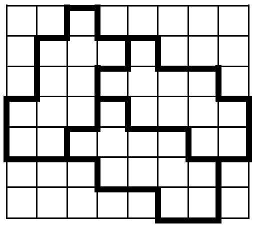
5.1. Dotā virkne, no kuras tiek izsvītroti 26 cipari, ir:

1234567891011121314151617181920.

a) Mazākajam piecciparu skaitlim jāsākas ar pēc iespējas mazāku divciparu skaitli. Šajā gadījumā tas ir 10. Mazākais trīsciparu skaitlis, ko var izveidot no atlikušajiem cipariem (11121314151617181920), ir 110, tāpēc mazākais piecciparu skaitlis ir **10110**.

b) Lielākajam piecciparu skaitlim jāsākas ar pēc iespējas lielāku divciparu skaitli. Lielākais divciparu skaitlis, ko var izveidot no dotajiem cipariem, ir 99. Bet tad atliek vairs tikai divi cipari (20), no kuriem nevar izveidot trīsciparu skaitli. Otrs lielākais divciparu skaitlis ir 98. Vislielākais trīsciparu skaitlis, ko var iegūt no atlikušajiem četriem cipariem 1920, ir 920. Tātad vislielākais piecciparu skaitlis, ko var iegūt dotajā virknē izsvītrojot 26 ciparus, ir **98920**.

5.2. Skat., piem., 1. zīm.



1. zīm.

5.3. Apzīmēsim skaitļus katrā no neaizpildītajām rūtiņām ar burtiem *a*, *b*, *c*, *d*, *e* un *f* kā parādīts 2. zīm.

a	*b*	*c*
d	19	*e*
17	*f*	25

2. zīm.

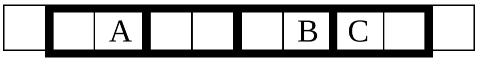
13	23	21
27	19	11
17	15	25

3. zīm.

Tā kā $17+f+25 = b+19+f$, tad $b=23$.
Tā kā $17+19+c = c+e+25$, tad $e=11$.
Tā kā $a+d+17 = a+19+25$, tad $d=27$,
Tātad katrā rindiņā, kolonnā un diagonālē ierakstīto skaitļu summa ir $27+19+11=57$. Tālāk viegli aizpildīt atlikušās tukšās rūtiņas. Aizpildītu tabulu skat. 3. zīm.

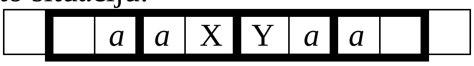
5.4. **a) Pieņemsim, ka var gadīties,** ka rūtiņās A un B ir vienāds punktu skaits, apzīmēsim to ar *a*. Tā kā dotajā kauliņu virknes fragmentā nav iezīmētas kauliņu robežas, tad iespējami divi gadījumi:

1)



4. zīm.

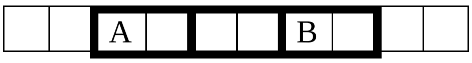
Tā kā B un C ir dažādu kauliņu pusēs, kas saskaras, tad punktu skaitam šajās pusēs jāsakrīt, arī punktu skaitam kauliņa pusē, kas saskaras ar A, jābūt tādam pašam kā rūtiņā A, tātad arī *a*. Iegūstam 5. zīm. attēloto situāciju:



5. zīm.

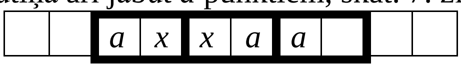
Rūtiņās X un Y punktu skaitam jābūt vienādam, tātad abiem vidējiem kauliņiem jābūt vienādiem, bet tā nevar būt. Iegūta pretruna, tāpēc pie šāda kauliņu robežu ievietojuma nevar gadīties, ka A un B rūtiņās ir vienāds punktu skaits.

2)



6. zīm.

Rūtiņai B blakusesošajā rūtiņā arī jābūt *a* punktiem, skat. 7. zīm.



7. zīm.

