1.uzdevums Atrast visus naturālus skaitļus n ar īpašību, ka $n^{n-1}-1$ dalās ar skaitli 2^{2015}, bet nedalās ar skaitli 2^{2016}.

Atrisinājums. Ievērosim, ka tā kā $n^{n-1}-1$ dalās ar divnieka pakāpi, tad n ir nepāra skaitlis, līdz ar to $n-1$ ir pāra skaitlis. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $\nu_2(n^{n-1}-1)=2015$. Pielietojot LTE lemmu, iegūsim, ka

$$\nu_2(n^{n-1}-1)=\nu_2(n-1)+\nu_2(n-1)+\nu_2(n+1)-1=2\nu_2(n-1)+\nu_2(n+1)-1$$

Ievērosim, ka $n-1$ un $n+1$ ir divi pēc kārtas esoši naturāli skaitļi, līdz ar to viens no tiem nedalās ar 4. Aplūkosim visus iespējamos gadījumus

- Ja $n-1$ nedalās ar 4, tad $\nu_2(n-1)=1$, līdz ar to iegūstam, ka

  $$2015=2\nu_2(n-1)+\nu_2(n+1)-1=2-1+\nu_2(n+1) \implies \nu_2(n+1)=2014$$

  Tas nozīmē, ka visi skaitļi formā $n+1=2^{2014}k$, kur k ir nepāra skaitlis, apmierina uzdevuma nosacījumus.

- Ja $n+1$ nedalās ar 4, tad $\nu_2(n+1)=1$, līdz ar to iegūstam, ka

  $$2015=2\nu_2(n-1)+\nu_2(n+1)-1=2\nu_2(n-1)$$

  Tā ir pretruna, jo iegūtās sakarības kreisā puse ir nepāra skaitlis, bet labā puse ir pāra skaitlis.

Līdz ar to vienīgie skaitļi, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir $n=2^{2014}k-1$, kur k ir nepāra skaitlis.

2.uzdevums Atrast visus naturālu skaitļu trijniekus (a, b, p), kur p ir pirmskaitlis, ar īpašību, ka

$$a^p + b^p = p!.$$

Atrisinājums. Vispirms aplūkosim gadījumu, kad p ir nepāra pirmskaitlis. Ievērosim, ka dotā vienādojuma labā puse dalās ar p, līdz ar to dotā vienādojuma kreisā puse arī dalās ar p. No Mazās Fermā teorēmas izriet, ka

$$0 \equiv a^p + b^p \equiv a + b \pmod{p}$$

Ievērosim, ka $p \nmid a$, jo pretējā gadījumā, ja $p \mid a$, tad $a^p \geq p^p > p!$, kas nav iespējams. Līdzīgi varam iegūt, ka $p \nmid b$. Mums izpildās visi vajadzīgie nosacījumi, lai pielietotu LTE lemmu. No tās izriet, ka

$$\begin{aligned} 1 = \nu_p(p!) = \nu_p(a^p + b^p) = \\ = \nu_p(a+b) + \nu_p(p) = \\ = \nu_p(a+b) + 1 \geq 2 \end{aligned}$$

Pēdējais novērtējums izriet no fakta, ka $p \mid a + b$, tāpēc $\nu_p(a+b) \geq 1$. Esam ieguvuši, ka $1 \geq 2$, kas acīmredzami ir pretruna, līdz ar to vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos, kad p ir nepāra skaitlis.

Ja $p = 2$, tad jāatrisina vienādojums $a^2 + b^2 = 2$, kura vienīgie atrisinājumi naturālos skaitļos ir $(a, b) = (1, 1)$. Visi gadījumi aplūkoti.

3.uzdevums Atrast visus pirmskaitļu pārus (p, q) ar īpašību, ka $pq \mid 5^p + 5^q$.

