Latvijas 32.atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

5. klase

1. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 16 (visi skaitļi dažādi). Skaitļu summas rindiņās, kolonnās un abās diagonālēs ir 10 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi.
Daļa ierakstīto skaitļu parādīti 1.zīm. Kāds skaitlis ierakstīts rūtiņā, kurā ir jautājuma zīme?

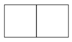
14	**?**		
7	3	9	
5	13	12	
4	6	11	10

1.zīm.

2. Uz galda atrodas 7 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Ir zināms, ka 6 no tām masas ir vienādas, bet septītajai masa **varbūt** ir citāda. Kā ar 2 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir un, ja tā ir, tad vai tā vieglāka vai smagāka par citām?

3. Kvadrātiska tabula sastāv no **a)** 5×5, **b)** 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai var dažās rūtiņās ierakstīt pa vienai zvaigznītei tā, lai katrā kolonnā būtu pāra skaits zvaigznīšu, bet katrā rindiņā – nepāra skaits zvaigznīšu?

4. Ir 2005 zelta gabali. Pierādīt, ka divus no tiem var katru sadalīt divos gabalos tā, lai pēc tam visus 2007 gabalus varētu sadalīt 4 kaudzēs A, B, C, D ar īpašību: kaudze A ir tikpat vērtīga, cik kaudze B, bet kaudze C ir tikpat vērtīga, cik kaudze D. (Kaudzes vērtību nosaka tikai kopējais zelta daudzums tajā.)

5. No kvadrāta, kas sastāv no 8×8 rūtiņām, izgrieza 12 gabalus ar formu . Vai no atlikušās daļas noteikti var izgriezt gabalu ar formu ?

6. klase

1. Kurš no skaitļiem

$$200420042004 \times 20052005 \text{ un } 200520052005 \times 20042004$$

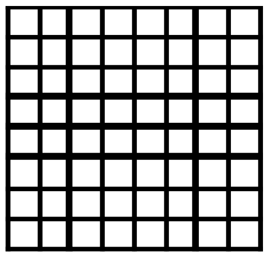
ir lielāks?

2. Vairākās kaudzītēs kopā ir 78 sērkociņi; nevienā kaudzītē nav ne mazāk par 1, ne vairāk par 14 sērkociņiem.
Pierādīt: ir vai nu divas kaudzītes, kurās ir vienāds sērkociņu skaits, vai arī divas kaudzītes, kurās kopā ir tieši 15 sērkociņu.

3. Doti 4 atsvari. Katram no tiem masa ir 10 g vai 11g. Doti arī svari, kas rāda uz tiem uzlikto atsvaru kopējo masu. Vai ar 3 svēršanām var noteikt katra atsvara masu?

4. Katra no monētām sver 5 g vai 6 g, to kopējā masa ir 600 g. Pierādīt, ka monētas var sadalīt 10 kaudzēs, kuru masas visas vienādas savā starpā.

5. Režģis ar izmēriem 8×8 rūtiņas salikts no stienīšiem, kuru garumi ir naturāli skaitļi (rūtiņas malas garums ir 1, skat. 2. zīm.). Stienīši savā starpā nekrustojas. Kāds ir mazākais iespējamais tādu stienīšu daudzums, kuru garums ir 1?



2. zīm

7. klase

1. Trijstūrī ABC punkti K un M atrodas uz malas AC, pie tam M ir AC viduspunkts. Ir zināms, ka BM = 3, AK = 1, MC = 2 un ∠BMC = 120º.
Pierādīt, ka AB = BK.

2. Kādam mazākajam naturālajam n visas daļas

$$\frac{5}{n+7}, \frac{6}{n+8}, \frac{7}{n+9}, ..., \frac{35}{n+37}, \frac{36}{n+38}$$ ir nesaīsināmas?

3. Pankūka no katras puses jācep 6 minūtes (varbūt ar pārtraukumiem). Uz pannas vienlaicīgi var atrasties augstākais 4 pankūkas. Kādā īsākajā laikā var no abām pusēm apcept 5 pankūkas?
Pankūku nomaiņai laiks nav jāparedz.

4. Triju veselu pozitīvu skaitļu summa ir 407. Ar kādu lielāko daudzumu nuļļu var beigties šo skaitļu reizinājums?

5. Rindā izrakstīti 10 dažādi skaitļi, kas visi lielāki par 0 un mazāki par 1. To skaitļu summa, kas atrodas 2., 4., 6., 8., 10. vietās, par 1 lielāka nekā to skaitļu summa, kas atrodas 1., 3., 5., 7., 9. vietās.
Pierādiet: rindā var atrast tādu skaitli, kas mazāks par abiem saviem kaimiņiem.

