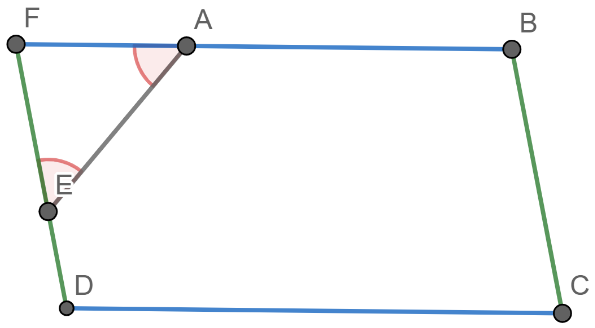
Papildkonstrukcijas - atrisinājumi

1.uzdevums. Dots izliekts piecstūris $ABCDE$, kuram $AB \parallel CD$ un $BC \parallel DE$, un $\angle BAE = \angle AED$. Pierādīt, ka $AB + BC = CD + DE$.



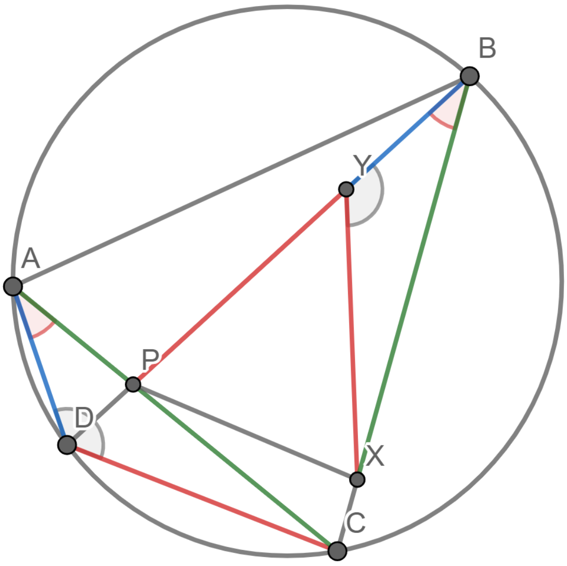
Atrisinājums. Pagarinām taisnes AB un DE līdz to krustpunktam, ko apzīmēsim ar F. Tā kā $FB \parallel CD$ un $BC \parallel DF$, no paralelograma pazīmēm secinām, ka $FBCD$ ir paralelograms. Tajā pretējo malu garumi ir vienādi, tāpēc $BF + BC = CD + DF$.

No nosacījumiem dots, ka $\angle BAE = \angle AED$, tāpēc ir vienādi arī šo leņķu blakusleņķi jeb $\angle FAE = \angle AEF$. Tātad trijstūris AFE ir vienādsānu, kurā $AF = EF$. Atņemsim no iepriekš iegūtās nogriežņu sakarības šos vienādos lielumus:

$$BF - AF + BC = CD + DF - EF$$
$$AB + BC = CD + DE,$$

kas bija jāpierāda.

2.uzdevums. Dots riņķa līnijā ievilkts četrstūris $ABCD$, kura diagonāles krustojas punktā P. Zināms, ka $BP = AD + DC$. Punkts X ir izvēlēts uz nogriežņa BC ar īpašību, ka $BX = AC$. Pierādīt, ka $2\angle BPX = \angle ADC$.



Atrisinājums. Uz nogriežņa BP atliksim punktu Y, kuram izpildās $BY = AD$. Tad no nosacījuma $BP = AD + DC$ secinām, ka $PY = DC$.

