1.uzdevums Atrast visus naturālu skaitļu pārus (a, b), kuriem a un b ir savstarpēji pirmskaitļi, $a < b$ un

$$b \mid (n+2)a^{n+1002} - (n+1)a^{n+1001} - na^{n+1000}$$

katram naturālam skaitlim n.

Atrisinājums. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$b \mid (n+2)a^{n+1002} - (n+1)a^{n+1001} - na^{n+1000}$$
$$b \mid a^{n+1000}((n+2)a^2 - (n+1)a - n)$$

Tā kā $\gcd(a, b) = 1$, tad

$$b \mid (n+2)a^2 - (n+1)a - n$$

katram naturālam skaitlim n. Aplūkosim šo sakarību pie $n = 1$ un $n = 4$. Iegūstam, ka $b \mid 3a^2 - 2a - 1$ un $b \mid 6a^2 - 5a - 4$. Izmantojot dalāmības īpašības, secinām, ka

$$b \mid 2(3a^2 - 2a - 1) - (6a^2 - 5a - 4)$$
$$b \mid 6a^2 - 4a - 2 - 6a^2 + 5a + 4$$
$$b \mid a + 2$$

Tas nozīmē, ka b ir nepāra, jo pretējā gadījumā a arī būtu pāra, kas ir pretrunā $\gcd(a, b) = 1$. Ievērosim, ka no iegūtās sakarības izriet, ka $a \equiv -2 \pmod{b}$. Līdz ar to

$$0 \equiv 3a^2 - 2a - 1 \equiv$$
$$\equiv 3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 1 \equiv$$
$$\equiv 15 \pmod{b}$$

Tas nozīmē, ka $b \mid 15$. Ņemot vērā to, ka skaitlis b ir nepāra, varam aplūkot sekojošus gadījumus

- Ja $b = 1$, tad tā kā $a < b = 1$, tad secinām, ka neeksistē meklētais naturālais skaitlis a.
- Ja $b = 3$, tad no $b \mid a + 2$ seko, ka eksistē naturāls skaitlis k, ka $3k = a + 2$. Ievērosim, ka $3k = a + 2 < b + 2 = 5$, kas nozīmē, ka $k = 1$ un $a = 1$. Taču tas ir pretrunā ar to, ka $a < b$.
- Ja $b = 5$, tad no $b \mid a + 2$ seko, ka eksistē naturāls skaitlis k, ka $5k = a + 2$. Ievērosim, ka $5k = a+2 < b+2 = 7$, kas nozīmē, ka $k = 1$ un $a = 3$. Skaitļu pāris $(a, b) = (3, 5)$ ir atrisinājums, jo $\gcd(3, 5) = 1$ un

  $$b = 5 \mid a^{n+1000}((n+2)a^2 - (n+1)a - n) = 3^{n+1000}(5n + 15) = 5(3^{n+1000}(n+3))$$

  katram naturālam skaitlim n.

2.uzdevums Doti naturāli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka

$$
\begin{gathered}
ca - 1 \mid ab^2 - 1 \\
bc - 1 \mid ca^2 - 1 \\
ab - 1 \mid bc^2 - 1.
\end{gathered}
$$

Pierādīt, ka kāds no skaitļiem a, b, c ir naturāla skaitļa kvadrāts.

Atrisinājums. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka skaitlis a ir mazākais no skaitļiem a, b, c, tas ir, $a \leq b$ un $a \leq c$. Ievērosim, ka no uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$
\begin{gathered}
bc - 1 \mid ca^2 - 1 \\
bc - 1 \mid (ca^2 - 1) - (bc - 1) \\
bc - 1 \mid c(a^2 - b)
\end{gathered}
$$

Ievērosim, ka $\gcd(c, bc-1) = 1$, līdz ar to $bc - 1 \mid a^2 - b$. Ievērosim, ka tādā gadījumā $|a^2 - b| > bc - 1$. Apskatīsim iespējamos gadījumos

- Ja $a^2 - b = 0$, tad $b = a^2$ un skaitlis b ir vesela skaitļa kvadrāts.
- Ja $b - a^2 > 0$, tad $b - a^2 \geq bc - 1$, taču ievērosim, ka

  $$bc - 1 \geq bc - a^2 \geq b - a^2 \geq bc - 1$$

  Tas nozīmē, ka $bc - 1 = bc - a^2 = b - a^2$, kas var izpildīties tad un tikai tad, ja $a = 1$, kas ir naturāla skaitļa kvadrāts.
- Ja $a^2 - b > 0$, tad $a^2 - b \geq bc - 1$, taču ievērosim, ka

  $$bc - 1 \geq a^2 - 1 \geq a^2 - b \geq bc - 1$$

  Tas nozīmē, ka $bc - 1 = a^2 - 1 = a^2 - b$, kas var izpildīties tad un tikai tad, ja $b = 1$, kas ir naturāla skaitļa kvadrāts.

