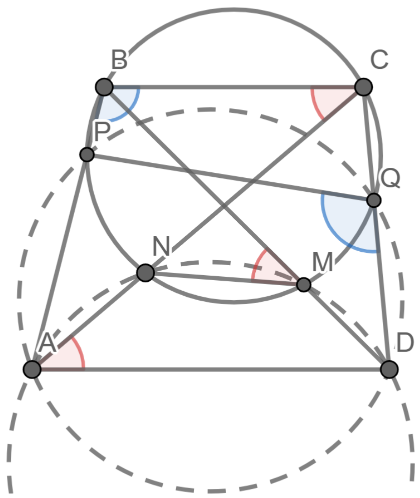
1.uzdevums. Dota trapece $ABCD$, kuras pamati ir AD un BC. Riņķa līnija, kas iet caur punktiem B un C, krusto trapeces sānu malas punktos P, Q un trapeces diagonāles punktos M un N. Pierādīt, ka taisnes MN, PQ, AD krustojas vienā punktā vai ir paralēlas.



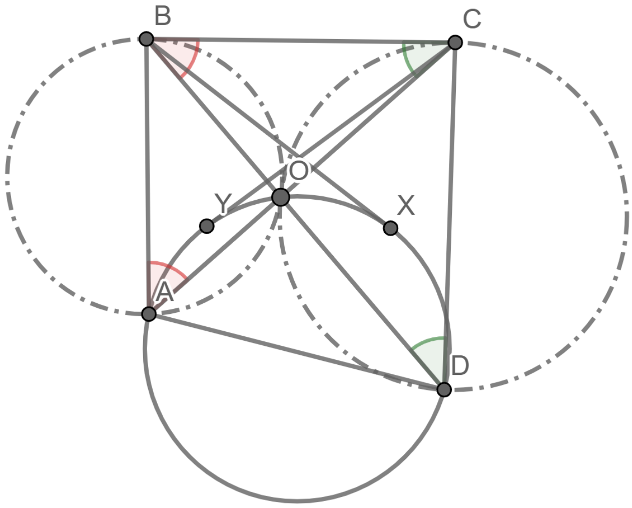
Atrisinājums. Pieņemsim, ka riņķa līnija, kas iet caur punktiem B un C, krusto malas AB un CD attiecīgi punktos P un Q, savukārt diagonāles BD un AC attiecīgi punktos M un N. Ievērosim no $\odot(BCMN)$, ka

$$\angle BMN = \angle BCA = \angle NAD,$$

kas nozīmē, ka ap četrstūri $ANMD$ var apvilkt riņķa līniju. Ievērosim no $\odot(BCQP)$, ka $\angle PBC = \angle PQD$, un no trapeces, ka $\angle PBC + \angle BAD = 180°$, kas nozīmē, ka $\angle PQD + \angle BAD = 180°$, līdz ar to ap četrstūri $PQDA$ var apvilkt riņķa līniju.

No radikālo asu teorēmas četrstūriem $MNPQ, PQDA, ADMN$ izriet, ka taisnes MN, PQ, AD krustojas vienā punktā vai arī ir paralēlas, kas arī bija jāpierāda.

2.uzdevums. Četrstūra $ABCD$ diagonāles krustojas punktā O. Zināms, ka $\angle BAC = \angle CBD$ un $\angle BCA = \angle CDB$. Pierādīt, ka pieskares, kas vilktas no punktiem B un C pret trijstūra AOD apvilkto riņķa līniju, ir vienāda garuma.



Atrisinājums. Tā kā $\angle BAC = \angle CBD$ un $\angle BCA = \angle CDB$, tad no pieskares pazīmes secinām, ka BC ir trijstūra COD apvilktās riņķa līnijas pieskare un BC ir trijstūra AOB apvilktās riņķa līnijas pieskare. No pieskares īpašības izriet, ka