Līdzīgi kā 1) gadījumā iegūstam, ka arī šajā gadījumā jābūt diviem vienādiem kauliņiem, kas nav iespējams, tātad arī pie šāda kauliņu robežu ievietojuma rūtiņā A nevar būt tāds pats punktu skaits kā rūtiņā B.

Ir apskatītas visas iespējas, kā varētu būt izvietotas kauliņu robežas, tātad nekad **nevar gadīties**, ka rūtiņās A un B ir vienāds punktu skaits.

b) Punktu skaits rūtiņās A un C **var** būt vienāds, skat. piem., 8zīm.

		5	3	3	4	4	5		

8. zīm.

5.5. Skat. 9. zīm.; katrā melnā rūtiņā ierakstīts tās balto kaimiņu skaits.

1		**2**		
3	**4**	**5**	**6**	

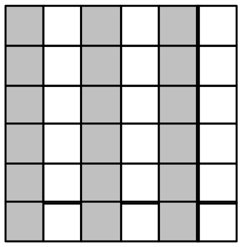
9. zīm.

6.1. Atbilde: 8,9,10,11,12,13,14,15,16.

Atrisinājums. Skaidrs, ka, ja pāra skaitļu ir vairāk, tad to ir tieši par vienu vairāk. Tātad viens pāra skaitlis ir 25% jeb $\frac{1}{4}$ no visa nepāra skaitļu skaita. Tātad ir tieši 4 nepāra skaitļi un 5 pāra skaitļi, kopā 9 skaitļi. Apzīmēsim lielāko no šiem skaitļiem ar M, bet mazāko – m. Tad M=m+8. **(*)**
Tā kā M ir 2 reizes lielāks par m, tad M=m+m. **(**)**
No (*) un (**) seko, ka m=8 un M=16.

6.2. Piemēram, **167832**.

6.3. **a)** no dotā seko, ka $m \cdot n$ dalās ar 5. Tātad vai nu m, vai n dalās ar 5. Varam pieņemt, ka n dalās ar 5. Tad sagriežam taisnstūri strēmelēs $1 \times n$ un pēc tam šīs strēmeles – gabalos 1×5.



10. zīm.

b) nē. Kvadrātu 6×6 var sagriezt kvadrātos 2×2. Pierādīsim ,ka to nevar sagriezt L – tetramino. Iekrāsosim kvadrāta rūtiņas, kā parādīts 10. zīm. Katrs L – tetramino satur vai nu 3, vai 1 melnu rūtiņu. Tāpēc 9 L – tetramino kopā satur nepāra skaitu melnu rūtiņu. Bet melno rūtiņu pavisam ir 18.

6.4. Atbilde: nē, nevar.

Ievērosim, ka izpildot atļautās darbības, kopējā tabulā ierakstīto skaitļu summa nemainās. Tā kā sākotnējā tabulā ierakstīto skaitļu summa ir 12, bet beigās iegūstamajā tabulā tā ir 10, uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams.

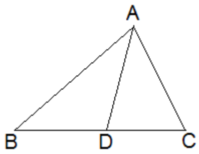
6.5. Lai izveidotu tādu puķu dobi kā minēts uzdevumā, nepieciešams, lai dažādo veidu skaits kā n var izteikt kā trīs nepāra saskaitāmo summu, būtu vismaz n. Katrs šāds sadalījums atbilst vienai derīgai rindai garumā n. Trīs nepāra skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Tālāk apskatītajās summās pirmais saskaitāmais atbilst hiacinšu skaitam, otrais – narcišu skaitam, bet trešais – tulpju skaitam.
Ja n ir 3, tad to kā trīs nepāra saskaitāmo summu var izteikt tikai vienā veidā: 3=1+1+1.
Ja n ir 5, tad iespējami tikai trīs veidi: 5=1+1+3=1+3+1=3+1+1.
Ja n ir 7, tad iespējami tikai seši veidi: 7=1+1+5=1+5+1=5+1+1=1+3+3=3+1+3=3+3+1.
Ja n ir 9, tad iespējami desmit dažādi veidi: 9=1+1+7=1+7+1=7+1+1=1+3+5=1+5+3= =3+1+5=3+5+1=5+1+3=5+3+1=3+3+3. Izvēloties jebkurus deviņus no šiem veidiem, varēs izveidot uzdevumā prasīto puķu dobi. Tāpēc mazākā iespējamā n vērtība ir 9.