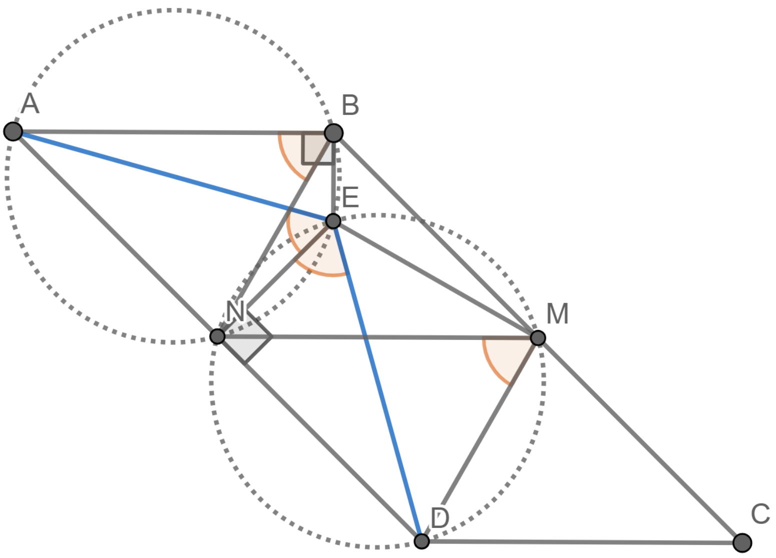
Tā kā $ABCD$ ir ievilkts, tad izpildās $\angle YBX = \angle DBC = \angle DAC$. Ievērosim, ka $BX = AC$ no dotā, kā arī $BY = AD$. Tas nozīmē, ka $\triangle YBX = \triangle DAC$ pēc pazīmes *mlm*. No vienādības var secināt, ka $XY = DC = PY$, tātad trijstūris PYX ir vienādsānu un $\angle XPY = \angle YXP$. No iegūtās trijstūru vienādības arī zināms, ka $\angle ADC = \angle XYB$.

Ievērosim, ka $\angle XYB$ ir trijstūra XPY ārējais leņķis, tātad $\angle XYB = \angle XPY + \angle YXP = 2\angle XPY$. Izsakām leņķus

$$2\angle BPX = \angle XPY + \angle YXP = \angle XYB = \angle ADC,$$

kas pierāda prasīto.

3.uzdevums. Paralelograma $ABCD$ iekšpusē ir izvēlēts punkts E ar īpašību, ka $AE = DE$ un $\angle ABE = 90°$. Punkts M ir nogriežņa BC viduspunkts. Atrast visas iespējamās leņķa $\angle DME$ vērtības un pamatot, ka citu nav.



Atrisinājums. Ar N apzīmējam malas AD viduspunktu.

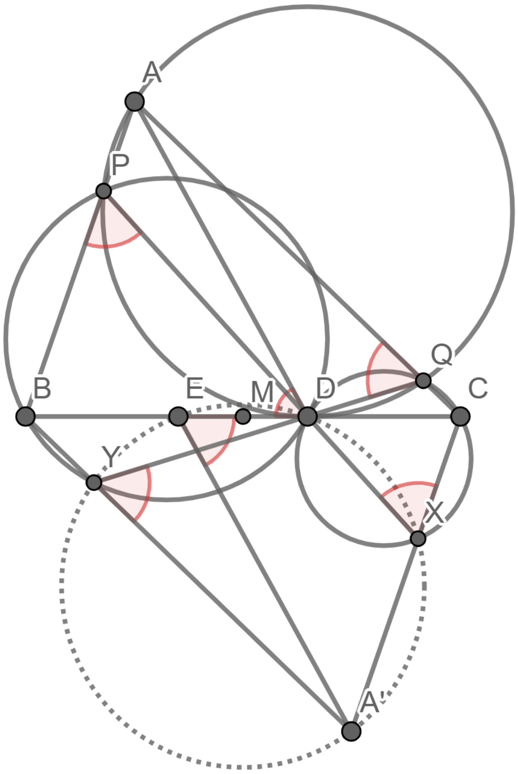
Tā kā trijstūris AED ir vienādsānu, tad EN ir šī trijstūra augstums, mediāna un bisektrise. Tātad $\angle ENA = \angle DNE = 90°$. Ievērojam, ka $\angle ABE = 90°$, tātad četrstūris $ABEN$ ir ievilkts riņķa līnijā, jo $\angle ABE + \angle ENA = 180°$. No šī četrstūra iegūstam $\angle ABN = \angle AEN$, jo tie balstās uz vienu loku riņķa līnijā. Papildus tam arī $\angle AEN = \angle NED$, jo EN ir bisektrise trijstūrī AED.

