Latvijas 25. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

9.klase

1. Vai var izvietot naturālos skaitļus no 1 līdz 11 (katru vienu reizi) pa riņķa līniju tā, lai katri divi blakus esošie skaitļi atšķirtos viens no otra ne vairāk kā par 2?

2. Kvadrātvienādojuma $x^2+px+q=0$ saknes ir D un 1–D (D - šī vienādojuma diskriminants). Aprēķināt p un q.

3. Punkts M ir paralelograma ABCD malas AD viduspunkts. Punkts K ir tā perpendikula pamats, kas no B novilkts pret taisni CM. Pierādīt, ka AB=AK.

4. Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. Kādu mazāko rūtiņu daudzumu jānokrāso, lai katrā taisnstūrī, kas sastāv no 3 rūtiņām, būtu vismaz viena nokrāsota rūtiņa?

5. Vai var izrakstīt rindā naturālos skaitļus a) no 1 līdz 4 ieskaitot, b) no 1 līdz 8 ieskaitot, c) no 1 līdz 16 ieskaitot tā, lai izpildītos īpašība: ja a atrodas pa kreisi no b, bet b - pa kreisi no c, tad $b\neq\frac{a+c}{2}$ (a, b, c - patvaļīgi izrakstītie skaitļi) ?

10.klase

1. Trīsciparu skaitlī ciparus pārlika citā kārtībā. Vai iegūtā un sākotnējā skaitļa starpība var būt
a) 99, b) 100 ?

2. Uz šaurleņķu trijstūra ABC malām kā pamatiem ārpus ABC konstruēti regulāri trijstūri. Pierādīt, ka šiem regulārajiem trijstūriem apvilktās riņķa līnijas krustojas vienā punktā.

3. Atrisināt vienādojumu

$$(x^2+x+1)^3 + (x^2-2x-2)^3 = (2x^2-x-1)^3.$$

4. Taisnstūris sastāv no 5×41 rūtiņām. Katra rūtiņa nokrāsota melna vai balta. Pierādīt: var atrast trīs rindas un trīs kolonnas tā, ka visas 9 rūtiņas, kas atrodas to krustpunktos, nokrāsotas vienā un tai pašā krāsā.

5. Vai n-stūra virsotnēs var ierakstīt naturālus skaitļus, kas nepārsniedz n+1, tā, lai katrā virsotnē būtu cits skaitlis un katrai malai aprēķinot tās galapunktos ierakstīto skaitļu starpības moduli, visi šie n moduļi būtu dažādi? (Viens skaitlis netiek ierakstīts nevienā no virsotnēm.) Atbildēt uz šo jautājumu, ja
a) n=8, b) n=9.

11.klase

1. Dots, ka n - naturāls skaitlis un skaitļa 5^n ciparu summa ir 8. Atrast n.

2. Apskatām vienādojumu

$$x^2 - y = \sqrt{x-y} - \frac{1}{2} \; ;$$

a) atrast vienu tā atrisinājumu,

b) pierādīt, ka vienādojumam ir tikai viens atrisinājums.

3. Uz trijstūra ABC malas BC pagarinājuma aiz punkta B atrodas punkts D, pie tam BA=BD. Malas AC viduspunkts ir M. Leņķa ABC bisektrise krusto taisni DM punktā K.

Pierādīt, ka $\angle BAK = \angle ACB$.

4. Vai visus naturālos skaitļus var sadalīt trijās daļās tā, lai katrā daļā būtu vismaz viens skaitlis un lai izpildītos īpašība:

ja skaitļi x un y pieder dažādām daļām, tad skaitlis $x+y+xy$ neatrodas vienā daļā ne ar x, ne ar y?

5. Smaragda pilsētas armijā ir n karavīri.

Cik dažādos veidos var sarīkot paaugstināšanu dienesta pakāpē un ordeņa piešķiršanu, ja jāievēro divi nosacījumi:

a) katru, kas saņem ordeni, paaugstina arī dienesta pakāpē,

b) ir karavīri, kurus dienesta pakāpē gan paaugstina, bet ordeni viņi nesaņem?

12.klase

1. Atrisināt pirmskaitļos vienādojumu

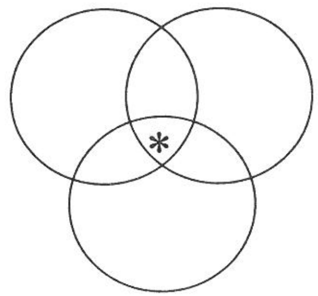
$$x^2+y^2=z^2 \; .$$

2. Dots, ka a, b, c, d - pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka

$$1 < \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} < 2 \; .$$

3. Izliekta četrstūra ABCD diagonāles krustojas punktā S, pie tam AS=DS un BS=CS. Ar O apzīmējam ΔSAB apvilktās riņķa līnijas centru. Pierādīt, ka $OS \perp CD$.

4. Trīs riņķa līnijas krustojas, kā parādīts 6. zīm. Sākumā katrā no 7 galīgajiem apgabaliem, kuros tās sadala plakni, ierakstīts "+1". Ar vienu gājienu atļauts skaitļus viena riņķa iekšienē vai nu reizināt visus ar "−1", vai celt tos visus kvadrātā.



6.zīm.

Vai, izpildot šādus gājienus, var panākt, lai

a) visi ierakstītie skaitļi vienlaicīgi būtu "−1" ?

b) ar zvaigznīti apzīmētajā apgabalā būtu "−1", bet visos citos "+1"?

5. Katram naturālam skaitlim no 1 līdz 2^n atrodam lielāko nepāra skaitli, ar kuru tas dalās.

Atrodiet šo lielāko nepāra dalītāju summu!