7.1. Atbilde: 7, 2, 41, 3, 37.

Atrisinājums. Apzīmēsim uz tāfeles uzrakstītos pirmskaitļus ar p_1, p_2, p_3, p_4, p_5.
No 4. nosacījuma var secināt, ka p_1, p_2, p_4 visi nevar būt nepāra skaitļi, jo tad p_1+p_4 būs pāra skaitlis, bet 5p_2 – nepāra. Tātad kāds no tiem ir pāra skaitlis, un vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2. Ja p_4=2, tad būtu 5p_2=9, kas nevar būt. Tātad p_2=2 un attiecīgi p_4=5·2-7=3.
Iespējamie skaitļi, kam visi cipari ir vienādi un ko var iegūt 3 reizinot ar kādu skaitli, kas nepārsniedz 100, ir 33, 66, 99, 111, 222. Taču tikai 33=3·11 un 111=3·37 izsakāms kā

skaitļa 3 reizinājums ar pirmskaitli. Tāpēc p_5=11 vai p_5=37. p_5=11 neder, jo tad p_3=11+4=15, kas nav pirmskaitlis. Tātad p_5=37 un p_3=41.

7.2. Taisne *t* krusto malu BC kādā iekšējā punktā D (ja tā nekrustotu pretējo malu, tad sākotnējais trijstūris netiktu sadalīts divos trijstūros). Pieņemsim, ka var gadīties, ka AB>AC.
Tā kā trijstūri ABD un ADC ir vienādi, tad to attiecīgajām malām jābūt vienādām. Tā kā AB>AC, tad jābūt AB=DC vai arī AB=AD.



11. zīm.

Ja AB=AD, tad ΔABD ir vienādsānu, tātad arī tam vienādais ΔACD arī ir vienādsānu trijstūris un AD=DC (nevar būt AD=AC, jo AD=AB>AC). Tātad AC=DB. Iegūstam, ka BC=BD+DC=AC+AB, kas ir pretrunā ar trijstūra nevienādību BC<AB+AC.

Ja AB=DC, tad AC=BD, vai arī AC=AD, otrajā gadījumā ΔACD arī ir vienādsānu trijstūris, tātad jābūt AC=AD=BD. Atkal iegūstam, ka BC=AC+AB, kas ir pretrunā ar trijstūra nevienādību.

Esam apskatījuši visas iespējas, tātad nevar gadīties, ka AB>AC.

7.3. Skat., piem., 12. zīm.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
1989	1990	1991	1992

12. zīm.

7.4. Pieņemsim, ka bērnu ir *n*. Viegli izsekot, ka katras konfekšu dalīšanas rezultātā starpības starp jebkuru divu bērnu konfekšu daudzumiem mainās par skaitļa *n* daudzkārtni. Tā kā sākumā šīs starpības visas ir 0, tad tās vienmēr ir skaitļa *n* daudzkārtņi, tāpēc 19 dalās ar *n*. Tā kā 19 ir pirmskaitlis un bērnu ir vairāk nekā viens, tad *n*=19. Piemērs: sākumā ir 19 bērni, katram 22 konfektes. Viens bērns iedod katram no 18 citiem pa vienai konfektei.