Ievērosim, ka $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}DA = DN$, kā arī $BM \parallel DN$, tāpēc $BMDN$ ir paralelograms no paralelograma pazīmēm. No tā var secināt, ka $\angle NMD = \angle MNB$. Papildus tam arī acīmredzami, ka paralelograma $ABCD$ viduslīnija NM ir paralēla ar malu AB, tāpēc $\angle MNB = \angle ABN$ kā šķērsleņķi. Esam ieguvuši leņķu sakarību

$$\angle NMD = \angle MNB = \angle ABN = \angle AEN = \angle NED,$$

kas nozīmē, ka četrstūris $NEMD$ ir ievilkts riņķa līnijā. Tātad $\angle DME = 180° - \angle DNE = 90°$. Tā kā $\angle DNE$ vienīgā iespējamā vērtība no dotā ir $90°$, tad arī attiecīgi $\angle DME$ vienīgā iespējamā vērtība ir $90°$.

4.uzdevums. Dots šaurleņķu trijstūris ABC. Punkti P un Q atrodas attiecīgi uz nogriežņiem AB un AC ar īpašību, ka trijstūra APQ apvilktā riņķa līnija pieskaras nogrieznim BC punktā D. Punkts E atrodas uz nogriežņa BC ar īpašību, ka $BD = EC$. Taisne DP krusto trijstūra CDQ apvilkto riņķa līniju punktā $X \neq D$, un taisne DQ krusto trijstūra BDP apvilkto riņķa līniju punktā $Y \neq D$. Pierādīt, ka punkti D, E, X un Y atrodas uz vienas riņķa līnijas.



Atrisinājums. Pagarināsim taisnes BY un CX līdz to krustpunktam, ko apzīmēsim ar A'. No riņķa līnijas $\odot(PDMYB)$ ievērojam, ka $\angle A'YD = \angle BPD$, savukārt no riņķa līnijas $\odot(AQDP)$ varam ievērot, ka $\angle BPD = \angle AQD$. Tātad $\angle A'YQ = \angle AQY$, kas nozīmē, ka $AC \parallel A'B$. Analoģiski varam iegūt, ka $AB \parallel A'C$, kas nozīmē, ka četrstūris $ACA'B$ ir paralelograms.

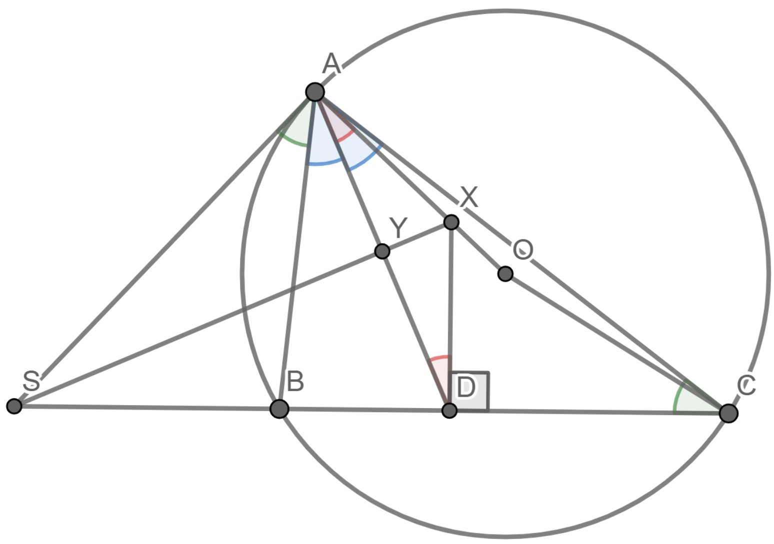
Ar M apzīmēsim malas BC viduspunktu. No paralelograma īpašībām zināms, ka $ACA'B$ diagonāļu krustpunkts ir diagonāļu BC un AA' viduspunkts, kas attiecīgi ir punkts M. No $BD = EC$ ievērosim, ka $BE = BC - CE = BC - BD = CD$. Tā kā $BM = CM$, tad $ME = BM - BE = CM - CD = MD$. Tad četrstūra $ADA'E$ diagonāles AA' un DE krustpunktā M dalās uz pusēm, kas no paralelograma pazīmēm nozīmē, ka $ADA'E$ ir paralelograms. Tātad $AD \parallel A'E$, no kā iegūstam $\angle A'ED = \angle ADE$.