Visos gadījumos esam ieguvuši, ka kāds no skaitļiem a, b, c ir naturāla skaitļa kvadrāts.

3.uzdevums Atrast mazāko naturālo skaitli n ar īpašību, ka visiem naturāliem skaitļiem x, y, z, kuriem $x \mid y^3$, $y \mid z^3$ un $z \mid x^3$, ir spēkā, ka $xyz \mid (x+y+z)^n$.

Atrisinājums. Mazākais naturālais skaitlis ar vajadzīgo īpašību ir $n = 13$. Vispirms pierādīsim, ka priekš $n < 13$ var atrast naturālus skaitļus x, y, z, kuriem neizpildās uzdevuma prasītais.

Aplūkosim $x = p^3, y = p, z = p^9$, kur p ir pirmskaitlis. Viegli pārbaudīt, ka $x \mid y^3$, $y \mid z^3$ un $z \mid x^3$, taču

$$(x+y+z)^n = p^n(1+p^2+p^8)$$

Šim skaitlim ir jādalās ar $xyz = p^{13}$. Ievērosim, ka skaitlis $(1+p^2+p^8)$ ar p nedalās, līdz ar to vienīgais skaitlis, kurš var izdalīties ar p^{13}, ir p^n, kas nav iespējams, ja $n < 13$.

Tagad pamatosim, ka, ja $n \geq 13$ un naturāliem skaitļiem x, y, z izpildās $x \mid y^3$, $y \mid z^3$ un $z \mid x^3$, tad $xyz \mid (x+y+z)^n$. Aplūkosim pirmskaitli p, ar ko dalās vismaz viens no skaitļiem x, y, z. Apzīmēsim $a = \nu_p(x), b = \nu_p(y), p = \nu_p(z)$. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$\begin{aligned}\nu_p(x) \leq 3\nu_p(y) &\implies a \leq 3b \\ \nu_p(y) \leq 3\nu_p(z) &\implies b \leq 3c \\ \nu_p(z) \leq 3\nu_p(x) &\implies c \leq 3a\end{aligned}$$

Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $\min(a,b,c) = a$. Tādā gadījumā $\nu_p(x+y+z) = \min(a,b,c) = a$, līdz ar to $\nu_p((x+y+z)^n) = n\nu_p(x+y+z) \geq 13a$. Mums pietiek pierādīt, ka

$$\nu_p((x+y+z)^n) \geq 13a \geq \nu_p(xyz) = \nu_p(x) + \nu_p(y) + \nu_p(z) = a+b+c,$$

lai secinātu, ka $xyz \mid (x+y+z)^n$. Ievērosim, ka $c \leq 3a$ un $b \leq 3c \leq 9a$, līdz ar to

$$a+b+c \leq a+9a+3a = 13a,$$

kas arī bija jāpierāda.

4.uzdevums Atrast visus veselu skaitļu pārus (x, y), kuriem skaitļi $x^3 + y$ un $x + y^3$ abi dalās ar skaitli $x^2 + y^2$.

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim, ka $\gcd(x, y) = 1$. Pieņemsim, ka $\gcd(x, y) = d$ un $x = da, y = db$, kur $\gcd(a, b) = 1$. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$\begin{gathered}x^2 + y^2 \mid x^3 + y\\ d^2a^2 + d^2b^2 \mid d^3a^3 + db\\ d^2(a^2 + b^2) \mid d(d^2a^3 + b)\\ d(a^2 + b^2) \mid d^2a^3 + b\end{gathered}$$

Ievērosim, ka $d \mid d(a^2 + b^2) \mid d^2a^3 + b$. Pamanīsim, ka $d \mid d^2a^3$, kas nozīmē, ka $d \mid b$. Analoģiski no $x^2 + y^2 \mid x + y^3$ varam izsecināt, ka $d \mid a$. Tātad $d \mid a$ un $d \mid b$, kas nozīmē, ka $d \mid \gcd(a, b) = 1$, līdz ar to $d = 1$. Tas nozīmē, ka $\gcd(x, y) = 1$. Ievērosim, ka

$$\gcd(x^2 + y^2, y) = \gcd(x^2, y) = \gcd(x, y) = 1$$

Līdz ar to

$$\begin{gathered}x^2 + y^2 \mid x^3 + y\\ x^2 + y^2 \mid x^3 + y - x(x^2 + y^2)\\ x^2 + y^2 \mid y - xy^2\\ x^2 + y^2 \mid y(1 - xy)\end{gathered}$$

Tā kā $\gcd(x^2 + y^2, y) = 1$ un $x^2 + y^2 \mid y(1 - xy)$, secinām, ka $x^2 + y^2 \mid 1 - xy$.