7.5. Ar p_{max} apzīmēsim lielāko iespējamo *patiešu* skaitu, ar p_{min} – mazāko iespējamo *patiešu* skaitu.

Ja starp rūķīšiem ir *p patieši*, kur $p \geq 202$, tad apskatām 101. *patiesi*, skaitot no kreisās puses. Tam kreisajā pusē ir 100 *patieši*, bet labajā $p - 101 \geq 101$ *patieši*. Tāpēc šis patiesis atbildēja "*jā*" un visi tam pa kreisi esošie 100 patieši arī atbildēja ar "*jā*". Tāpēc vismaz 101 rūķītis atbildēja "*jā*", kas ir pretrunā ar doto. Tāpēc $p \leq 201$. *Patiešu* skaits var būt vienāds ar 201: $\underbrace{mm...m}_{1809}\underbrace{pp...p}_{201}$. Tāpēc $p_{max} = 201$.

Ja visi rūķīši būtu *meļi*, tad visi teiktu "*jā*", tāpēc nebūtu tieši 100 atbilžu "*jā*". Tāpēc visi nav *meļi* un $p_{min} \geq 1$. Tieši viens *patiesis* var būt: $\underbrace{mm...m}_{1909}p\underbrace{mm...m}_{100}$. Tāpēc $p_{min} = 1$.

8.1. Atbilde: a) (6+1)·3+4=25

b) $6:(1-3:4)=6:\left(1-\frac{3}{4}\right)=6:\frac{1}{4}=6\cdot 4=24$.

8.2. Pieņemsim, ka viens no puišiem izvēlējies skaitļus **a-1**, **a** un **a+1**, bet otrs – **b-1**, **b** un **b+1**. Tā kā visi seši skaitļi ir atšķirīgi, tad varam pieņemt, ka a-1>b+1. Izveidosim tabulu, kurā ierakstīsim visus iespējamos skaitļu reizinājumus pa pāriem (skat. 13. zīm.).
Vilksim bultiņu no katras rūtiņas uz blakus rūtiņu, ja skaitlis pirmajā rūtiņā vienmēr ir mazāks par skaitli otrajā rūtiņā.

	a-1	a	a+1
b-1	ab-a-b+1	ab-a	ab-a+b-1
b	ab-b	ab	ab+b
b+1	ab+a-b-1	ab+a	ab+a+b+1

13. zīm.

Viegli redzēt, ka ir vairāki maršruti, kas, ejot pa rūtiņām bultiņu norādītajos virzienos, ļauj nonākt no kreisā augšējā stūra rūtiņas (reizinājuma vērtība vismazākā) labējā apakšējā stūra rūtiņā (reizinājuma vērtība vislielākā). Ja divas rūtiņas atrodas uz kāda no šādiem maršrutiem, tad tajās ierakstītie skaitļi atšķiras.

Katra no rūtiņām atrodas vienā no 14. zīm. attēlotajiem maršrutiem:

	a-1	a	a+1
b-1	ab-a-b+1	ab-a	ab-a+b-1
b	ab-b	ab	ab+b
b+1	ab+a-b−1	ab+a	ab+a+b+1

	a-1	a	a+1
b-1	ab-a-b+1	ab-a	ab-a+b-1
b	ab-b	ab	ab+b
b+1	ab+a-b-1	ab+a	ab+a+b+1

14. zīm.

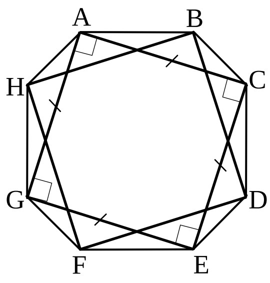
Tātad tabulā neviens skaitlis nevar būt ierakstīts vairāk kā divās dažādās rūtiņās. Noteiksim, kāds tabulā var būt lielākais vienādo skaitļu pāru skaits. Vienai no rūtiņām, kurā ierakstīti vienādi skaitļi, jābūt tādai, kas nepieder pirmajam maršrutam. Iespējami divi varianti:

a) tā ir rūtiņa (b-1)(a+1). Otra rūtiņa nedrīkst atrasties uz viena maršruta ar šo rūtiņu. Vienīgā šāda rūtiņa ir b(a-1). Ja šie skaitļi ir vienādi, tad ab-a+b-1=ab-b jeb a=2b-1.

b) tā ir rūtiņa (b+1)(a-1). Vienīgā rūtiņa, kas neatrodas uz viena maršruta ar to, ir rūtiņa b(a+1). Ja šie skaitļi ir vienādi, tad ab+a-b-1=ab+b jeb a=2b+1.