Ievērosim, ka ED ir ir pieskare $\odot(AQDP)$, tādēļ no hordas-pieskares leņķa $\angle AQD = \angle ADE$. Iepriekš ieguvām arī $\angle AQD = \angle BPD = \angle A'YD$. Tātad

$$\angle A'ED = \angle ADE = \angle AQD = \angle A'YD,$$

kas nozīmē, ka četrstūris $A'YED$ ir ievilkts. No $\odot(XDQC)$ varam arī ievērot, ka $\angle CXD = \angle AQD$. Tā kā $\angle A'ED = \angle AQD$, tad $\angle CXD = \angle A'ED$, no kā iegūstam, ka četrstūris $EDXA'$ ir ievilkts. Apvienojot abus iegūtos ievilktos četrstūrus, secinām, ka punkti Y, E, D, X, A' atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas pierāda prasīto.

5.uzdevums. Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kurā $AB < AC$ un kura apvilktās riņķa līnijas centrs ir punkts O. Leņķa $\angle BAC$ bisektrise krusto malu BC punktā D. Taisne, kas vilkta caur punktu D perpendikulāri taisnei BC, krusto nogriezni AO punktā X. Punkts Y ir nogriežņa AD viduspunkts. Pierādīt, ka punkti B, C, X, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas.



Atrisinājums. Apzīmējam trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas pieskares punktā A un taisnes BC krustpunktu ar S.

Ievērosim, ka $\angle SAB = \angle C$ kā hordas-pieskares leņķis, un $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle A = \angle DAC$. Tātad $\angle SAD = \angle SAB + \angle BAD = \frac{1}{2}\angle A + \angle C$. Tā kā $\angle ADS$ ir trijstūra DAC ārējais leņķis, tad $\angle ADS = \angle DAC + \angle C = \frac{1}{2}\angle A + \angle C$. Secinām, ka $\angle SAD = \frac{1}{2}\angle A + \angle C = \angle ADS$, tātad $SA = SD$. Dots, ka $YA = YD$, tādēļ SY ir nogriežņa AD vidusperpendikuls.

Izteiksim $\angle XDA$ ar trijstūra ABC leņķiem $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$:

$$\angle XDA = \angle XDS - \angle ADS = 90° - \left(\frac{1}{2}\angle A + \angle C\right) = \left(90° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C\right) - \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C.$$

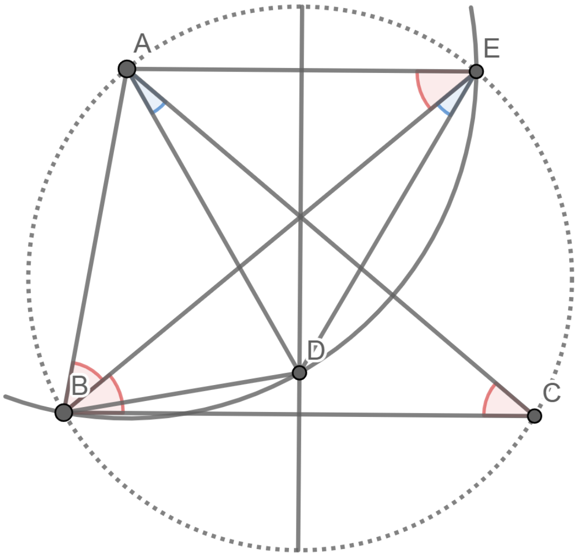
Tā kā $\angle COA = 2\angle B$ kā centra leņķis, un $AO = CO$ kā rādiusi, tad $\angle OAC = 90° - \angle B$. Tad varam izteikt $\angle DAX$:

$$\angle DAX = \angle DAC - \angle OAC = \frac{1}{2}\angle A - (90° - \angle B) = \frac{1}{2}\angle A - \left(90° - \frac{1}{2}\angle B\right) + \frac{1}{2}\angle B =$$
$$= \frac{1}{2}\angle A - \left(\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C\right) + \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C.$$

Esam ieguvuši, ka $\angle XDA = \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = \angle DAX$, tātad $XA = XD$, kas nozīmē, ka punkts X pieder nogriežņa AD vidusperpendikulam SY.

