \beta$. Aplūkosim $\triangle DAX$ un $\triangle BXC$ ārējo leņķus $\angle TAB$ un $\angle TBA$. Ievērosim, ka $\angle TAB = \angle ADX + \angle AXD = 2\alpha$ un $\angle TBA = \angle BXC + \angle BCX = 2\beta$. Secinām, ka:

$$180° - 2\angle TAC = \angle ATC = 180° - \angle TAB - \angle ABT = 180° - 2\alpha - 2\beta \implies \angle TAC = \alpha + \beta$$

No šejienes izriet, ka $\angle CAD = 180° - \angle TAC = 180° - \alpha - \beta = 180° - \angle AXD - \angle BXC = \angle DXC$. Tas nozīmē, ka ap četrstūri $DAXC$ var apvilkt riņķa līniju. Ievērosim, ka $\angle ACD = \angle AXD = \angle ADX$ un $\angle BAC = \angle XDC$ kā leņķi, kas balstās uz viena loka. Līdz ar to $\angle BAC + \angle ACD = \angle XDC + \angle ADX = \angle CDA$, kas arī bija jāpierāda.

4.piemērs. Dots vienādsānu trijstūris $\triangle ABC$, kuram izpildās, ka $AB = AC$. Punkts M ir nogriežņa BC viduspunkts, savukārt punkts P ir tāds, ka $PB < PC$ un $PA \parallel BC$. Punkti X un Y ir izvēlēti uz nogriežņu PB un PC pagarinājumiem tā, ka $\angle PXM = \angle PYM$. Pierādīt, ka ap četrstūri $APXY$ var apvilkt riņķa līniju.



Atrisinājums. Pieņemsim, ka $\odot(BMX)$ krusto taisni AM punktā Z.

1.solis: Ap četrstūri $MCYZ$ var apvilkt riņķa līniju.
Pierādījums: Ievērosim, ka tā kā ap četrstūri $MBXZ$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle BXM = \angle BZM$. No otras puses, punkts Z atrodas uz nogriežņa BC vidusperpendikula, jo taisne AM ir šī nogriežņa vidusperpendikuls. Līdz ar to $\angle BZM = \angle CZM$. Izmantojot uzdevumā doto leņķu nosacījumu, varam secināt, ka $\angle CYM = \angle BXM = \angle BZM = \angle CZM$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $MCYZ$ var apvilkt riņķa līniju.

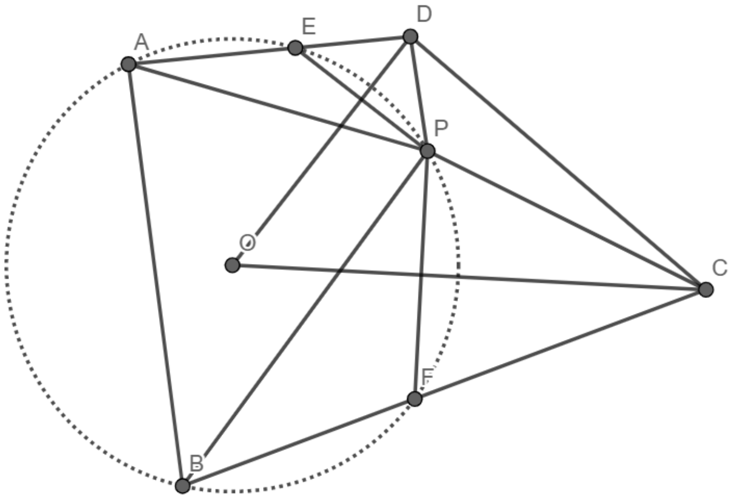
2.solis: Punkti A, P, X, Z, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas.
Pierādījums: Ievērosim, ka tā kā ap četrstūriem $MBXZ$ un $MCYZ$ var apvilkt riņķa līnijas un $AM \perp BC$, tad $\angle BXZ = \angle CYZ = 90°$. Tas nozīmē, ka ap četrstūri $ZYPX$ var apvilkt riņķa līniju. No otras puses, $\angle APY = \angle PCB$, jo $PA \parallel BC$, kā arī $\angle PCB = \angle YZM = \angle YZA$, jo ap četrstūri $MCYZ$ var apvilkt riņķa līniju. Līdz ar to $\angle YZA = \angle APC$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $APZY$ var apvilkt riņķa līniju. Tā kā ap četrstūriem $YPXZ$ un $APZY$ var apvilkt riņķa līnijas, tad punkti A, P, X, Z, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas.

No iepriekšējiem soļiem izriet prasītais.

5.piemērs. Aplūkosim izliektu četrstūri $ABCD$. Punkts P atrodas četrstūra $ABCD$ iekšpusē. Izpildās šādas attiecības:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Pierādīt, ka nosauktās trīs taisnes krustojas vienā punktā: leņķu $\angle ADP$ un $\angle PCB$ bisektrises un nogriežņa AB vidusperpendikuls.



