Latvijas 36. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

5. klase

1. Uz kādas planētas tiek lietotas 2009 dažādas valodas. Kāds mazākais daudzums vārdnīcu pietiekams, lai no katras valodas varētu tulkot uz katru citu? (Pieļaujamas vairākpakāpju tulkošanas; ar katru vārdnīcu tulko tikai vienā virzienā, piemēram, no latviešu valodas uz lietuviešu valodu, bet ne otrādi.)

2. Andris grib izrakstīt rindā naturālos skaitļus no 1 līdz 10 katru tieši vienu reizi tā, lai pirmais skaitlis nedalītos ar otro, pirmo divu skaitļu summa nedalītos ar trešo, pirmo triju skaitļu summa nedalītos ar ceturto, ... , pirmo deviņu skaitļu summa nedalītos ar desmito. Vai to var izdarīt?

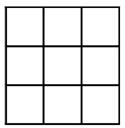
3. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Divas rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopēja mala vai kopējs stūris. Tieši 6 rūtiņas nokrāsotas melnas; pārējās ir baltas.

Vai var gadīties, ka vienai melnai rūtiņai ir tieši 1 balts kaimiņš, vienai melnai rūtiņai – tieši 2 balti kaimiņi, ... , vienai melnai rūtiņai – tieši 6 balti kaimiņi?

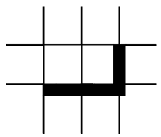
4. Kvadrātisks režģis sastāv no 3×3 rūtiņām (skat. 1. zīm.)

a) vai to var uzzīmēt, novelkot 8 tādas līnijas, kāda attēlota 2. zīm.? Līnija var būt novietota arī citādi.

b) vai to var uzzīmēt, novelkot 3 līnijas, katru ar garumu 8? (Rūtiņas malas garums ir 1.)



1. zīm.



2. zīm.

5. Kādā valstī prezidenta vēlēšanās piedalās 3 kandidāti A, B un C. Katrs valsts iedzīvotājs atbalsta tieši vienu no viņiem. Bez tam katrs iedzīvotājs vai nu vienmēr runā patiesību, vai vienmēr melo. Katram iedzīvotājam aptaujā uzdeva 3 jautājumus:

1) vai Jūs atbalstāt A?
2) vai Jūs atbalstāt B?
3) vai Jūs atbalstāt C?

Uz šiem jautājumiem attiecīgi 60%, 50% un 40% atbilžu bija „jā”.
Kāda daļa no B atbalstītājiem ir meļi?

6. klase

1. Andris nosauc Maijai trīs dažādus ciparus. Pierādiet: Maija, neizmantojot citus ciparus kā Andra nosauktos, var uzrakstīt veselu skaitli (viencipara, divciparu vai trīsciparu), kurā nav vienādu ciparu un kas dalās ar 3.

2. Punkti apzīmē reizināšanas zīmes, vienādi burti – vienādus ciparus, bet dažādi burti – dažādus ciparus (izņemot I un $\bar{I}$, kas apzīmē vienu un to pašu ciparu).

Katrīna aprēķināja izteiksmes $\dfrac{K \cdot R \cdot \bar{I} \cdot Z \cdot E}{L \cdot A \cdot T \cdot V \cdot I \cdot J \cdot A}$ skaitlisko vērtību. Kādu rezultātu viņa ieguva?

3. Uz tāfeles bija uzrakstīti 4 naturāli skaitļi (starp tiem var būt arī vienādi). Zane pieskaitīja katram no tiem vieninieku.

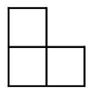
Vai Zanes iegūto skaitļu reizinājuma dalījums ar sākumā uzrakstīto skaitļu reizinājumu var būt a) 12. b) 18?

4. Katram no diviem kubiņiem uz katras no sešām skaldnēm uzrakstīts pa ciparam. Teiksim, ka divciparu skaitli n var attēlot ar kubiņu palīdzību, ja vienam kubiņam uz kādas skaldnes ir skaitļa n pirmais cipars, bet otram kubiņam uz kādas skaldnes ir skaitļa n otrais cipars. Piemēram, ja vienam kubiņam uz kādas skaldnes ir 5, bet otram kubiņam – 7, tad var attēlot gan 57, gan 75.