Atrisinājums. Aplūkosim gadījumu, kad neviens no skaitļiem p, q nav vienāds ar 5. No Mazās Fermā teorēmas izriet, ka

$$0 \equiv 5^p + 5^q \equiv 5 + 5^q \pmod{p}$$
$$5^q \equiv -5 \pmod{p}$$
$$5^{q-1} \equiv -1 \pmod{p}$$
$$5^{2(q-1)} \equiv 1 \pmod{p}$$

Aplūkosim $d_1 = \text{ord}_p 5$. No teorijas materiāla 1.piemēra sadaļā 3.2 izriet, ka $\nu_2(d_1) = \nu_2(q-1) + 1$. No lemmas par orderi izriet arī, ka $d_1 \mid p - 1$, kas nozīmē, ka

$$\nu_2(p-1) \geq \nu_2(q-1) + 1$$

Analoģiski varam iegūt, ka

$$5^{2(p-1)} \equiv 1 \pmod{q} \qquad (\star)$$

Aplūkosim $d_2 = \text{ord}_p 5$. No teorijas materiāla 2.piemēra sadaļā 3.2 izriet, ka $\nu_2(d_2) = \nu_2(p-1) + 1$. No lemmas par orderi izriet arī, ka $d_2 \mid q - 1$, kas nozīmē, ka

$$\nu_2(q-1) \geq \nu_2(p-1) + 1 \qquad (\star\star)$$

Saskaitot nevienādības $(\star)$ un $(\star\star)$, iegūstam, ka

$$\nu_2(p-1) + \nu_2(q-1) \geq \nu_2(p-1) + \nu_2(q-1) + 2$$
$$0 \geq 2$$

Pēdējā nevienādība ir acīmredzami aplama, tāpēc neeksistē pirmskaitļu pāris (p, q), kurā neviens no skaitļiem (p, q) nav vienāds ar 5.

Acīmredzami, ka $(p, q) = (5, 5)$ ir atrisinājums. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $p = 5$. Tādā gadījumā $5q \mid 5^5 + 5^q$. Ievērosim, ka $5 \mid 5^5 + 5^q$, tāpēc mums pietiek atrast tādu pirmskaitli q, ka $q \mid 5^5 + 5^q$. No Mazās Fermā teorēmas izriet, ka

$$0 \equiv 5^5 + 5^q \equiv 5^5 + 5 \pmod{q}$$

Tas nozīmē, ka $q \mid 5^5 + 5 = 5(5^4 + 1)$. Tā kā $q \neq 5$, tad $q \mid 5^4 + 1 = 626$. Līdz ar to $q = 2$ vai $q = 313$. Secinām, ka visi iespējamie atrisinājumi ir $(5, 5), (5, 2), (2, 5), (5, 313)$ un $(313, 5)$.

4.uzdevums Pierādīt, ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās

$$2^{n(n+1)} \mid 32 \cdot \varphi(2^{2^n} - 1)$$

Atrisnājums. Pierādīsim prasīto, izmantojot indukciju pa n. Priekš $n = 1$ un $n = 2$ ir viegli pārbaudīt, ka prasītais izpildās.

Pieņemsim, ka prasītais izpildās priekš $n = k \geq 2$, tas nozīmē, ka

$$2^{k(k+1)} \mid 32 \cdot \varphi(2^{2^k} - 1)$$

Mūsu mērķis ir pierādīt, ka prasītais izpildās priekš $n = k + 1$, tas ir

$$2^{(k+1)(k+2)} \mid 32 \cdot \varphi(2^{2^{k+1}} - 1)$$

Ievērosim, ka $2^{2^{k+1}} - 1 = (2^{2^k} - 1)(2^{2^k} + 1)$, kur abi reizinātāji ir savstarpēji pirmskaitļi, tāpēc no Eilera funkcijas multiplikatīvās īpašības izriet, ka

$$32 \cdot \varphi(2^{2^{k+1}} - 1) = 32 \cdot \varphi(2^{2^k} - 1) \cdot \varphi(2^{2^k} + 1)$$

No induktīvā pieņēmuma izriet, ka $2^{k(k+1)} \mid 32 \cdot \varphi(2^{2^k} - 1)$, līdz ar to mums ir pietiekami pierādīt, ka

$$2^{(k+1)(k+2)-k(k+1)} = 2^{2k+2} \mid \varphi(2^{2^k} + 1)$$

Apgalvojums. Visiem skaitļa skaitļa $2^{2^k} + 1$ pirmreizinātājiem p izpildās, ka $2^{k+1} \mid p - 1$.
Pierādījums. Aplūkosim pirmskaitli p ar īpašību, ka $p \mid 2^{2^k} + 1$, tad

$$2^{2^k} \equiv -1 \pmod p \implies 2^{2^{k+1}} \equiv 1 \pmod p$$

Apzīmēsim $d = \operatorname{ord}_p 2$, tad no teorijas materiāla 2. piemēra sadaļā 3.2 izriet, ka $\nu_2(d) = \nu_2(2^k) + 1 = k+1$. No lemmas par orderi izriet, ka $d \mid p - 1$, kas nozīmē, ka $2^{k+1} \mid p - 1$, kas arī bija jāpierāda.