No punkta pakāpes pret trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju zināms, ka $SA^2 = SB \cdot SC$. Ievērosim, ka trijstūris SAX ir taisnleņķa, kurā $\angle SAX = 90°$, jo rādiuss OA ir perpendikulārs pieskarei SA. Tā kā $AD \perp SY$, tad AY ir augstums pret hipotenūzu SX. No sakarībām taisnleņķa trijstūrī zināms, ka $SA^2 = SY \cdot SX$. Tātad $SB \cdot SC = SA^2 = SY \cdot SX$, kas no punkta pakāpes nozīmē, ka četrstūris $BYXC$ ir ievilkts, pierādot prasīto.

6.uzdevums. Dots trijstūris ABC, kurā $\angle ABC = 2\angle ACB$. Riņķa līnija ar rādiusu AB un centru punktā A krusto BC vidusperpendikulu punktā D, kurš atrodas leņķa $\angle BAC$ iekšpusē. Pierādīt, ka $\angle DAC = \frac{1}{3}\angle BAC$.



Atrisinājums. Apzīmēsim $\angle ABC$ bisektrises krustpunktu ar uzdevumā doto riņķa līniju (kurai rādiuss ir AB un centrs A) kā punktu E.

Tā kā BE ir $\angle ABC$ bisektrise un $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle ABC$, tad $\angle EBA = \angle CBE = \angle ACB$. Ievērosim arī, ka $AB = AE$ kā riņķa līnijas rādiusi, tāpēc $\angle AEB = \angle EBA$. Tā kā $\angle AEB = \angle CBE$, tas no šķērsleņķu īpašības nozīmē, ka $AE \parallel BC$. Tātad četrstūris $AECB$ ir trapece. Papildus tam arī ieguvām, ka $\angle AEB = \angle EBA = \angle ACB$, kas nozīmē, ka trapece $AECB$ ir ievilkta riņķa līnijā. Vienīgās trapeces, ko var ievilkt riņķa līnijā, ir vienādsānu trapeces, tādēļ $AECB$ ir vienādsānu trapece ar pamatiem $AE \parallel BC$.

Vienādsānu trapeces pamatiem ir kopīgs vidusperpendikuls, kas ir arī šī veida trapeču simetrijas ass. Tā kā punkts D atrodas uz $AECB$ pamatu vidusperpendikula, tad no simetrijas iegūstam $\angle DAC = \angle BED$. Ievērosim, ka $\angle BED$ ir ievilkts leņķis riņķa līnijā ar centru A un rādiusu AB, bet $\angle BAD$ ir centra leņķis, un abi minētie leņķi balstās uz vienu hordu BD. Tātad $\angle BAD = 2\angle BED$. Tad

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = 2\angle BED + \angle DAC = 2\angle DAC + \angle DAC = 3\angle DAC.$$

Izdalot iegūto leņķu vienādību ar 3, iegūstam $\angle DAC = \frac{1}{3}\angle BAC$, kas bija jāpierāda.

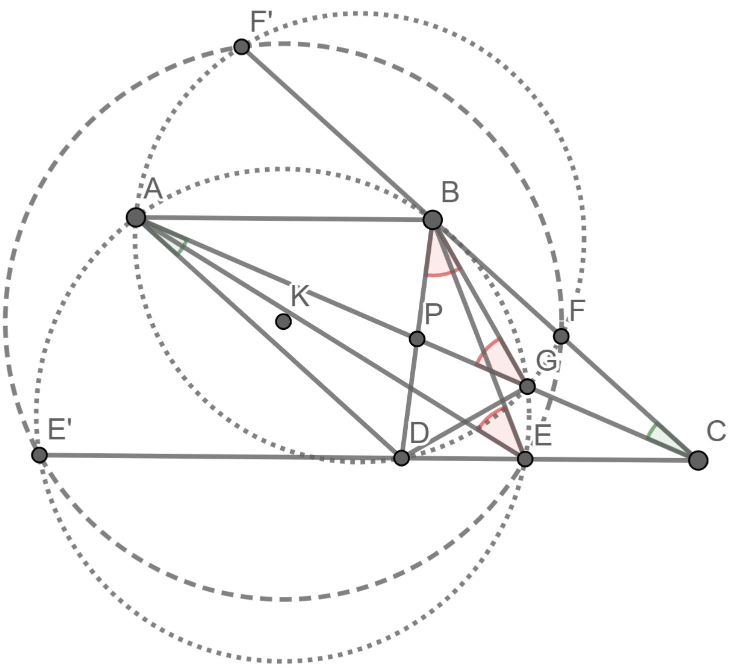
7.uzdevums Dots paralelograms $ABCD$. Punkts E atrodas uz nogriežņa CD ar īpašību, ka