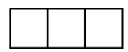
Pieņemsim, ka ar kubiņu palīdzību var attēlot katru divciparu skaitli no 10 līdz x ieskaitot. Kāda ir lielākā iespējamā x vērtība? (**Piezīme**: ciparu 6 nedrīkst izmantot, lai attēlotu ciparu 9, un otrādi.)

5. a) Dots, ka taisnstūri ar izmēriem $m \times n$ rūtiņas var sagriezt tādās figūrās, kāda redzama 3. zīm. Pierādīt: šo taisnstūri var sagriezt arī tādās figūrās, kāda redzama 4. zīm.

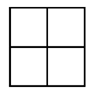
b) Vai taisnība, ka jebkuru taisnstūri, kam gan garums, gan platums ir vismaz 4 rūtiņas un kuru var sagriezt 5. zīm. redzamās figūrās, var sagriezt arī 6. zīm. redzamās figūrās?



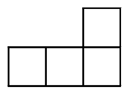
3. zīm.



4. zīm.



5. zīm.



6. zīm.

Figūras var būt arī pagrieztas vai apgrieztas „uz mutes”.

Olimpiādes rezultāti tiks publicēti ne agrāk kā 15.maijā NMS mājas lapā: nms.lu.lv

2009. gada 26. aprīlī

Latvijas 36. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

7. klase

1. Dots, ka x un y – tādi naturāli skaitļi, ka $x \cdot y = 10^{20}$. Vai var būt, ka ne x, ne y nesatur savā pierakstā nevienu ciparu 0?

2. Trijstūrim T visas malas ir dažāda garuma. Par punktiem M un N zināms tikai tas, ka tie atrodas trijstūra T iekšpusē.
a) vai var gadīties, ka nogrieznis MN garāks par divām T malām?
b) vai var gadīties, ka nogrieznis MN garāks par visām T malām?

3. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā cits skaitlis). Skaitļu summas rindās un kolonnās visas ir dažādas.
Kāds lielākais daudzums šo summu var būt pirmskaitļi?

4. Trijstūris ABC ir šaurleņķu. Trijstūri AMB un BNC abi ir vienādmalu un atrodas ārpus ΔABC. Pierādīt, ka AN=CM.

5. Vairākiem rūķīšiem ir vienādi naudas daudzumi. Brīdi pa brīdim kāds no rūķīšiem paņem daļu savas naudas un sadala to pārējiem vienādās daļās. Pēc kāda laika izrādījās, ka vienam no rūķīšiem ir 8 dālderi, bet citam – 25 dālderi. Cik pavisam ir rūķīšu? (Dālderis ir vienīgā rūķīšiem pieejamā naudas vienība.)

8. klase

1. Vienādojumam $x^2 + px + q = 0$ ir divas dažādas saknes x_1 un x_2. Vai var gadīties, ka
a) $0 < p < q < x_1 < x_2$?
b) $x_1 < q < p < x_2$?

2. Šaha turnīrā piedalās 8 spēlētāji; katrs ar katru citu spēlē tieši 1 reizi. Par uzvaru spēlētājs saņem 1 punktu, par neizšķirtu $\frac{1}{2}$ punkta, par zaudējumu 0 punktus. Turnīru beidzot, izrādījās, ka nekādiem diviem spēlētājiem nav vienāds punktu daudzums. Kāds ir mazākais iespējamais uzvarētāja iegūtais punktu daudzums? (Par uzvarētāju uzskata to spēlētāju, kam turnīra noslēgumā ir visvairāk punktu.)

3. Uz kvadrāta ABCD malas BC ņemts tāds punkts M, ka leņķa AMC bisektrise krusto malu CD tās viduspunktā K. Pierādīt, ka AK ir leņķa MAD bisektrise.