Abas sakarības a=2b-1 un a=2b+1 nevar izpildīties vienlaicīgi, tātad ne vairāk kā divās rūtiņās ierakstītie skaitļi var būt vienādi, tāpēc tabulā ir vismaz astoņi savā starpā atšķirīgi skaitļi.

8.3. Lai pierādītu, ka BDFH ir kvadrāts, jāpierāda, ka visas tā malas ir vienādas un visi leņķi taisni (skat. 15. zīm.).



15. zīm.

Astoņstūra iekšējo leņķu summa ir (8-2)·180°=1080°, tātad katrs leņķis ir 1080°:8=135°.

Trijstūrī ABC iekšējo leņķu summa ir 180° un ∠B=135°, tātad ∠BAC+∠BCA=45°.

∠BCA+90°+∠DCE=∠C=135°, tātad ∠DCE+∠BCA=45°.

Trijstūrī CDE iekšējo leņķu summa ir 180° un ∠D=135°, tātad ∠DCE+∠DEC=45°.

No pirmajām divām vienādībām var secināt, ka ∠BAC=∠DCE, no pēdējām divām, ka ∠BCA=∠DEC.

Tā kā AC=CE (jo ACEG kvadrāts), ΔABC=ΔCDE (*lml*).

No tā seko, ka AB=CD un BC=DE (vienādos trijstūros atbilstošie elementi ir vienādi).

Tātad ΔABC=ΔDCB (*mlm*): BC – kopīgā mala, AB=DC un ∠ABC=∠BCD=135°. No tā seko, ka AC=BD kā vienādu trijstūru atbilstošie elementi.

Līdzīgi pierāda, ka CE=DF, EG=FH, GA=HB, tātad **BD=DF=FH=HB**, jo AC=CE=EG=GA kā kvadrāta ACEG malas. Tātad četrstūris BDFH ir rombs. Lai pierādītu, ka tas ir arī kvadrāts, pietiek pierādīt, ka viens no tā leņķiem ir taisns.

ΔBCD=ΔDEF (*mmm*), jo BC=DE, BD=DF (iepriekš pierādīts) un CD=EF (pierāda līdzīgi, kā AB=CD). Tātad ∠EDF=∠CBD (kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros).
∠BDF=135°-∠CDB-∠EDF=135°-∠CDB-∠CBD=135°-(180°-135°)=90°, k.b.j.

8.4. **a)** Katru baļķi var sazāģēt vai nu bez, vai ar „atlikumu", „atlikumus" sauksim par „izniekotiem". Bez „atlikuma" 10 m garu baļķi vajadzīgā izmēra baļķīšos var sadalīt tikai divos veidos –**A)** iegūstot divus 5 m garus baļķīšus vai **B)** iegūstot divus 3 m garus baļķīšus un vienu 4 m garu baļķīti.

Visu 39 iegūstamo baļķīšu kopējais garums ir 156 m. Pieejamo 16 baļķu kopējais garums ir 160 m. Tas nozīmē, ka ne vairāk kā 4 m drīkst palikt „atlikumos".