Atrisinājums. Apzīmēsim $\angle DAP = \alpha$ un $\angle CBP = \beta$. Tādā gadījumā $\angle PBA = 2\alpha$ un $\angle PAB = 2\beta$, kā arī $\angle DPA = 3\alpha$ un $\angle CPB = 3\beta$. Atliksim punktus E un F uz attiecīgi nogriežņiem AD un CB tā, lai $\angle EPA = \alpha$ un $\angle FPB = \beta$.

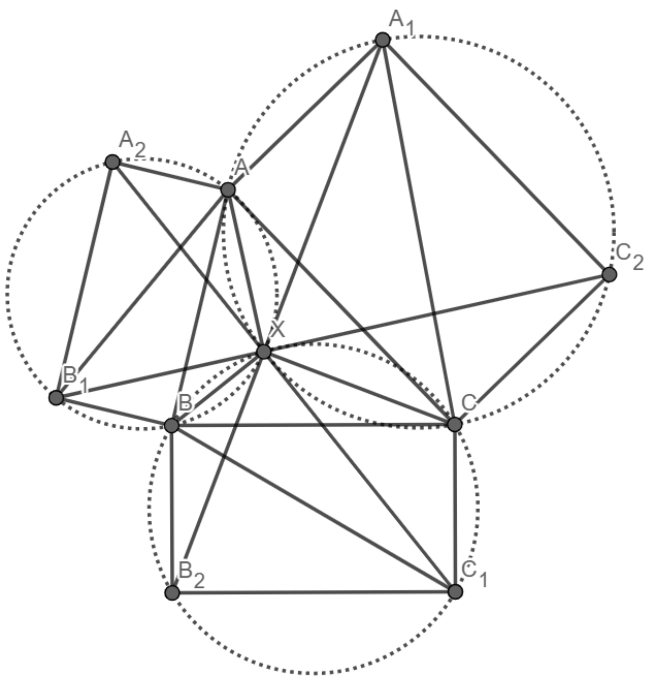
1.solis: Punkti E, A, B, F, P atrodas uz vienas riņķa līnijas.
Pierādījums: Ievērosim, ka $\angle DEP = \angle DAP + \angle EPA = 2\alpha = \angle PBA$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $EPBA$ var apvilkt riņķa līniju. Analoģiski $\angle CFP = \angle CBP + \angle FBP = 2\beta = \angle PAB$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $APFB$ var apvilkt riņķa līniju. Līdz ar punkti A, E, P, F, B atrodas uz vienas riņķa līnijas.

No otras puses, viegli redzēt, ka $\angle DEP = \angle EPD = 2\alpha$ un $\angle CFP = \angle CPF = 2\beta$, tāpēc $DP = DE$ un $CF = CP$. Līdz ar to leņķu $\angle ADP$ un $\angle PCB$ bisektrises sakrīt attiecīgi ar nogriežņu EP un PF vidusperpendikuliem. Taču nogriežņu AB, EP un PF vidusperpendikuli krustojas vienā punktā, kurš ir riņķa līnijas, kas iet caur punktiem E, A, B, F, P, centrs, kas arī bija jāpierāda.

6.piemērs. Uz trijstūra $\triangle ABC$ malām uz *ārpusi* ir konstruēti taisnstūri BCC_1B_2, CAA_1C_2, un ABB_1A_2. Pieņemsim, ka

$$\angle BC_1C + \angle CA_1A + \angle AB_1B = 180°.$$

Pierādīt, ka taisnes B_1C_2, C_1A_2 un A_1B_2 krustojas vienā punktā.



Atrisinājums. Atrisinājums sastāvēs no vairākiem soļiem. Definēsim punktu X kā $\odot(BCC_1B_2)$ un $\odot(ABB_1A_2)$ krustpunktu.

1.solis Punkts X atrodas arī uz $\odot(AA_1C_2C)$.
Pierādījums: Ievērosim, ka tā kā ap četrstūriem $CXBC_1$ un $BXAB_1$ var apvilkt riņķa līnijas, tad $\angle BXC = 180° - \angle BC_1C$ un $\angle AXB = 180° - \angle BB_1A$. Līdz ar to:

$$\angle AXC = 360° - \angle BXC - \angle AXB = \angle BC_1C + \angle BB_1A = 180° - \angle AA_1C$$

Tas nozīmē, ka četrstūra AA_1CX pretējo leņķu summa ir 180°, tāpēc punkts X atrodas uz $\odot(AA_1C_2C)$, kas arī bija jāpierāda.

2.solis Taisnes A_1B_2, B_1C_2 un C_1A_2 krustojas punktā X.
Pierādījums: Ievērosim, ka $\angle CXB_2 = \angle CXA_1 = 90°$, jo ap četrstūriem $BXCB_2$ un $CXAA_1$ var apvilkt riņķa līnijas. Tas nozīmē, ka $\angle B_2XC + \angle CXA_1 = 180°$, līdz ar to punkti B_2, X, A_1 atrodas uz vienas taisnes. Analoģiski var pierādīt, ka punkti B_1, X, C_2 un C_1, X, A_2 arī atrodas uz vienas taisnes, kas arī bija jāpierāda.

No iepriekš minētājiem soļiem izriet prasītais.