4. Profesors Cipariņš ar savu ārzemju kolēģi ieradās Ziemassvētku eglītes pasākumā, kurā piedalījās universitātes darbinieki, viņu draugi, ģimenes locekļi, paziņas utt. Norādot uz trim viesiem, Cipariņš piezīmēja: „Šo cilvēku vecumu reizinājums ir 2450, bet summa – divas reizes lielāka nekā Jūsu vecums.” Kolēģis atteica: „Es nezinu un nevaru noskaidrot, cik veci ir šie ļaudis.” Tad Cipariņš piebilda: „Es esmu vecāks par jebkuru citu šai eglītē.” Tagad kolēģis uzreiz pateica minēto 3 viesu vecumus. Cik gadu tai laikā bija Cipariņam un cik – viņa kolēģim? (Visus vecumus izsaka veselos gados.)

5. Uz riņķa līnijas atzīmēti vairāki punkti. Katram punktam jāpieraksta viens no burtiem A; B; C; D; E; F tā, lai katri divi dažādi burti kaut vienā vietā uz riņķa līnijas atrastos blakus (vienalga kādā secībā).
a) pierādīt, ka vajag vismaz 15 punktus,
b) pierādīt, ka vajag vismaz 18 punktus,
c) vai ar 18 punktiem pietiek?

Latvijas 36. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

9. klase

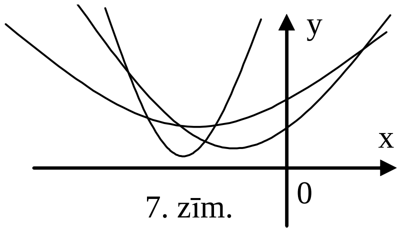
1. Pieņemsim, ka 7. zīm. attēlotās līknes ir kvadrātfunkciju grafiki.

Vai tie var būt funkciju

$y = ax^2 + bx + c$,

$y = bx^2 + cx + a$ un

$y = cx^2 + ax + b$ grafiki?



7. zīm.

2. Dots, ka $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$ un $|c| \geq |a + b|$. Pierādīt, ka $a + b + c = 0$.

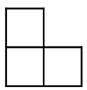
3. Uz taisnes t novietots stienītis ar garumu 1. Sākumā tā gali atrodas punktos A un B. Stienīti bīda pa plakni tā, ka tas visu laiku paliek paralēls taisnei t un beigās atkal nonāk uz t; šai brīdī tā gali atrodas punktos C un D. Turklāt ceļiem, pa kuriem kustas stienīša gali, nav kopīgu punktu. Vai var gadīties, ka AC>2009? (**Piezīme**: uzskatām, ka stienītis ir paralēls t arī tad, ja tas atrodas uz t.)

4. Naturāla skaitļa n pozitīvo dalītāju skaitu apzīmējam ar d(n). Piemēram, d(1)=1; d(6)=4 utt. Sauksim skaitli n par apaļīgu, ja tas dalās ar d(n).

a) atrodiet piecus apaļīgus skaitļus,

b) pierādiet, ka apaļīgu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

5. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katra no tām izkrāsota vai nu balta, vai melna. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuras 3 rūtiņas, kas veido 8. zīm. parādīto figūru (tā var būt novietota arī citādi), un mainīt krāsu uz pretējo visās šīs figūras rūtiņās. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai viss kvadrāts kļūtu balts, ja


8. zīm.

a) sākotnējais krāsojums ir šaha galdiņa izskatā,

b) sākotnējais krāsojums ir patvaļīgs?

10. klase

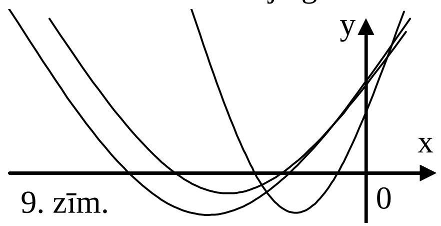
1. Pieņemsim, ka 9. zīm. attēlotās līknes ir kvadrātfunkciju grafiki.

Vai tie var būt funkciju

$y = ax^2 + 2bx + c$,

$y = bx^2 + 2cx + a$ un

$y = cx^2 + 2ax + b$ grafiki?



9. zīm.

2. Dots, ka p un q ir divi viens otram sekojoši nepāra pirmskaitļi (piemēram, 13 un 17). Pierādīt: skaitli p+q var sadalīt triju tādu naturālu skaitļu reizinājumā, kas visi lielāki par 1 (starp šiem trim skaitļiem var būt arī vienādi).