- Ja $1 - xy < 0$, tad
$$xy - 1 \geq x^2 + y^2 \geq 2xy \implies 0 \geq xy + 1 > 2,$$
kur mēs izmantojām to, ka $xy > 1$. Pēdējā iegūtā nevienādība acīmredzami ir aplama.

- Ja $1 - xy \geq 0$, tad $1 - xy \geq x^2 + y^2$ jeb $\frac{3}{4}x^2 + (y + \frac{x}{2})^2 \leq 1$, kas nozīmē, ka $x^2 \leq 1$ un simetriski $y^2 \leq 1$. Tā kā x un y ir veseli skaitļi, secinām, ka $x, y \in \{-1, 0, 1\}$. Pārlasot visus gadījumus, redzams, ka der visi iespējamie pāri, izņemot $(0, 0)$.

5.uzdevums Ar $\mathbb{N}$ apzīmēsim naturālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ar īpašību, ka

$$f(x) + yf(y) \mid x + f(y^2)$$

visiem naturāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. Ievērosim, ka no $P(1, 1)$ izriet, ka

$$2f(1) \mid 1 + f(1) \implies 1 + f(1) \geq 2f(1) \implies 1 \geq f(1)$$

Tas nozīmē, ka $f(1) = 1$.

Apgalvojums. Visiem pirmskaitļiem p ir spēkā, ka $f(p-1) = p-1$.
Pierādījums. Aplūkosim $P(p-1, 1)$

$$f(p-1) + 1 \mid p$$

Tas nozīmē, ka $f(p-1)+1 = 1$ vai arī $f(p-1)+1 = p$. Pirmais gadījums nav iespējams, jo tādā gadījumā $f(p-1) = 0$, kas ir pretrunā ar to, ka funkcija pieņem naturālās vērtības. Līdz ar to $f(p-1) = p-1$.

Aplūkosim $P(p-1, y)$, kur y ir fiksēts skaitlis

$$p - 1 + yf(y) \mid p - 1 + f(y^2)$$
$$p - 1 + yf(y) \mid p - 1 + f(y^2) - \big(p - 1 + yf(y)\big)$$
$$p - 1 + yf(y) \mid f(y^2) - yf(y)$$

Pēdējā sakarība izpildās visiem pirmskaitļiem p. Tā kā pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz, tad eksistē tāds pirmskaitlis p, ka $p - 1 + yf(y) > |f(y^2) - yf(y)|$. Tas nozīmē, ka dalāmība var izpildīties tad un tikai tad, ja $f(y^2) - yf(y)$ jeb $f(y^2) = yf(y)$.

Tā kā $f(y^2) = yf(y)$, tad $f((p-1)^2) = (p-1)f(p-1) = (p-1)^2$. Aplūkosim $P(x, p-1)$, kur x ir fiksēts naturāls skaitlis

$$f(x) + (p-1)^2 \mid x + (p-1)^2$$
$$f(x) + (p-1)^2 \mid x + (p-1)^2 - \big(f(x) + (p-1)^2\big)$$
$$f(x) + (p-1)^2 \mid x - f(x)$$

Pēdējā sakarība izpildās visiem pirmskaitļiem p. Tā kā pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz, tad eksistē tāds pirmskaitlis p, ka $(p-1)^2 + f(x) > |x - f(x)|$. Tas nozīmē, ka dalāmība var izpildīties tad un tikai tad, ja $f(x) - x = 0$ jeb $f(x) = x$. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija tiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

6.uzdevums Atrast visus naturālus skaitļus $n \geq 1$, kuriem eksistē naturālu skaitļu pāris (a, b) ar īpašību, ka skaitlis $a^2 + b + 3$ nedalās ar neviena pirmskaitļa kubu un

$$n = \frac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3}.$$

Atrisinājums. Atrisinājums sastāvēs no vairākiem soļiem.

1.solis. Skaitlis $(a+1)^3$ dalās ar skaitli $a^2 + b + 3$.
Pierādījums. Ievērosim, ka

$$a^2 + b + 3 \mid 3(a^2 + b + 3) - ab - 3b - 8 = 3a^2 - ab + 1$$

No otras puses varam iegūt, ka

$$a^2 + b + 3 \mid a(a^2 + b + 3) + (3a^2 - ab + 1) = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a + 1)^3,$$

kas arī bija jāpierāda.