8. klase

1. Dots, ka kvadrātvienādojuma $x^2+px+q=0$ saknes ir x_1 un x_2, bet kvadrātvienādojuma $x^2+ax+b=0$ saknes ir x_1^2 un x_2^2. Izsacīt a un b ar p un q palīdzību.

2. Par Fibonači skaitļiem sauc skaitļus 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ... (katru nākamo skaitli šajā virknē iegūst, saskaitot divus iepriekšējos).
Vai var pastāvēt vienādība a+b=c+d, ja a, b, c, d ir dažādi Fibonači skaitļi?

3. Kā var sadalīt naturālos skaitļus no 1 līdz 9 ieskaitot divās daļās tā, lai vienas daļas visu skaitļu summa būtu vienāda ar otras daļas visu skaitļu reizinājumu?

4. Trijstūrī ABC pastāv sakarības AC=BC un ∠ACB=20°. Leņķa CAB bisektrise un malas AC vidusperpendikuls krustojas punktā M. Aprēķināt
a) ∠MCB, **b)** ∠MBC.

5. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katra rūtiņa nokrāsota vienā no n krāsām. Ir zināms: katrai rūtiņai var atrast vismaz divas kaimiņu rūtiņas, kas nokrāsotas tādā pašā krāsā kā viņa. (Rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)
Kāda ir lielākā iespējamā n vērtība?

9. klase

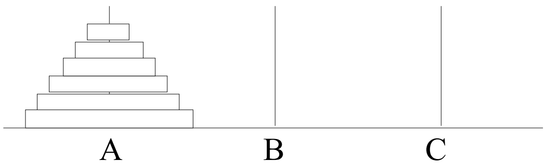
1. Atrast mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar 225 un kura decimālajā pierakstā neizmanto nevienu no cipariem 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

2. Trijstūra ABC ievilktā riņķa centrs ir I. Dots, ka CA+AI=CB. Pierādīt, ka $\angle BAC=2\angle CBA$.

3. Dots, ka n – naturāls skaitlis. Katrs no $2n+1$ rūķīšiem Lieldienās vienu reizi ieradās pie Sniegbaltītes un kādu laiku tur uzturējās. Ja divi rūķīši vienlaikus bija pie Sniegbaltītes, tad viņi tur satikās. Zināms, ka katrs rūķītis pie Sniegbaltītes satika vismaz n citus rūķīšus.
Pierādīt: ir tāds rūķītis, kas pie Sniegbaltītes satika visus $2n$ citus rūķīšus.

4. Dots, ka $x^2+yz\le 2$, $y^2+xz\le 2$ un $z^2+xy\le 2$. Atrast izteiksmes $x+y+z$ lielāko un mazāko iespējamo vērtību.

5. Doti 3 stienīši. Uz viena no tiem sākotnēji uzmaukti n dažādu izmēru diski ar caurumiem vidū tā, ka to rādiusi samazinās no lejas uz augšu; abi pārējie stienīši sākotnēji ir tukši (skat. 1. zīm., kur n=6).



1. zīm.

Ar vienu gājienu var pārlikt augšējo disku no jebkura stienīša uz jebkuru citu, ja tikai pārliekamais disks D nav lielāks par to disku, kas atrodas pašā apakšā uz stienīša, uz kuru pārliek D.
Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai visi diski atrastos uz stienīša C tādā pašā kārtībā, kādā tie sākotnēji atradās uz stienīša A?

10. klase

1. Vai noteikti $x+\frac{9}{x}>y+\frac{9}{y}$, ja
a) $x>y>0$, **b)** $x>y>3$?

2. Pusriņķa līnijas diametrs ir AB. Uz pusriņķa līnijas ņemti divi punkti M un N, kas nesakrīt ne ar A, ne ar B. Stari AM un BN krustojas punktā O.
Pierādīt: ap ΔMNO apvilktās riņķa līnijas garums atkarīgs tikai no hordas MN garuma, nevis no tās novietojuma.

3. Kādiem naturāliem skaitļiem n abi skaitļi 2^n-1 un 2^n+1 ir pirmskaitļi?

4. Funkcijas $f(t)$ definīcijas apgabals un vērtību apgabals ir kopa $\{1; 2; ...; n\}$, pie tam visas vērtības ir dažādas. Vai iespējams, ka visi skaitļi $|f(x)-x|$, x=1; 2; ...; n, ir dažādi, ja
a) n=15, **b)** n=16 ?

