5. klase

1. Sauksim naturālu skaitli par interesantu, ja tas nesatur ciparu 0 un tā pirmais cipars par 2 mazāks nekā visu citu ciparu summa.
   a) kāds ir mazākais interesantais piecciparu skaitlis?
   b) kāds ir lielākais interesantais skaitlis?

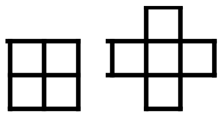
2. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 16 (visi skaitļi dažādi). Skaitļu summas rindiņās, kolonnās un abās diagonālēs ir 10 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi.
Daļa ierakstīto skaitļu parādīti 1.zīm. Kāds skaitlis ierakstīts rūtiņā, kurā ir jautājuma zīme?

4	5	7	14
6	13	3	?
11	12	9	
10			

1.zīm.

3. Kvadrātā, kas sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, katrā rūtiņā dzīvo pa vienam votivapam; taisnstūrī, kas sastāv no 2×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, katrā rūtiņā dzīvo pa vienam šillišallam. Rūķīši grib mainīt dzīves vietas: votivapas grib pārcelties uz taisnstūri, bet šillišallas – uz kvadrātu.
   a) vai to var izdarīt tā, lai katri divi votivapas, kas kvadrātā dzīvoja blakus rūtiņās, arī taisnstūrī dzīvotu blakus rūtiņās?
   b) vai to var izdarīt tā, lai katri divi šillišallas, kas taisnstūrī dzīvoja blakus rūtiņās, arī kvadrātā dzīvotu blakus rūtiņās?
Piezīme: divas rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.

4. Vai eksistē taisnstūris, kura malas iet pa rūtiņu līnijām un kuru var sagriezt tādās daļās, kādas attēlotas 2.zīm.? Jābūt vismaz vienai katra veida daļai.



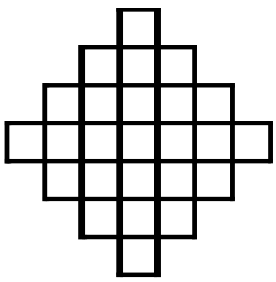
2. zīm.

5. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 10 ieskaitot var izrakstīt rindā katru vienu reizi tā, lai pirmais skaitlis dalītos ar otro, pirmo divu skaitļu summa – ar trešo, pirmo trīs skaitļu summa – ar ceturto utt., pirmo deviņu skaitļu summa – ar desmito?
Vai līdzīgā veidā var uzrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 13 ieskaitot?

6. klase

1. Dots, ka 19 vienādas grāmatas kopā maksā 24 latus ar santīmiem, bet 18 tādas pašas grāmatas – 22 latus ar santīmiem. Cik maksā 1 grāmata?

2. Kādu lielāko daudzumu taisnstūru, kas sastāv no vismaz 2 rūtiņām katrs, var izgriezt no 3. zīm. attēlotās figūras?



3. zīm.

3. Vairākās kaudzītēs kopā ir 58 sērkociņi; nevienā kaudzītē nav ne mazāk par 1, ne vairāk par 12 sērkociņiem.
Pierādīt: ir vai nu divas kaudzītes, kurās ir vienāds sērkociņu skaits, vai arī divas kaudzītes, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņu.

4. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Kreisajā apakšējā rūtiņā atrodas figūriņa. Divi spēlētāji pēc kārtas bīda figūriņu. Ar vienu gājienu figūriņu var pabīdīt vai nu 1 rūtiņu pa labi, vai 1 rūtiņu uz augšu, vai 1 rūtiņu pa diagonāli „uz augšu un pa labi”. Zaudē tas, kas nevar izdarīt gājienu.
Kas uzvar, pareizi spēlējot – pirmais vai otrais spēlētājs?

5. No sākuma uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 2; 3; 4; 5; 6 (katrs vienu reizi). Ar vienu gājienu var izvēlēties divus uzrakstītus skaitļus (apzīmēsim tos ar a un b), nodzēst tos un vietā uzrakstīt skaitļus $a+b$ un $a\cdot b$. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, ka uz tāfeles vienlaicīgi atrodas skaitļi 21; 27; 64; 180; 225?

---

7. klase

---

1. Ja skaitļi a un b ir dažādi, tad ar $\max(a,b)$ apzīmējam lielāko no tiem.
Dots, ka skaitļi x; y; z; t; $x+z$; $y+t$ visi ir dažādi un

$$\max(x,y)+\max(z,t)=\max(x+z;\ y+t)$$

Pierādīt, ka $(x-y)(z-t)>0$.

2. Taisnleņķa trijstūrī ABC novilkts augstums CH pret hipotenūzu AB. Punkts M atrodas uz hipotenūzas un BM=BC; punkts N atrodas uz katetes AC un CN=CH. Pierādīt, ka MN⊥AC. (*Piezīme:* drīkst izmantot to, ka katra trijstūra iekšējo leņķu lielumu summa ir 180°.)