$$2\angle AEB = \angle ADB + \angle ACB,$$

un punkts F atrodas uz nogriežņa BC ar īpašību, ka

$$2\angle DFA = \angle DCA + \angle DBA.$$

Punkts K ir trijstūra ABD apvilktās riņķa līnijas centrs. Pierādīt, ka $KE = KF$.



Atrisinājums. Apzīmēsim paralelograma $ABCD$ diagonāļu krustpunktu ar P (kas dala diagonāles uz pusēm) un atliksim uz nogriežņa PC punktu G, kuram izpildās $GP = PB = PD$.

Mazliet pārveidosim doto leņķu nosacījumu. Ievērosim, ka $\angle DAC = \angle ACB$, tādēļ $\angle ADB + \angle ACB = \angle ADP + \angle DAP = \angle BPA$, jo $\angle BPA$ ir trijstūra APD ārējais leņķis. Tātad $2\angle AEB = \angle ADB + \angle ACB = \angle BPA$. Ievērosim, ka $\angle BPA$ ir arī trijstūra GPB ārējais leņķis, tādēļ $\angle BPA = \angle PBG + \angle BGP$. No punkta G definīcijas $GP = PB$, tādēļ $\angle PBG = \angle BGP \implies \angle BPA = 2\angle BGP$. Tas nozīmē, ka $2\angle AEB = \angle BPA = 2\angle BGA \implies \angle AEB = \angle BGA$, tātad četrstūris $ABGE$ ir ievilkts. Pēc analoģiska principa var pierādīt, ka $\angle DFA = \angle AGD$, tāpēc arī četrstūris $AFGD$ ir ievilkts.

Atliksim uz taisnes CD punktu E', kurš ir simetrisks punktam E attiecībā pret nogriežņa AB vidusperpendikulu. Tā kā $AB \parallel CD$, tad iegūtā simetriskā figūra ir vienādsānu trapece $ABEE'$, kura ir ievilkta riņķa līnijā $\odot(ABE)$. Tā kā uz šīs riņķa līnijas atrodas arī punkts G, tad visi punkti A, B, G, E, E' atrodas uz vienas riņķa līnijas. Analoģiskā veidā definējam punktu F' uz taisnes CB tā, lai $AF'FD$ būtu vienādsānu trapece, un tad attiecīgi punkti A, F', F, G, D atradīsies uz vienas riņķa līnijas.

Ievērosim, ka riņķa līniju $\odot(ABGEE')$ un $\odot(AF'FGD)$ radikālā ass ir taisne AG, kura iet caur punktu C. No punkta pakāpes zināms, ka $CE \cdot CE' = CG \cdot CA = CF \cdot CF'$, tātad četrstūris $EE'F'F$ ir ievilkts. Šim četrstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs ir malu EE' un FF' vidusperpendikulu krustpunkts. Atcerēsimies, ka $ABEE'$ un $AF'FD$ ir vienādsānu trapeces ar attiecīgi pamatiem $AB \parallel EE'$ un $AD \parallel FF'$. Vienādsānu trapecē pamatu vidusperpendikuli sakrīt, tādēļ EE' un FF' vidusperpendikuli ir attiecīgi nogriežņu AB un AD vidusperpendikuli, kas krustojas trijstūra ABD apvilktās riņķa līnijas centrā K. Tātad K ir arī $\odot(EE'F'F)$ apvilktās riņķa līnijas centrs un $KE = KF$ kā rādiusi, kas dod prasīto.