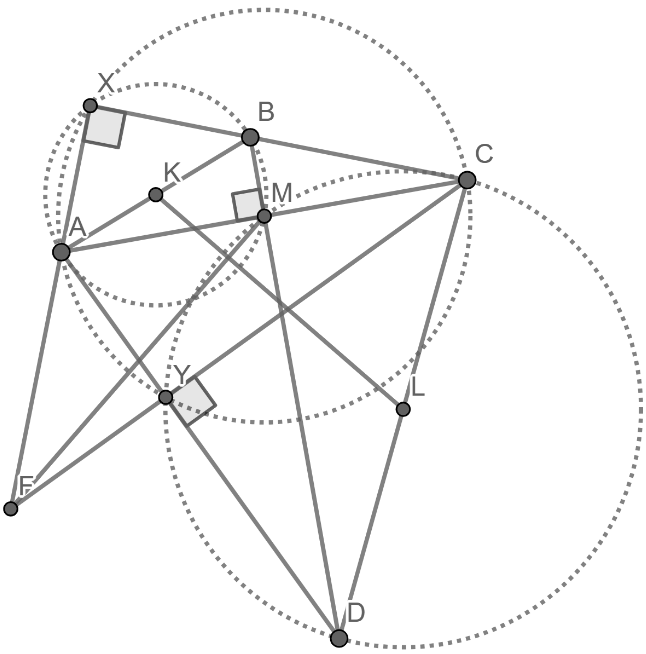
$$BC^2 = BO \cdot BD \quad \text{un} \quad BC^2 = CO \cdot CA$$

Pieņemsim, ka pieskares, kas vilktas no punktiem B un C, pieskaras trijstūra AOD apvilktajai riņķa līnijai attiecīgi punktos X un Y. Tādā gadījumā no pieskares īpašības izriet, ka

$$BX^2 = BO \cdot BD = BC^2 = CO \cdot CA = CY^2$$

Secinām, ka $BX = CY$, kas arī bija jāpierāda.

3.uzdevums. Dots izliekts četrstūris $ABCD$, kuram izpildās $AB = BC$ un $AD = DC$. Punkti K, L, M ir attiecīgi nogriežņu AB, CD, AC viduspunkti. Perpendikuls, kas vilkts no punkta A pret taisni BC, krusto perpendikulu, kas vilkts no punkta C pret taisni AD, punktā F. Pierādīt, ka $MF \perp KL$.



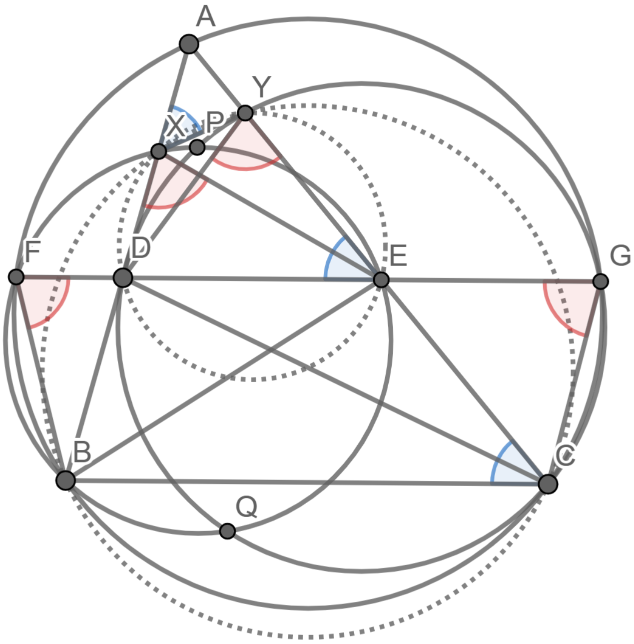
Atrisinājums. Pieņemsim, ka perpendikula pamats no virsotnes A pret taisni BC ir punkts X, savukārt perpendikula pamats no virsotnes C pret taisni AD ir punkts Y. Ievērosim no dotā, ka BD ir nogriežņa AC vidusperpendikuls, tāpēc $\angle BMA = \angle BXA = 90°$ un $\angle DMC = \angle CYD = 90°$. Tas nozīmē, ka ap četrstūriem $ABXM$ un $CMYD$ var apvilkt riņķa līnijas un šo riņķa līniju centri ir attiecīgi punkti K un L. Apzīmēsim minētās divas riņķa līnijas ar ω_1 un ω_2.

Punkts M atrodas uz ω_1 un ω_2 radikālās ass, jo abas riņķa līnijas iet caur M. Ievērosim, ka $\angle AXC = \angle AYC = 90°$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $AXCY$ var apvilkt riņķa līniju. No ievilkta četrstūra īpašības izriet, ka

$$FX \cdot FA = FC \cdot FY$$

Tas nozīmē, ka punktam F ir vienāda pakāpe attiecībā pret ω_1 un ω_2, līdz ar to tas atrodas uz abu riņķa līniju radikālās ass. Līdz ar to taisne MF ir ω_1 un ω_2 radikālā ass, taču tā no apgūtās teorijas ir perpendikulāra centru savienojošai taisnei, tas ir, taisnei KL. Prasītais ir pierādīts.