Pieņemsim, ka skaitlis $2^{2^k} + 1$ nav pirmskaitļa pakāpe, tad tam eksistē 2 pirmreizinātaji p_1 un p_2. No Eilera formulas izriet, ka

$$2^{2k+2} \mid (p_1 - 1)(p_2 - 1) \mid \varphi(2^{2^k} + 1),$$

kas pierāda prasīto. Līdz ar to mums paliek aplūkot gadījumu, kad skaitlis $2^{2^k}+1$ ir pirmskaitļa p pakāpe.

Pieņemsim, ka $2^{2^k} + 1 = p^a$, kur a ir naturāls skaitlis. Ja a ir nepāra skaitlis, tad no LTE lemmas izriet, ka

$$2^k = \nu_2(2^{2^k}) = \nu_2(p^a - 1) = \nu_2(p - 1) + \nu_2(a) = \nu_2(p - 1)$$

Tas nozīmē, ka $p - 1 = 2^{2^k} b$, kur b ir nepāra skaitlis. Līdz ar to secinām, ka $2^{2^k} + 1 = (2^{2^k} b + 1)^a$, no kurienes izriet, ka $a = b = 1$. Līdz ar to secinām, ka $\varphi(2^{2^k} + 1) = \varphi(p) = p - 1 = 2^{2^k}$. Ievērosim, ka skaitlis 2^{2^k} dalās ar 2^{2k+2}, jo $2^k \geq 2k + 2$ visiem $k \geq 3$.

Ja a ir pāra skaitlis, tad $a = 2b$, kas nozīmē, ka

$$2^{2^k} = p^{2b} - 1 = (p^b - 1)(p^b + 1)$$

Ievērosim, ka $p^b - 1, p^b + 1$ ir divi pēc kārtas sekojoši skaitļi, līdz ar to viens no tiem nedalās ar 4. Tā kā abu skaitļu reizinājums ir divnieka pakāpe, tad mazākais no tiem ir vienāds ar 2, kas nozīmē, ka $p^b - 1 = 2$ jeb $p = 3$ un $b = 1$. No tā izriet, ka $2^{2^k} = 2 \cdot 4 \implies 2^k = 3$, kas nav iespējams.

5.uzdevums Atrast visus naturālus skaitļus n ar īpašību, ka $\frac{2^n+1}{n^2}$ ir vesels skaitlis.

Atrisinājums. Viegli redzēt, ka $n = 1$ ir atrisinājums. Pieņemsim, ka $n \neq 1$ un aplūkosim skaitļa n mazāko pirmreizinātāju p. Ievērosim, ka n ir nepāra skaitlis. Tādā gadījumā

$$2^n + 1 \equiv 0 \pmod p \implies 2^{2n} \equiv 1 \pmod p$$

Apzīmēsim $d = \operatorname{ord}_p 2$. No lemmas par orderi izriet, ka $d \mid p-1$ un $d \mid 2n$. Ja $d = 1$, tad $2^1 \equiv 1 \pmod p$, kas ir pretruna, līdz ar to $d \neq 1$. Aplūkosim skaitļa d patvaļīgu pirmreizinātāju q. Ievērosim, ka $q \leq d < p$, tāpēc $q \nmid n$, jo pretējā gadījumā mēs iegūtu mazāku par p skaitļa n pirmreizinātāju. Tas nozīmē, ka $\gcd(d, n) = 1$, līdz ar to $d \mid 2$. Secinām, ka $2^2 \equiv 1 \pmod p$, kas ir tas pats, kas $3 \equiv 0 \pmod p$, no kā izriet, ka $p = 3$.

Esam ieguvuši skaitļa n mazākais pirmreizinātājs ir 3. No LTE lemmas izriet, ka

$$\begin{gathered}\nu_3(2^n+1) \geq \nu_3(n^2)\\ \nu_3(2+1) + \nu_3(n) \geq 2\nu_3(n)\\ 1 + \nu_3(n) \geq 2\nu_3(n)\\ 1 \geq \nu_3(n)\end{gathered}$$

Tā kā $\nu_3(n)$ ir naturāls skaitlis, tad secinām, ka $\nu_3(n) = 1$. Līdz ar to secinām, ka $n = 3c$, kur $3 \nmid c$. Varam pārrakstīt uzdevumu kā $9c^2 \mid 2^{3c} + 1 = 8^c + 1$.