2.solis. Skaitlis $(a + 1)^2$ dalās ar skaitli $a^2 + b + 3$.
Pierādījums. Ievērosim, ka katram pirmskaitlim p ar īpašību, ka $p \mid a^2+b+3$, izpildās $\nu_p(a^2+b+3) \leq 2$. No otras puses $p \mid (a+1)^3$, kas nozīmē, ka $p \mid a+1$. Citiem vārdiem sakot, $\nu_p(a+1) \geq 1$, kas nozīmē, ka $\nu_p((a+1)^2) = 2\nu_p(a+1) \geq 2$. Līdz ar to iegūstam, ka $\nu_p((a+1)^2) \geq \nu_p(a^2+b+3)$. Atkārtojot šo argumentu katram pirmskaitlim p, kurš dala a^2+b+3, iegūstam, ka $a^2+b+3 \mid (a+1)^2$, kas arī bija jāpierāda.

3.solis. Izpildās $(a + 1)^2 = a^2 + b + 3$.
Pierādījums. Pieņemsim, ka $(a+1)^2 = k(a^2+b+3)$, kur $k \geq 2$ ir naturāls skaitlis. Doto vienādojumu var pārrakstīt kā

$$ka^2 + kb + 3k = a^2 + 2a + 1$$

Ievērosim, ka $a^2 + 1 \geq 2a$, tāpēc

$$a^2 + 2a + 1 = (k - 1)a^2 + a^2 + 1 - 1 + kb + 3k > a^2 + 2a + 1,$$

kas ir acīmredzama pretruna.

Ievērosim, ka

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 + b + 3 \implies b = 2a - 2$$

Līdz ar to

$$n = \frac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3} = \frac{a(2a - 2) + 3(2a - 2) + 8}{a^2 + 2a + 1} = \frac{2(a^2 + 2a + 1)}{a^2 + 2a + 1} = 2$$

Priekš $n = 2$ skaitļu pāris $(a, b) = (2, 2)$ der, jo $a^2+b+3 = 9$, kas nedalās ne ar vienu pirmskaitļa kubu.

7.uzdevums Doti naturāli skaitļi a un b, kuriem skaitlis $a!b!$ dalās ar skaitli $a!+b!$. Pierādīt, ka $3a \geq 2b+2$.

Atrisinājums. Ja $a \geq b+1$, tad $3a \geq 3b+3 \geq 2b+2$, ko arī vajadzēja pierādīt. Pieņemsim pretējo, ka $a < b+1$, kas nozīmē, ka $a \leq b$. Apzīmēsim, ka $b = a+k$ un $N = (a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+k)$, kur k ir nenegatīvs vesels skaitlis. Ievērosim, ka tādā gadījumā

$$\begin{gathered} a!+b! \mid a!b! \\ a!+(a+k)! \mid a!(a+k)! \\ a!(1+N) \mid a!(a+k)! \\ 1+N \mid (a+k)! \\ 1+N \mid a!\cdot N \end{gathered}$$

Pēdējā rindā mēs izmantojām to, ka $(a+k)! = a!\cdot N$. Tā kā $\gcd(1+N, N) = 1$, tad secinām, ka $1+N \mid a!$.

Aplūkosim pirmskaitli $p \mid 1+N$, tad $p \mid a!$, kas nozīmē, ka $p \leq a$. Ja kāds no skaitļiem $a+1, a+2, \ldots, a+k$ dalās ar p, tad acīmredzami, ka $p \nmid 1+N$. Tas nozīmē, ka $k < p$, jo pretējā gadījumā starp k pēc kārtas esošiem skaitļiem $a+1, a+2, \ldots, a+k$ kāds dalās ar p. Piedevām varam pieņemt, ka $3a < 2b+2$, no kurienes izriet, ka

$$3a < 2b+2 \implies a-2 < 2k \implies \frac{a-2}{2} < k < p \leq a$$

Tas nozīmē, ka visi skaitļa $1+N$ pirmreizinātāji atrodas intervālā $[\frac{a}{2}, a]$ un $\nu_p(1+N) \leq \nu_p(a!) = 1$. Līdz ar to varam iegūt sekojošo novērtējumu

$$1+N < \left(\frac{a}{2}+1\right)\cdot\ldots\cdot a$$

Pirms tam ieguvām, ka $\frac{a}{2} \leq k$, tādēļ

$$1+N > (a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot\left(a+\frac{a}{2}\right),$$

kas dod pretrunu, un prasītais izpildās.