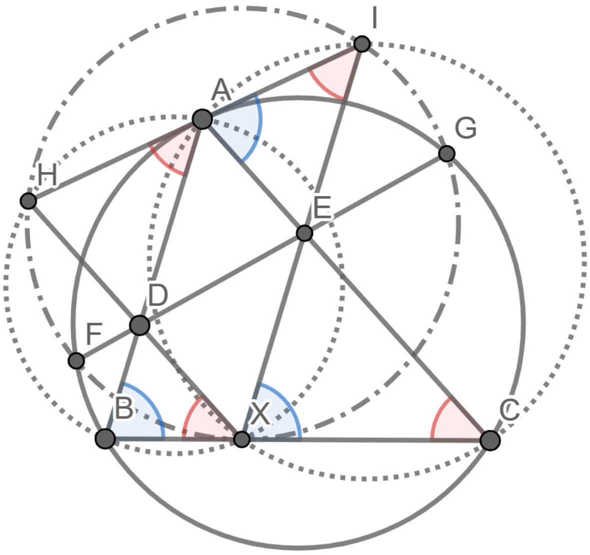
4.uzdevums. Dots dažādmalu trijstūris ABC. Taisne ℓ, kas ir paralēla taisnei BC, krusto nogriežņus AB un AC attiecīgi punktos D un E, kā arī trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju punktos F un G, pie tam punkti F, D, E, G atrodas uz ℓ tieši šādā secībā. Trijstūru FEB un DGC apvilktās riņķa līnijas krustojas punktos P un Q. Pierādīt, ka punkti A, P, Q atrodas uz vienas taisnes.



Atrisinājums. Ap trijstūriem FEB un DGC apvilktās riņķa līnijas apzīmēsim attiecīgi ar ω_1 un ω_2. Pieņemsim, ka ω_1 un AB krustojas punktā X, savukārt ω_2 un AC krustojas punktā Y. Tā kā $FG \parallel BC$, tad $BFGC$ ir vienādsānu trapece, līdz ar to $\angle BFG = \angle FGC$.

Ievērosim, ka
$$\angle BXE = \angle BFG = \angle FGC = \angle DYC$$
Esam ieguvuši, ka $\angle BXE = \angle DYC$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $DXYE$ var apvilkt riņķa līniju. No tā izriet, ka
$$\angle AXY = \angle AED = \angle ACB$$
Tas nozīmē, ka ap četrstūri $BXYC$ var apvilkt riņķa līniju. No ievilkta četrstūra īpašības izriet, ka
$$Pow_{\omega_1}(A) = AX \cdot AB = AY \cdot AC = Pow_{\omega_2}(A)$$
Tas nozīmē, ka punkts A atrodas uz ω_1 un ω_2 radikālas ass, kas savukārt ir taisne PQ. Secinām ,ka punkti A, P, Q atrodas uz vienas taisnes, kas arī bija jāpierāda.

5.uzdevums. Ar Γ apzīmēsim šaurleņķu trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju. Taisne l ir pieskare Γ punktā A. Uz nogriežņiem AB, AC izvēlēti attiecīgi punkti D un E ar īpašību, ka $\frac{BD}{DA} = \frac{AE}{EC}$. Taisne DE krusto Γ punktos F un G. Pieņemsim, ka taisne, kas ir paralēla malai AC un iet caur punktu D, krusto taisni l punktā H, savukārt taisne, kas ir paralēla malai AB un iet caur punktu E, krusto taisni l punktā I. Pierādīt, ka eksistē riņķa līnija, kas iet caur punktiem F, G, H, I un pieskaras taisnei BC.



Atrisinājums. Sākumā pierādīsim apgalvojumu.