Ja $c = 1$, tad $n = 3$, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Pretējā gadījumā skaitlim c eksistē mazākais pirmreizinātajs p (šis p ir atšķirīgs no skaitļa n mazākā pirmreizinātāja). Ievērosim, ka

$$8^c + 1 \equiv 0 \pmod p \implies 8^{2c} \equiv 1 \pmod p$$

Apzīmēsim $g = \operatorname{ord}_8 p$. No lemmas par orderi izriet, ka $g \mid p-1$ un $g \mid 2c$. Ja $g = 1$, tad $8^1 \equiv 1 \pmod p$, kas nozīmē, ka $p = 7$. Šo gadījumu mēs aplūkosim pēc brīža. Aplūkosim skaitļa g patvaļīgu pirmreizinātāju q. Ievērosim, ka $q \leq g < p$, tāpēc $q \nmid c$, jo pretējā gadījumā mēs iegūtu mazāku par p skaitļa n pirmreizinātāju. Tas nozīmē, ka $\gcd(g, c) = 1$, līdz ar to $g \mid 2$. Secinām, ka $8^2 \equiv 1 \pmod p$, kas ir tas pats, kas $63 \equiv 0 \pmod p$, no kā izriet, ka $p = 3$ vai $p = 7$. Ievērosim, ka $p = 3$ nav iespējams, jo pēc pieņēmuma $3 \nmid c$.

Atliek aplūkot gadījumu, kad $p = 7$ ir skaitļa c mazākais pirmreizinātājs. Tādā gadījumā $7 \mid 9c^2 \mid 8^c + 1$, taču $8^c + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 7$ – pretruna.

Secinām, ka vienīgie atrisinājumi ir $n = 1$ un $n = 3$.

6.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kas ir definētas naturāliem skaitļiem un pieņem naturālas vērtības, kurām izpildās abas minētās īpašības:

- eksistē tāds naturāls skaitlis M, ka $f(n) \neq 1$ visiem $n \geq M$;
- Visiem naturāliem skaitļiem a, b, n izpildās $f(a)^n \mid f(a+b)^{a^{n-1}} - f(b)^{a^{n-1}}$.

Atrisinājums. Ar $P(a, b, n)$ apzīmēsim doto sakarību. Vispirms pierādīsim sekojošus apgalvojumus.

Apgalvojums. Ir spēkā, ka $f(1) = 1$.
Pierādījums. Pieņemsim, ka $f(1) > 1$. No $P(1, b, n)$ izriet, ka $f(1)^n \mid f(b+1) - f(b)$. Fiksējot b, var atrast tādu naturālu skaitli n, ka $f(1)^n > |f(b+1) - f(b)|$. Tas nozīmē, ka dalāmība var izpildīties tad un tikai tad, ja $f(b+1) = f(b)$. Tādā gadījumā $f(n) = C$, kur C ir konstante. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija der, tāpēc varam pieņemt, ka mēs meklējam nekonstantos atrisinājumus, tāpēc $f(1) = 1$.

Apgalvojums. Bezgalīgi daudziem naturāliem skaitļiem a izpildās, ka $f(a) \mid a$.
Pierādījums. Ja $f(a) = 1$, tad prasītais acīmredzami izpildās. Pieņemsim, ka $f(a) \neq 1$, tad eksistē pirmskaitlis p ar īpašību, ka $p \mid f(a)$. No $P(a, 1, 1)$ izriet, ka $f(a) \mid f(a+1) - 1$. Ievērosim, ka $f(a+1) - 1 = 0$ var izpildīties pēc uzdevuma nosacījumiem tikai galīgam skaitam a vērtību, tāpēc apskatīsim tos a, kuriem $f(a+1) - 1 \neq 0$. Aplūkosim visus iespējamos gadījumus

- Ja p ir nepāra skaitlis, tad varam pielietot LTE lemmu. No tās izriet, ka

$$\begin{gathered}\nu_p(f(a+1)^{a^{n-1}} - 1) \geq \nu_p(f(a)^n) \\ \nu_p(f(a+1) - 1) + \nu_p(a^{n-1}) \geq n\nu_p(f(a)) \\ \nu_p(f(a+1) - 1) + (n-1)\nu_p(a) \geq n\nu_p(f(a)) \\ \nu_p(f(a+1) - 1) - \nu_p(a) \geq n(\nu_p(f(a)) - \nu_p(a))\end{gathered}$$

  Ja $\nu_p(f(a)) - \nu_p(a) > 0$, tad pēdējās nevienādības kreisā puse ir fiksēts skaitlis, bet labā puse pēc patikas liels skaitlis – pretruna. Līdz ar to $\nu_p(f(a)) \leq \nu_p(a)$.

