LTE lemma

Ievads. Šajā mājasdarbā Jums piedāvāti 7 uzdevumi, kuri ir sakārtoti grūtību pieaugošā secībā, bet **ne tēmu secībā**, kāda ir materiālā. Viena uzdevuma ietvaros var nākties izmantot teorijas faktus un idejas no vairākām tēmām. Līdz ar to, lai tiktu galā ar uzdevumiem, ir vērts izlasīt visu materiālu. Katru uzdevumu vērtē ar $0-7$ punktiem. Punktus piešķir arī par nepilnīgiem atrisinājumiem, ja ir iegūti noderīgi rezultāti.

1.uzdevums Atrast visus naturālus skaitļus n ar īpašību, ka $n^{n-1}-1$ dalās ar skaitli 2^{2015}, bet nedalās ar skaitli 2^{2016}.

2.uzdevums Atrast visus naturālu skaitļu trijniekus (a, b, p), kur p ir pirmskaitlis, ar īpašību, ka

$$a^p + b^p = p!.$$

3.uzdevums Atrast visus pirmskaitļu pārus (p, q) ar īpašību, ka $pq \mid 5^p + 5^q$.

4.uzdevums Pierādīt, ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās

$$2^{n(n+1)} \mid 32 \cdot \varphi(2^{2^n} - 1)$$

5.uzdevums Atrast visus naturālus skaitļus n ar īpašību, ka $\frac{2^n+1}{n^2}$ ir vesels skaitlis.

6.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kas ir definētas naturāliem skaitļiem un pieņem naturālas vērtības, kurām izpildās abas minētās īpašības:

- eksistē tāds naturāls skaitlis M, ka $f(n) \neq 1$ visiem $n \geq M$;
- Visiem naturāliem skaitļiem a, b, n izpildās $f(a)^n \mid f(a+b)^{a^{n-1}} - f(b)^{a^{n-1}}$.

7.uzdevums Pierādīt, ka vienādojumam

$$n! = a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}$$

ir galīgs skaits atrisinājumu naturālos skaitļos.

Piezīme. Jums var noderēt Stirlinga aproksimācija priekš faktoriāla, no kuras izriet, ka pietiekami lieliem skaitļiem n ir spēkā

$$n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

kur e ir Eilera konstante.