Apgalvojums. Taisnes HD, EI un BC krustojas vienā punktā.
Pierādījums. Pieņemsim, ka taisnes HD un BC krustojas punktā X, savukārt taisnes EI un BC krustojas punktā Y. No Talesa teorēmas

$$\frac{BX}{XC} = \frac{BD}{DA} = \frac{AE}{EC} = \frac{BY}{CY}$$

Bet eksistē tikai viens punkts, kas dala nogriezni attiecībā $\frac{BX}{XC}$, līdz ar to secinām, ka punkti X un Y sakrīt. Tāpēc taisnes HD, EI un BC krustojas vienā punktā. Apzīmēsim šo krustpunktu ar X.

Ievērosim no paralēlām taisnēm un pieskares, ka

$$\angle ACB = \angle HXB = \angle HAB$$
$$\angle ABC = \angle IXC = \angle IAC$$

Līdz ar to ap četrstūriem $AHBX$ un $IAXC$ var apvilkt riņķa līnijas. No ievilkta četrstūra pazīmes izriet, ka

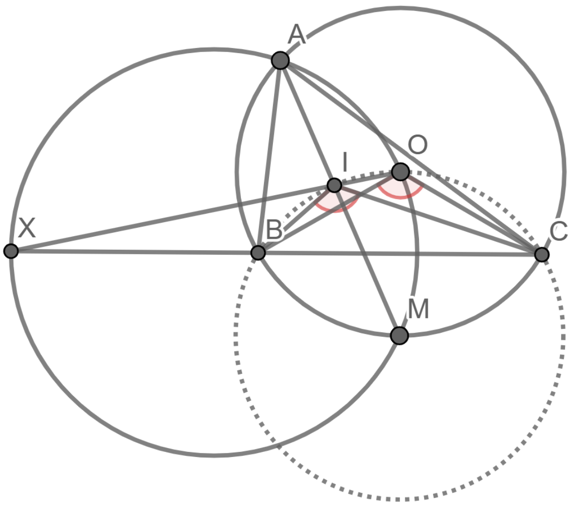
$$HD \cdot DX = BD \cdot DA = FD \cdot DG$$
$$XE \cdot EI = AE \cdot EC = FE \cdot FG$$

Secinām, ka ap četrstūriem $XFHG$ un $XGIF$ var apvilkt riņķa līnijas. Taču tiem ir trīs kopīgas virsotnes, līdz ar to secinām, ka punkti X, F, G, H, I atrodas uz vienas riņķa līnijas. Ievērosim, ka

$$\angle HXB = \angle ACB = \angle HIX,$$

kas nozīmē, ka taisne BC ir šīs riņķa līnijas pieskare punktā X, kas arī bija jāpierāda.

6.uzdevums. Dots šaurleņķu trijstūris ABC. Punkti I un O ir attiecīgi centri tā ievilktajai un apvilktajai riņķa līnijai. Taisnes OI un BC krustojas punktā X. Trijstūra ABC apvilktajai riņķa līnijai punkts M ir viduspunkts lokam BC, kurš nesatur punktu A. Zināms, ka ap četrstūri $AOMX$ var apvilkt riņķa līniju. Pierādīt, ka $\angle BAC = 60°$.



Atrisinājums (Ramona Poreitere). Ievērosim, ka punkti A, I, M atrodas uz vienas taisnes. Apzīmēsim trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju ar ω_1, savukārt trijstūra BIC apvilkto riņķa līniju ar ω_2. Tas ir labi zināms fakts (*ang.* incenter-excenter lemma), ka punkts M ir ω_2 centrs.

Tā kā ap četrstūri $AXMO$ var apvilkt riņķa līniju, tad

$$XI \cdot IO = AI \cdot IM = Pow_{\omega_1}(I) = OM^2 - OI^2$$

Mēs izmantojām to, ka $Pow_\omega(X) = r^2 - OX^2$, kur r ir ω rādiuss un punkts O ir centrs (patvaļīgai riņķa līnijai ω). Veicot pārveidojumus, iegūstam, ka

$$XI \cdot IO + OI^2 = OM^2$$
$$OI \cdot (XI + OI) = OM^2$$
$$OI \cdot XO = OM^2$$

Ievērosim, ka

$$XO \cdot XI = XO \cdot (XO - OI) = XO^2 - XO \cdot OI =$$
$$= XO^2 - OM^2 = Pow_{\omega_1}(X) = XB \cdot XC$$