- Ja $p = 2$, tad pieņemsim, ka a ir nepāra skaitlis, tad no LTE lemmas izriet, ka

$$\begin{gathered}\nu_2(f(a+1)^{a^{n-1}} - 1) \geq \nu_2(f(a)^n) \\ \nu_2(f(a+1) - 1) \geq n\nu_2(f(a))\end{gathered}$$

  Ja $\nu_2(f(a)) \neq 0$, tad pēdējās nevienādības kreisā puse ir fiksēts skaitlis, taču labā puse pēc patikas liels skaitlis – pretruna. Līdz ar to $\nu_2(a) = \nu_2(f(a)) = 0$.

  Aplūkosim gadījumu, kad a ir pāra skaitlis, tad no LTE lemmas izriet, ka

$$\begin{gathered}\nu_2(f(a+1)^{a^{n-1}} - 1) \geq \nu_2(f(a)^n) \\ \nu_2(f(a+1) - 1) + \nu_2(f(a) + 1) + \nu_2(a^{n-1}) - 1 \geq n\nu_2(f(a)) \\ \nu_2(f(a+1) - 1) + \nu_2(f(a+1) + 1) + (n-1)\nu_2(a) - 1 \geq n\nu_2(f(a)) \\ \nu_2(f(a+1) - 1) + \nu_2(f(a+1) + 1) - \nu_2(a) - 1 \geq n(\nu_2(f(a)) - \nu_2(a))\end{gathered}$$

  Ja $\nu_2(f(a)) - \nu_2(a) > 0$, tad pēdējās nevienādības kreisā puse ir fiksēts skaitlis, bet labā puse pēc patikas liels skaitlis – pretruna. Līdz ar to $\nu_2(f(a)) \leq \nu_2(a)$.

Secinām, ka visiem pirmskaitļiem ir spēkā, ka $\nu_p(f(a)) \mid \nu_p(a)$, kas nozīmē $f(a) \mid a$.

Ja $a = p$, tad secinām, ka $f(p) \mid p$, kas nozīmē, ka $f(p) = 1$ vai $f(p) = p$. Pēc uzdevuma nosacījumiem eksistē tikai galīgs skaits skaitļu n, kuriem $f(n) = 1$, līdz ar to eksistē naturāls skaitlis M ar īpašību, ka visiem pirmskaitļiem $p > M$ ir spēkā, ka $f(p) = p$. Ievērosim, ka $M = q - 1$, kur q ir kaut kāds pirmskaitlis.

Apgalvojums. Visiem naturāliem skaitļiem $a > M$ ir spēkā, ka $f(a) = a$.
Pierādījums. Prasīto var pierādīt induktīvi. Ja $f(m) = m$, tad no $P(m, 1, 1)$ izriet, ka $f(m) \mid f(m+1) - 1$. Tā kā $f(m+1) \mid m+1$, tad $f(m+1) \leq m+1$. Līdz ar to secinām, ka

$$m = f(m) \leq f(m+1) - 1 \leq m + 1 - 1 = m$$

Tas nozīmē, ka $f(m+1) - 1 = m$, no kurienes izriet, ka $f(m+1) = m+1$. Līdz ar to no indukcijas izriet, ka $f(a) = a$ visiem $a > M$.

Aplūkosim kaut kādu $a < M$.No $P(a, b, 1)$, izriet, ka $f(a) \mid f(a+b) - f(b)$. Izvēlāmies patvaļīgu $b > N$, tad $f(a) \mid f(a+b) - f(b) = a + b - b = a$. Tas ļauj mums pielietot iepriekšējo argumentu priekš $a < M$, kā indukcijas bāzi ņemot to, ka $f(1) = 1$.

Šajā gadījumā pārbaudīt, ka šī funkcija der nav tik viegli kā citos funkcionālvienādojumos, taču to var izdarīt, izmantojot LTE lemmas argumentus, kuri tika izmantoti uzdevuma sākumā. Detaļas paliek lasītājam.