Tā kā mazākais „atlikums", kas var palikt pāri no viena baļķa, ir 1 m (piem., nozāģējot vienu 4 m garu baļķīti un vienu 5 m garu baļķīti vai nozāģējot trīs 3 m garus baļķīšus), tad ne vairāk kā četri baļķi drīkst būt izmantoti ar „atlikumu". Tātad vismaz 12 baļķi jāsazāģē bez „atlikuma"

Savukārt ne vairāk kā 6 baļķus drīkst sazāģēt A) veidā, jo, sazāģējot vismaz 7 baļķus A) veidā, tiktu iegūti vismaz 14 5 m gari baļķīši. Ne vairāk kā 6 baļķus drīkst sazāģēt arī B) veidā (pretējā gadījumā tiktu iegūti vairāk nekā 13 3 m gari baļķīši. Tātad **tieši** 6 baļķi jāsazāģē A) veidā un **tieši** 6 baļķi jāsazāģē B) veidā. No šiem 12 baļķiem tiks iegūti 12 5 m gari baļķīši, 12 3 m gari baļķīši un 6 4 m gari baļķīši. No atlikušajiem četriem baļķiem jāiegūst vēl pa vienam baļķītim garumā 3 m un 5 m un 7 baļķīšus garumā 4 m.

Lai iegūtu vienu trūkstošo 3 m baļķīti, tiks „izniekoti" vismaz 2 m. Tad atlikušajos trīs baļķos kopā drīkst „izniekot" ne vairāk kā 2 m. Taču tā kā vairs nevienu baļķi nevar sazāģēt bez „atlikuma", tad kopumā tiks „izniekoti" vismaz 3 m>2 m. Tātad, vajadzīgo baļķu komplektu no 16 10 m gariem baļķiem **iegūt nevar**.

b) vajadzīgos baļķīšus var iegūt, ja 4 baļķus sazāģē katru divos 5 m garos baļķīšos un vienā 3 m garā baļķītī, 5 baļķus – katru divos 4 m garos baļķīšos un vienā 5 m garā baļķītī un trīs baļķus – katru trijos 3 m garos baļķīšos un vienā 4 m garā baļķītī.

8.5. Ja uzvarētājs ieguvis n punktus, tad kopējais iegūto punktu daudzums nav lielāks par $n+(n-\frac{1}{2})+(n-1)+(n-1\frac{1}{2})+(n-2)+(n-2\frac{1}{2})+(n-3)=7n-10\frac{1}{2}$. Pavisam izspēlēja 21 spēli, tāpēc $21\le 7n-10\frac{1}{2}$ un $7n\ge 31\frac{1}{2}$, no kurienes $n\ge 4\frac{1}{2}$. Piemēru, kur $n=4\frac{1}{2}$, skat. 16. zīm.

	A	B	C	D	E	F	G	Punkti
A		1	1	1	1	0,5	0	**4,5**
B	0		1	1	0	1	1	**4**
C	0	0		1	0,5	1	1	**3,5**
D	0	0	0		1	1	1	**3**
E	0	1	0,5	0		0	1	**2,5**
F	0,5	0	0	0	1		0,5	**2**
G	1	0	0	0	0	0,5		**1,5**

16. zīm.

9.1. **a)** skaitļus no 1 līdz 10 **ir iespējams** sadalīt piecos pāros tā, ka katra pāra skaitļu summa ir atšķirīgs pirmskaitlis: 1+6=7, 2+3=5, 4+7=11, 5+8=13 un 9+10=19.

b) aplūkosim, kādus pirmskaitļus varētu izveidot no dotajiem 20 skaitļiem, summējot tos pa pāriem. Mazākais pirmskaitlis, ko iespējams izveidot, ir 3, bet lielākais – 37. Tātad var izveidot šādus 11 pirmskaitļus: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Tā kā katram skaitļu pārim jāveido atšķirīgs pirmskaitlis, tad visu doto skaitļu summai jābūt mazākai nekā visu iespējamo pirmskaitļu summa. Skaitļu no 1 līdz 20 summa ir 210, bet visu uzskaitīto pirmskaitļu summa ir 195<210, tātad, skaitļus no 1 līdz 20 **nav iespējams** sadalīt pa pāriem uzdevumā prasītajā veidā.