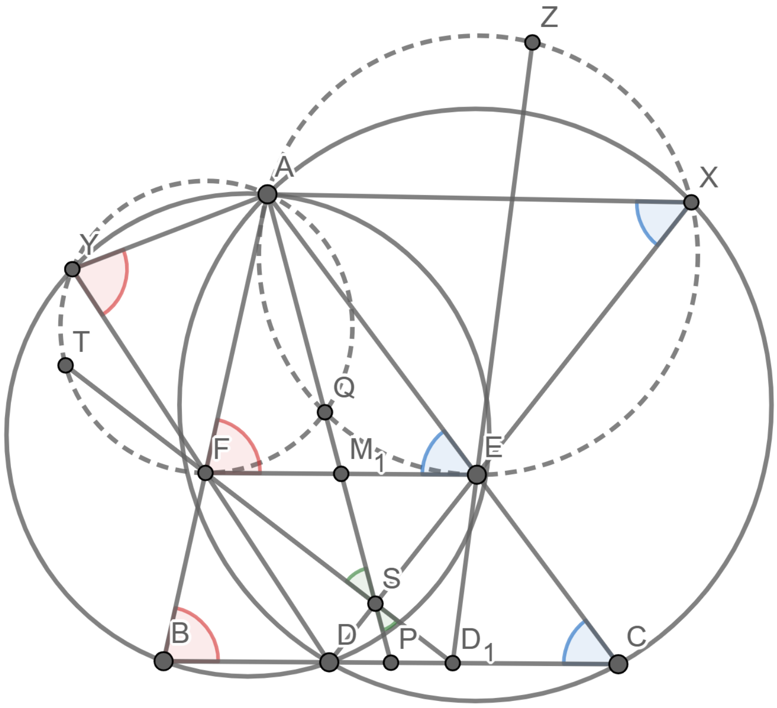
Secinām, ka ap četrstūri $BIOC$ var apvilkt riņķa līniju.

Tā kā punkti I un O ir attiecīgi trijstūra ABC ievilktās un apvilktās riņķa līnijas centri, tad $\angle BIC = 90° + \frac{\angle BAC}{2}$ un $\angle BOC = 2\angle BAC$. Ievērosim, ka $\angle BOC = \angle BIC$, jo ap četrstūri $BOIC$ var apvilkt riņķa līniju, līdz ar to

$$90° + \frac{\angle BAC}{2} = 2\angle BAC$$
$$90° = \frac{3\angle BAC}{2}$$
$$\angle BAC = 60°,$$

kas arī bija jāpierāda.

7.uzdevums Dots šaurleņķu trijstūris ABC. Uz nogriežņiem BC, CA, AB atlikti attiecīgi punkti D, E, F ar īpašību, ka $EF \parallel BC$. Pieņemsim, ka taisne DE krusto trijstūra ADC apvilkto riņķa līniju punktā $X \neq D$, savukārt taisne DF krusto trijstūra ADB apvilkto riņķa līniju punktā $Y \neq D$. Punkts P ir nogriežņa BC viduspunkts. Uz nogriežņa BC ir atlikts punkts $D_1 \neq D$ ar īpašību, ka $D_1P = PD$. Pierādīt, ka ap četrstūri $XYDD_1$ var apvilkt riņķa līniju.



Atrisinājums. Trijstūra AFY apvilkto riņķa līniju apzīmēsim ar ω_1, savukārt trijstūra AEX apvilkto riņķa līniju ar ω_2. Pieņemsim, ka taisne D_1F krusto ω_1 punktā T, savukārt taisne D_1E krusto ω_2 punktā Z.