3. Kādam mazākajam naturālajam n visas daļas

$$\frac{5}{n+7},\frac{6}{n+8},\frac{7}{n+9},\ldots,\frac{35}{n+37},\frac{36}{n+38}$$ ir nesaīsināmas?

4. Izliektā 7-stūrī ABCDEFG punkti A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1 ir attiecīgi malu DE, EF, FG, GA, AB, BC, CD viduspunkti. Dots, ka $AA_1\perp DE$, $BB_1\perp EF$, $CC_1\perp FG$, $DD_1\perp GA$, $EE_1\perp AB$ un $FF_1\perp BC$. Pierādīt, ka $GG_1\perp CD$.

5. Kādā komisijā strādā 7 diplomāti. Katri divi savā starpā sarunājas angļu, vācu vai franču valodā (tikai vienā). Katrs diplomāts ar 2 kolēģiem sarunājas angliski, ar 2 – vāciski, ar 2 – franciski.
Pierādiet: var atrast 3 diplomātus, kas savā starpā sazinoties lieto visas 3 valodas.

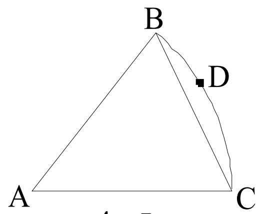
---

8. klase

---

1. Dots, ka kvadrātvienādojuma $x^2+px+q=0$ saknes ir x_1 un x_2, bet kvadrātvienādojuma $x^2+ax+b=0$ saknes ir x_1^2 un x_2^2. Izsacīt a un b ar p un q palīdzību.

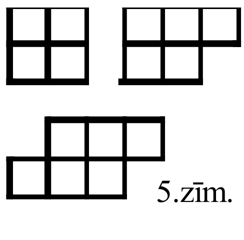
2. Dots, ka ΔABC pastāv sakarības AB=AC un ∠ABC=60°; w ir riņķa līnijas loks, kura centrs ir A, bet galapunkti B un C (skat. 4.zīm.). Uz loka w izvēlēts punkts D, kas atšķiras gan no B, gan no C. Dots, ka X, Y, Z, T ir attiecīgi nogriežņu AB, BD, DC, CA viduspunkti. Pierādīt, ka XZ⊥YT.



4. zīm.

3. Dots, ka A un B – naturāli divciparu skaitļi. Skaitli X iegūst, pierakstot skaitlim A galā skaitli B; skaitli Y iegūst, pierakstot skaitlim B galā skaitli A. Dots, ka X-Y dalās ar 91. Pierādīt, ka A=B.

4. Kvadrāta malas garums ir 1 m. Tajā novilktas līnijas, kas to sadala vairākās daļās; katra daļa vienāda ar kādu no figūrām, kas redzamas 5.zīm. (rūtiņas malas garums ir 1 cm). Aprēķināt novilkto līniju kopējo garumu.


5.zīm.

5. Virknē augošā kārtībā izrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 2004 ieskaitot, katrs vienu reizi. Izsvītrojam no tās skaitļus, kas atrodas 1., 4., 7., 10., ... vietās. No palikušās virknes atkal izsvītrojam skaitļus, kas tajā atrodas 1., 4., 7., ... vietās. Ar iegūto virkni rīkojamies tāpat, utt., kamēr paliek neizsvītrots viens skaitlis. Kurš tas ir?

9. klase

1. Dots, ka vienādojumam $2x^2+(p_1+p_2)x+(q_1+q_2)=0$ eksistē atrisinājums. Pierādīt, ka vismaz vienam no vienādojumiem $x^2+p_1x+q_1=0$ un $x^2+p_2x+q_2=0$ arī eksistē atrisinājums.

2. Dots, ka a un b – naturāli skaitļi un $a+b$ ir nepāra skaitlis. Zināms, ka katrā skaitļu ass punktā ar veselu koordināti dzīvo pa rūķītim: dažos punktos – votivapas, pārējos – šillišallas. Pierādīt, ka eksistē tādi divi vienas cilts rūķīši, attālums starp kuriem ir vai nu a, vai b.

3. Dots, ka ABCD – kvadrāts, bet w – riņķa līnija, kas iet caur A un B; punkti C un D atrodas w iekšpusē. Stari BD un BC krusto w attiecīgi punktos E un F. Apzīmējam CF viduspunktu ar M. Pierādīt, ka EM⊥BC.

4. Dots, ka n – naturāls skaitlis. Katrs no $2n+1$ rūķīšiem Lieldienās vienu reizi ieradās pie Sniegbaltītes un kādu laiku tur uzturējās. Ja divi rūķīši vienlaikus bija pie Sniegbaltītes, tad viņi tur satikās. Zināms, ka katrs rūķītis pie Sniegbaltītes satika vismaz n citus rūķīšus.
Pierādīt: ir tāds rūķītis, kas pie Sniegbaltītes satika visus $2n$ citus rūķīšus.