9.2. Pieņemsim, ka E ir gan AB, gan CD viduspunkts, tad četrstūris ACBD ir paralelograms. Paralelograma pretējās malas pa pāriem ir paralēlas, tātad jābūt AC||BD un AD||BC.
Apzīmēsim doto punktu koordinātas: A(x_A; x_A^2), B(x_B; x_B^2), C(x_C; x_C^2) un D(x_D; x_D^2).
Ja taisnes, kas iet caur punktiem A un C, vienādojums ir $y=k_1x+b_1$, tad

$$\begin{cases} x_A^2 = k_1 \cdot x_A + b_1 \\ x_C^2 = k_1 \cdot x_C + b_1 \end{cases}.$$

Atņemot, vienu vienādojumu no otra, iegūstam

$$(x_A - x_C)(x_A + x_C) = k_1(x_A - x_C).$$

Tā kā punkti A un C ir dažādi, tad $x_A \neq x_C$, tāpēc $k_1 = x_A + x_C$.
Līdzīgi iegūstam, ka taisnes, kas iet caur punktiem B un D, virziena koeficients $k_2 = x_B + x_D$. Tā kā paralēlām taisnēm virziena koeficienti ir vienādi, tad

$$x_A + x_C = x_B + x_D \qquad (1)$$

No tā, ka arī taisnes AD un BC ir paralēlas, līdzīgi iegūstam

$$x_A + x_D = x_B + x_C \qquad (2)$$

Atņemot vienādību (2) no (1), iegūstam

$x_C - x_D = x_D - x_C$ jeb $x_C = x_D$, kas ir pretrunā ar doto.
Tātad mūsu pieņēmums ir aplams, un nevar gadīties, ka E ir gan AB, gan CD viduspunkts.

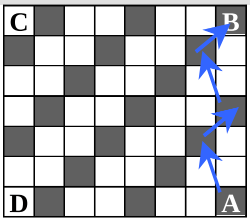
9.3. Ja p ir pirmskaitlis, tad skaitlim p^{n-1} ir tieši n dalītāji 1; p; p^2; …; p^{n-1}. Pieņemsim, ka p – pirmskaitlis, n – naturāls skaitlis. Apskatīsim $A = p^{p^n-1}$. Tam ir p^n dalītāju. Lai pierādītu, ka A ir apaļīgs, pietiek pierādīt, ka $p^n - 1 \geq n$ jeb $p^n \geq n+1$. To iegūst, sareizinot n acīmredzamas nevienādības $p \geq 2$, $p \geq \frac{3}{2}$, $p \geq \frac{4}{3}$, …, $p \geq \frac{n+1}{n}$. Ja $p = 2$, A ir pāra skaitlis.

9.4. Ievērosim, ka skaitļi tabulā ir izvietoti pa diagonālēm. Ievērosim, ka uz vienas diagonāles esošām rūtiņām rindas un kolonnas numuru summa ir konstanta, sauksim to par diagonāles *invariantu*. Piemēram, pirmās diagonāles (kas satur tikai skaitli 1) *invariants* ir 2, otrās diagonāles (kur ierakstīti skaitļi2 un 3) *invariants* ir 3, utt. Diagonālēs, kam *invariants* ir nepāra skaitlis, skaitļu ierakstīšanas virziens ir rindu augšanas virzienā, bet diagonālēs, kam *invariants* ir pāra skaitlis, skaitļu ierakstīšanas virziens ir kolonnu augšanas virzienā. Katrā nākošajā diagonālē gan rūtiņu kopskaits, gan *invariants* ir par 1 lielāks nekā iepriekšējā diagonālē. Tātad rūtiņu skaits diagonālē ar *invariantu* n ir n-1.

a) 20. rindas 10. kolonnas rūtiņa atrodas uz diagonāles ar *invariantu* 30. Kopējais skaitļu skaits, kāds ierakstīts diagonālēs ar mazāku *invariantu*, ir $1+2+...+28 = \frac{29 \cdot 28}{2} = 406$.
Tātad skaitļi uz nākošās diagonāles ir ierakstīti kolonnu augšanas secībā un 10.kolonnā būs ierakstīts skaitlis **416**.