7.uzdevums Pierādīt, ka vienādojumam

$$n! = a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}$$

ir galīgs skaits atrisinājumu naturālos skaitļos.

Piezīme. Jums var noderēt Stirlinga aproksimācija priekš faktoriāla, no kuras izriet, ka pietiekami lieliem skaitļiem n ir spēkā

$$n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

kur e ir Eilera konstante.

Atrisinājums. Ievērosim, ka fiksētam naturālam skaitlim n ir galīgs skaits trijnieku (a,b,c) ar īpašību, ka $n! = a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}$, jo acīmredzami izpildās $a,b,c \le n$. Līdz ar to, ja mēs pierādīsim, ka vienādojumam nav atrisinājumu pietiekami lielām n vērtībām, tad būsim pierādījuši, ka vienādojumam ir galīgs skaits atrisinājumu.

Apgalvojums. Pietiekami lieliem skaitļiem n izpildās $a,b,c < \frac{n}{2}$.
Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka kāds no skaitļiem a,b,c ir lielāks vai vienāds ar $\frac{n}{2}$. Tādā gadījumā ievērosim, ka

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} > \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
$$\left(\frac{e}{2}\right)^{n-1} > \sqrt{2\pi n}\cdot\frac{n}{e}$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo $\frac{e}{2} > 1$, līdz ar to eksponentfunkcija aug ātrāk par $\sqrt{2\pi n}\cdot\frac{n}{e} \sim n^{\frac{3}{2}}$. Tas nozīmē, ka

$$a^{n-1} \ge \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} > \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n > n!,$$

kas nozīmē, ka dotajam vienādojumam nav atrisinājumu.

Apgalvojums. Visiem pirmskaitļiem p izpildās $\nu_p(n!) < \frac{n}{p-1}$.
Pierādījums. No Ležandra formulas priekš faktoriāla izriet, ka

$$\nu_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor <$$
$$< \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \frac{n}{p^3} + \ldots =$$
$$= n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots\right) = n\left(\frac{\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}}\right) =$$
$$= \frac{n}{p-1},$$

kur mēs izmantojām bezgalīgas dilstošas ģeometriskās progresijas formulu.

Apgalvojums. Skaitlis $n-1$ ir nepāra skaitlis.
Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka $n-1$ ir pāra skaitlis, kas nozīmē, ka attiecīgi n ir nepāra skaitlis. Acīmredzami, ka $n!$ ir pāra skaitlis. Tas nozīmē, ka starp skaitļiem a,b,c visi ir pāra skaitļi vai arī viens no tiem ir pāra skaitlis un 2 ir nepāra skaitļi. Aplūkosim otru gadījumu. Tā kā nepāra skaitļu kvadrāti ir $\equiv 1 \pmod 4$, tad

$$0 \equiv n! = a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} \equiv 0 + 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4,$$

kas ir acīmredzama pretruna. Secinām, ka a, b, c ir pāra skaitļi. Ievērosim, ka tādā gadījumā $\nu_2(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) \geq n-1$, taču no apgalvojuma izriet, ka

$$\nu_2(n!) \leq n-1$$

ar vienādību tad un tikai tad, ja n ir divnieka pakāpe 2. Tā kā $\nu_2(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) = \nu_2(n!)$, tad secinām, ka n ir skaitļa 2 pakāpe. Tas ir pretrunā ar mūsu pieņēmumu, ka n ir nepāra skaitlis.

Apgalvojums. Skaitļi $a+b, b+c, c+a$ ir divnieka pakāpes.
Pierādījums. Pieņemsim, ka eksistē nepāra pirmskaitlis p ar īpašību, ka $p \mid a+b$. Tā kā $n-1$ ir nepāra skaitlis, tad

$$p \mid (a+b)(a^{n-2} - a^{n-3}b + \ldots + b^{n-2}) = a^{n-1} + b^{n-1}$$

Ievērosim, ka $a+b < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, līdz ar to $p \leq a+b < n$, kas nozīmē, ka $p \mid n!$. Secinām, ka $p \mid c^{n-1}$, kas nozīmē, ka $p \mid c$. No tā izriet, ka $\nu_p(c^{n-1}) = (n-1)\nu_p(c) \geq n-1$. Ievērosim, ka $\nu_p(n!) < \frac{n}{p-1} \leq n-1$. Līdz ar to secinām, ka $\nu_p(n! - c^{n-1}) = \min(\nu_p(n!), \nu_p(c^{n-1}) = \nu_p(n!)$. No LTE lemmas izriet, ka