5. Kvadrāts sastāv no n×n rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta viens no skaitļiem -1; 0; 1 tā, lai n rindās un n kolonnās ierakstīto skaitļu summas visas būtu dažādas.
Vai to var izdarīt, ja **a)** n=4; **b)** n=5?

10. klase

1. Atrast mazāko pozitīvo skaitli a, kam piemīt īpašība:
ja $x>y>a$, tad $x^2-2x>y^2-2y$.

2. Pusriņķa līnijas diametrs ir AB. Uz pusriņķa līnijas ņemti divi punkti M un N, kas nesakrīt ne ar A, ne ar B. Stari AM un BN krustojas punktā O.
Pierādīt: ap ΔMNO apvilktās riņķa līnijas garums atkarīgs tikai no hordas MN garuma, nevis no tās novietojuma.

3. Dots, ka n – naturāls skaitlis.
a) pierādīt, ka $\sqrt{n^2+11n+30}$ nav naturāls skaitlis,
b) atrast šī skaitļa pirmo ciparu aiz komata atkarībā no n.

4. Tenisa turnīrā piedalījās profesionāļi un amatieri; katrs ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi. Profesionāļu bija par 9 vairāk nekā amatieru, un viņi visi kopā izcīnīja 9 reizes vairāk uzvaru nekā visi amatieri kopā. Kāds ir lielākais iespējamais uzvaru skaits, ko šādā turnīrā varēja izcīnīt kāds amatieris? Tenisā neizšķirtu nav.

5. Vai, izmantojot tikai 3 dažādus ciparus, var uzrakstīt 16 trīsciparu skaitļus, kas visi dod dažādus atlikumus, dalot ar 16?

11. klase

1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka 2004^n-1 dalās ar 1500^n-1?

2. Kvadrāts ABCD sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā novelk vienu diagonāli un vienu no iegūtajiem trijstūriem nokrāso baltu, otru – melnu. Nekādiem diviem vienādi nokrāsotiem trijstūriem nedrīkst būt kopīga mala. Cik dažādi kvadrāta krāsojumi iespējami?

3. Vienādsānu trapecē ABCD zināms, ka AB=BC=CD un BC<AD; diagonāļu krustpunkts ir O. Pierādīt, ka nogriežņu AO un BC viduspunkti, kā arī virsotnes C un D atrodas uz vienas riņķa līnijas.

4. Dots, ka a un b – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka

$$a^a \cdot b^b \geq a^b b^a$$

5. Komisijā darbojas 25 deputāti, daži no tiem draudzējas (ja A draudzējas ar B, tad arī B draudzējas ar A). Katram deputātam ir tieši n draugi. Ja kādi divi deputāti (apzīmēsim tos ar X un Y) nedraudzējas savā starpā, tad noteikti eksistē tāds deputāts, kas draudzējas gan ar X, gan ar Y.

Kāda ir mazākā iespējamā n vērtība?

12.klase

1. Dots, ka n – naturāls skaitlis, n>1. Vai izteiksmi

$$\left(x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1\right)^2 - x^n$$

noteikti var izsacīt kā divu polinomu reizinājumu tā, lai neviens no šiem polinomiem nebūtu konstante un visi abu polinomu koeficienti būtu veseli skaitļi?

2. Kvadrāti ABCD un $A_1B_1C_1D_1$ atrodas paralēlās plaknēs; abiem virsotnes uzrādītas pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Pierādīt, ka $AA_1^2+CC_1^2=BB_1^2+DD_1^2$.

3. Funkcijai $f(n)$ gan argumenti, gan vērtības ir naturāli skaitļi, un katriem diviem naturāliem skaitļiem x un y pastāv vienādība

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x^2+y^2).$$

Atrast visas šādas funkcijas f un pierādīt, ka citu bez jūsu atrastajām nav.

4. Ar n apzīmējam patvaļīgu nepāra naturālu skaitli, kas lielāks par 1. Pierādīt: abi skaitļi n un n +2 vienlaicīgi ir pirmskaitļi tad un tikai tad, ja $(n-1)!$ nedalās ne ar n, ne ar n+2.

5. Konkursā uz direktora vietu pieteicās n kandidāti. Tos vērtēja 8 eksperti. Katrs eksperts katru kandidātu novērtēja ar „derīgs” vai „nederīgs”. Izrādījās, ka katriem diviem kandidātiem A un B izpildās sekojošais:

„A derīgs, B derīgs” nolēmuši 2 eksperti,
„A derīgs, B nederīgs” nolēmuši 2 eksperti,
„A nederīgs, B derīgs” nolēmuši 2 eksperti,
„A nederīgs, B nederīgs” nolēmuši 2 eksperti.

Kāda ir lielākā iespējamā n vērtība?