5. Katrs naturāls skaitlis no 1 līdz 10 ieskaitot uzrakstīts uz vienas baltas, vienas melnas, vienas sarkanas un vienas zaļas kartītes; uz katras kartītes uzrakstīts tikai viens skaitlis. Šīs kartītes kaut kā izvietotas 4 rindās un 10 kolonnās. Ar vienu gājienu var mainīt vietām divas kartītes, uz kurām uzrakstīti vienādi skaitļi. Pierādiet: var panākt, ka katrā kolonnā pārstāvētas visas 4 krāsas.

Latvijas 32.atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

11. klase

1. Vai eksistē tāds polinoms $P(x)$, ka visiem x pastāv vienādība

$$P(x) = \sin x + 2005\,?$$

2. Vienādsānu trapecē ABCD zināms, ka AB=BC=CD un BC<AD; diagonāļu krustpunkts ir O. Pierādīt, ka nogriežņu AO un BC viduspunkti, kā arī virsotnes C un D atrodas uz vienas riņķa līnijas.

3. Volejbola turnīrā piedalās $(n+2)\cdot 2^{n-1}-2$ komandas (n – naturāls skaitlis), katra ar katru citu spēlē tieši vienu reizi (neizšķirtu nav). Pierādīt: pēc turnīra beigām var izvēlēties n no šīm komandām tā, ka katra no pārējām zaudējusi vismaz vienai no izvēlētajām n.

4. Dots, ka $a<b\le c<d$ ir pozitīvi veseli skaitļi, $ad=bc$ un $\sqrt{d}-\sqrt{a}\le 1$. Pierādīt, ka a ir vesela skaitļa kvadrāts.

5. Kvadrāts sastāv no 2005×2005 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, kas izkrāsotas šaha galdiņa kārtībā; stūra rūtiņas ir melnas. Viens domino kauliņš pārklāj tieši 2 rūtiņas. Sākotnēji uz kvadrāta novietoti $\frac{2005^2-1}{2}$ domino kauliņi, kas pārklāj visas rūtiņas, izņemot vienu melnu rūtiņu pie kvadrāta malas.

<u>Pierādīt:</u> lai uz kuru melnu rūtiņu R, kas atrodas 1., 3., 5., ..., 2003., 2005. rindiņā, mēs norādītu, domino kauliņus var tā pārbīdīt pa kvadrātu, nepaceļot no tā plaknes un neizbīdot ārpusē, ka rūtiņa R nebūs pārklāta.

12.klase

1. Vai eksistē tāds vesels pozitīvs skaitlis n, ka skaitlim n^2 ir tikpat daudz naturālu dalītāju, kas dod atlikumu 1, dalot ar 3, cik naturālu dalītāju, kas dod atlikumu 2, dalot ar 3?

2. Par parabolu sauc līniju, kas vienāda ar funkcijas $y=x^2$ grafiku. Vai var plaknē novietot 2005 parabolas tā, lai katrs plaknes punkts atrastos vismaz starp vienas parabolas zariem?

3. Kvadrāti ABCD un $A_1B_1C_1D_1$ atrodas paralēlās plaknēs; abiem virsotnes uzrādītas pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Pierādīt, ka $AA_1^2+CC_1^2=BB_1^2+DD_1^2$.

4. Pieņemsim, ka x_1, x_2, ..., x_n ir nenegatīvi reāli skaitļi, $n\ge 2$. Noskaidrot, kurām n vērtībām nevienādība

$$\frac{(x_1^2+x_2^2)(x_2^2+x_3^2)...(x_{n-1}^2+x_n^2)(x_n^2+x_1^2)}{2^n} \ge \left(\frac{x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n+x_nx_1}{n}\right)^n$$

ir identiski patiesa.

5. Divi spēlētāji spēlē sekojošu spēli, izdarot gājienus pēc kārtas. Sākumā doti divi stieņi: viens ar garumu n, otrs ar garumu $n+1$ (n – pozitīvs vesels skaitlis). Ar vienu gājienu var vai nu salauzt vienu stieni divos īsākos, kuru garumi ir pozitīvi veseli skaitļi, vai arī izslēgt no turpmākās spēles gaitas k stieņus, katram no kuriem garums ir k (k – jebkurš vesels pozitīvs skaitlis). Spēlētājs, kurš izdara pēdējo gājienu, uzvar.

Kurš spēlētājs uzvar, pareizi spēlējot?