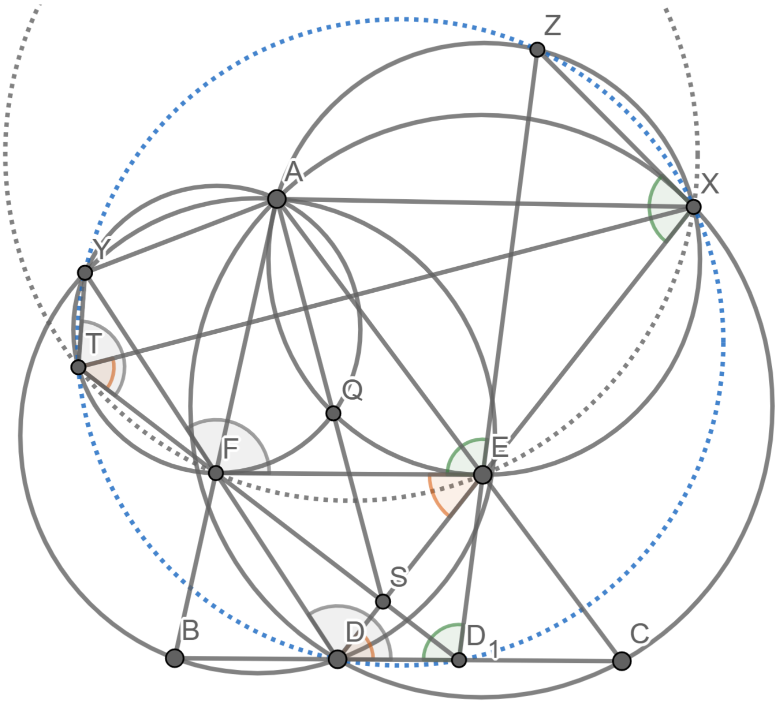
Ievērosim, ka $\angle AFE = \angle ABC = \angle AYF$ un $\angle AEF = \angle ACB = \angle AXE$. Tas nozīmē, ka taisne FE ir ω_1 un ω_2 pieskare. Pieņemsim, ka riņķa līnijas ω_1 un ω_2 krustojas punktā $Q \neq A$, savukārt taisne krusto AQ krusto taisni EF punktā M_1. Ievērosim, ka no pieskares īpašības izriet, ka

$$FM_1^2 = M_1Q \cdot M_1A = M_1E^2 \implies M_1E = FM_1$$

Tas nozīmē, ka punkts M_1 ir EF viduspunkts. Ar S apzīmēsim taišņu DE un D_1F krustpunktu.

Apgalvojums. Punkti A, Q, M_1, S, P atrodas uz vienas taisnes.
Pierādījums. Acīmredzami no kāpšļu leņķiem, ka $\triangle FAE \sim \triangle BAC$ pēc pazīmes *ll*, jo $EF \parallel BC$. Tad AM_1 un AP ir atbilstošās mediānas līdzīgos trijstūros. Tā kā leņķi pie atbilstošajiem elementiem līdzīgos trijstūros ir vienādi, tad $\angle BAM_1 = \angle BAP$, kas nozīmē, ka punkti A, M_1, P atrodas uz vienas taisnes.

Aplūkojam trapeci $DFED_1$. No šķērsleņķiem redzams, ka $\triangle SFE \sim \triangle SD_1D$ pēc pazīmes *ll*, jo $EF \parallel DD_1$. Ievērosim, ka SM_1 un SP ir atbilstošās mediānas līdzīgos trijstūros. Tad leņķi pie tām ir vienādi, tātad $\angle M_1SF = \angle PSD_1$. Tā kā punkti F, S, D_1 atrodas uz vienas taisnes, varam secināt, ka nosauktie leņķi ir krustleņķi un punkti M_1, S, P atrodas uz vienas taisnes. Tā kā jau iepriekš zināms, ka punkti A, Q, M_1 atrodas uz vienas taisnes, tas nozīmē, ka visi punkti A, Q, M_1, S, P atrodas uz taisnes AQ.



Ievērosim, ka četrstūri $TFQA$ un $AQEX$ ir ievilkti riņķa līnijā, līdz ar to no ievilktu četrstūru pazīmes izriet, ka

$$SF \cdot ST = SQ \cdot SA = SE \cdot SX$$

Secinām, ka ap četrstūri $TFEX$ var apvilkt riņķa līniju. Ievērosim, ka

$$\angle D_1DX = \angle FED = \angle XTD_1$$

Tas nozīmē, ka ap četrstūri DD_1XT var apvilkt riņķa līniju. Ievērosim arī, ka

$$\angle DD_1Z = \angle FEZ = \angle ZXD$$
$$\angle YDD_1 = \angle YFE = \angle YTF$$

Mēs izmantojām to, ka FE ir ω_1 un ω_2 pieskare. No iegūtajām leņķu vienādībām izriet, ka ap četrstūriem D_1DTY un DD_1XZ var apvilkt riņķa līnijas.

Esam ieguvuši, ka ap četrstūriem DD_1XT, D_1DTY un DD_1XZ var apvilkt riņķa līnijas, kas nozīmē, ka punkti D, D_1, X, Z, Y, T atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas arī bija jāpierāda.