$$\begin{gathered}
\nu_p(a^{n-1} + b^{n-1}) = \nu_p(n! - c^{n-1}) \\
\nu_p(a+b) + \nu_p(n-1) = \nu_p(n!) \\
\nu_p(a+b) = \nu_p((n)!) - \nu_p(n-1) \\
\nu_p(a+b) = \nu_p(1) + \nu_p(2) + \ldots + \nu_p(a+b) + \ldots + \nu_p(n) \\
\nu_p(1) + \nu_p(2) + \ldots + \nu_p(a+b-1) + \nu_p(a+b+1) + \ldots + \nu_p(n-2) + \nu_p(n) = 0
\end{gathered}$$

Tas nozīmē, ka neviens no skaitļiem $1, 2, \ldots a+b-1, a+b+1, \ldots n-2, n$ nedalās ar p, no kā izriet, ka $a+b = p$. Ievērosim, ka $p \mid c < \frac{n}{2}$, līdz ar to $n-1 = 2p$, kas ir pretrunā ar to, ka $n-1$ ir nepāra skaitlis. Secinām, ka $a+b, b+c, c+a$ nevar dalīties ar nepāra pirmskaitli, tāpēc tie visi ir divnieka pakāpes.

Tā kā $a+b, b+c, c+a$ ir divnieka pakāpes, tad a, b, c visi ir pāra skaitļi vai arī visi ir nepāra skaitļi. Ja tie visi ir nepāra skaitļi, tad $n!$ ir pāra skaitlis, bet $a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}$ ir nepāra skaitlis, kas ir pretruna, jo trīs nepāra skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Aplūkosim gadījumu, kad a, b, c ir pāra skaitļi.

Apgalvojums. Izpildās $\nu_2(a) = \nu_2(b) = \nu_2(c)$.
Pierādījums. Pieņemsim pretējo, tad, nezaudējot vispārīgumu, $a = 2^x a_1; b = 2^y b_1$, kur $x > y$ un a_1, b_1 ir nepāra skaitļi. Tādā gadījumā skaitlis $2^y(2^{x-y}a_1 + b_1)$ ir divnieka pakāpe. Tas nav iespējams, jo $2^{x-y}a_1 + b_1$ ir nepāra skaitlis, kas ir lielāks par 1.

Secinām, ka $a = 2^x a_1; b = 2^x b_1; c = 2^x c_1$. Ievērosim, ka tādā gadījumā $2^{x(n-1)} \mid a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}$, taču mēs zinām, ka $\nu_2(n!) \leq n-1$. Tas nozīmē, ka $x = 1$. Izdalot ar 2 secinām, ka $a_1 + b_1, b_1 + c_1, c_1 + a_1$ ir divnieka pakāpes. Vismaz viens no skaitļiem $a_1 + b_1, b_1 + c_1, c_1 + a_1$ nedalās ar 4, jo pretējā gadījumā $a_1 + b_1 + b_1 + c_1 - (c_1 + a_1) = 2b_1$ dalās ar 4, kas nav iespējams, jo b_1 ir nepāra. Tas nozīmē, ka, nezaudējot vispārīgumu, $a_1 + b_1 = 2$, līdz ar to $a_1 = b_1 = 1$ un $c_1 = 2^y - 1$. Tādā gadījumā

$$n! = 2^{n-1} + 2^{n-1} + (2^{y+1} - 2)^{n-1} = 2^n + 2^{n-1}(2^y - 1)^{n-1}$$

Taču uzdevuma sākumā mēs pierādījām, ka $c < \frac{n}{2}$, kas nozīmē, ka $c \mid n!$ jeb $2^{y+1} - 2 \mid n!$. Tādā gadījumā no pēdējā vienādojuma izriet, ka $2(2^y - 1) = 2^{y+1} - 2 \mid 2^n$. Tā kā skaitlim 2^n ir tikai pāra pirmreizinātāji, tad $2^y - 1 = 1$, kas nozīmē, ka $a = b = c = 2$. Līdz ar to secinām, ka

$$n! = 3 \cdot 2^{n-1},$$

taču pietiekami lieliem n vienādojuma kreisā puse dalās ar 9, bet labā nē – pretruna.