3. Dots, ka ABC ir šaurleņķu trijstūris un I ir tajā ievilktās riņķa līnijas centrs. Riņķa līnija ω_1 iet caur B un I un pieskaras $\angle ACB$ bisektrisei. Riņķa līnija ω_2 iet caur C un I un pieskaras $\angle ABC$ bisektrisei. Pierādīt, ka viens no ω_1 un ω_2 krustpunktiem atrodas uz ΔABC apvilktās riņķa līnijas.

4. Dots, ka a, b, c, d – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka $\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4$.

5. Dots daudzstūris ar 2n+1 virsotnēm, n – naturāls skaitlis. Tā virsotnēs un malu viduspunktos jāieraksta naturāli skaitļi no 1 līdz 4n+2 (katrā punktā – cits skaitlis) tā, lai to trīs skaitļu summas, kas uzrakstīti uz vienas malas, visas būtu savā starpā vienādas.

Vai to var izdarīt, ja

a) n=2,

b) patvaļīgam naturālam n?

Latvijas 36. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

11. klase

1. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1^4+1^2+1}+\frac{2}{2^4+2^2+1}+\frac{3}{3^4+3^2+1}+\ldots+\frac{2009}{2009^4+2009^2+1}<\frac{1}{2}.$$

2. Spēlē OP! piedalās n spēlētāji ($n \geq 2$). Spēle notiek vairākas dienas. Katru dienu viens spēlētājs uzvar, bet pārējie zaudē. Sakaņā ar noteikumiem i-tajā dienā ($i=1,2,\ldots$) uzvarētājs saņem $i(n-1)$ punktus, bet katrs zaudētājs zaudē pa i punktiem. Spēles sākumā visiem ir pa 0 punktiem. Pēc kāda mazākā dienu skaita var gadīties, ka visiem atkal ir pa 0 punktiem?

3. Dots, ka a un b – naturāli skaitļi un skaitļa $S=a^2+ab+b^2$ pēdējais cipars ir 0. Kāds ir skaitļa S priekšpēdējais cipars?

4. Dots, ka sešstūris ABCDEF ir izliekts un tā pretējās malas ir pa pāriem vienādas. Nekādas divas tā malas un diagonāles nav paralēlas viena otrai. Ar A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 apzīmējam attiecīgi diagonāļu AC, BD, CE, DF, EA, FB viduspunktus. Pierādīt, ka taisnes A_1D_1, B_1E_1 un C_1F_1 krustojas vienā punktā.

5. Atrisināt nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} x^3y+3\leq 4z \\ y^3z+3\leq 4x \\ z^3x+3\leq 4y \end{cases}$$

pozitīvos skaitļos.

12.klase

1. Dots, ka $a_1, a_2, \ldots, a_{2009}$ un $b_1, b_2, \ldots, b_{2009}$ ir attiecīgi aritmētiska progresija un ģeometriska progresija, kas abas sastāv no pozitīviem skaitļiem. Dots arī, ka $a_1=b_1\neq a_{2009}=b_{2009}$. Kas lielāks: visu aritmētiskās vai visu ģeometriskās progresijas locekļu summa?

2. Dots, ka x, y, z – pozitīvi skaitļi un $xy+yz+zx>x+y+z$. Pierādīt, ka $x+y+z>3$.

3. Dots, ka n- naturāls pāra skaitlis. Apskatām reizinājumu $R=n(n+1)(n+2)(n+3)$.

a) vai var būt, ka R ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts?

b) vai var būt, ka R ir kāda naturāla skaitļa kubs?

4. Četrstūris ABCD ir ievilkts riņķa līnijā. Zināms, ka AB·CD=AD·BC. Diagonāles AC viduspunkts ir M. Pierādīt, ka $\angle$ABM=$\angle$DBC.

5. Uz galda atrodas n konfektes, n – naturāls skaitlis. Divi spēlētāji pamīšus ēd pa x^2 konfektēm, kur x – naturāls skaitlis (x var mainīties no gājiena uz gājienu). Tas, kam nav ko ēst, zaudē. Pierādīt: ir bezgalīgi daudz tādu n, ka, pareizi spēlējot, otrais spēlētājs var uzvarēt.