b) Lai noteiktu, kurā rūtiņā ierakstīts skaitlis 2010, nepieciešams noteikt, kurā diagonālē tas atrodas. Tātad, jāatrod tāds k, ka $1+2+….+k-2<2010\leq1+2+….+k-1$. Šāds k=64. Tātad 2010 atrodas uz diagonāles, kuras *invariants* ir 64. Uz iepriekšējām diagonālēm kopā atrodas 1+2+…+62 = 1953 skaitļi. Skaitļi ir ierakstīti kolonnu augšanas secībā, tāpēc 2010 atrodas tabulas **7.rindas 57.kolonnā**.

9.5. Izkrāsosim dotajā taisnstūrī katru trešo diagonāli kā parādīts 17. zīmējumā.



17. zīm.

Ievērosim, ka *sienāzis*, izpildot atļautos gājienus, no melnas rūtiņas var nonākt **tikai** melnā rūtiņā. Tātad no rūtiņas **A** viņš nekad nenonāks rūtiņās **C** un **D**. Savukārt, kā nokļūt rūtiņā **B**, parādīts, piem., 17. zīm.

10.1. Viegli pierādīt nevienādību $x+y \geq \frac{4}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ pozitīviem *x* un *y*.

No tās seko

$$\frac{x_1+x_3}{x_1+x_2}+\frac{x_3+x_1}{x_3+x_4} \geq 4\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2+x_3+x_4} \text{ un}$$

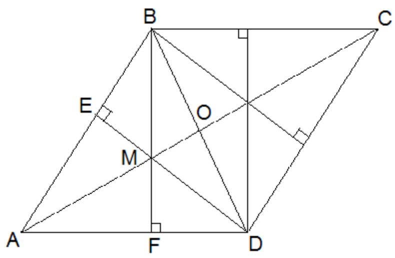
$$\frac{x_2+x_4}{x_2+x_3}+\frac{x_4+x_2}{x_4+x_1} \geq 4\cdot\frac{x_2+x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4}.$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam vajadzīgo.

10.2. Atbilde: 12; piemēram, varam ņemt regulāra 12-stūra, kas ievilkts riņķa līnijā, virsotnes $A_1, A_2, ..., A_{12}$. Tad starp katrām 2 blakus virsotnēm A_i un A_{i+1} ir 30° loks. Starp virsotnēm A_i un A_{i+2} ir 60° loks un attālums $A_iA_{i+2}=1$. Tas nozīmē, ka vienīgie virsotņu pāri, starp kurām attālums ir mazāks nekā 1, ir $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{11}A_{12}, A_{12}A_1$.

Tagad apskatīsim gadījumu, kad uz riņķa līnijas ir atlikti 13 punkti $A_1, A_2, ..., A_{13}$. Sadalīsim riņķa līniju sešos 60° lokos $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, B_5B_6, B_6B_1$ tā, lai neviens no punktiem B_i nesakristu ne ar vienu no A_j. Tā kā 13>6·2, tad uz kāda no lokiem būs vismaz 3 punkti A_j. Apzīmēsim tos ar X, Y, Z. Tā kā X, Y, Z atrodas uz 60° loka un nesakrīt ar tā galapunktiem, tad katrs no lokiem XY, YZ, XZ ir mazāks nekā 60° un attālumi XY, YZ un XZ ir mazāki nekā $2\cdot\sin\left(\frac{60°}{2}\right)=2\sin 30°=1$.

10.3. Neatkarīgi no tā, pret kuru malu pāri (AD un BC, vai CD un AB) perpendikuli tiek vilkti, to krustpunkti ar AC ir simetriski attiecībā pret ABCD diagonāļu krustpunktu O (skat. 18. zīm.) Tā kā abos gadījumos attālums starp krustpunktiem uz AC ir vienāds, tad tas nozīmē, ka abos gadījumos krustpunkti ir vieni un tie paši (atrodas uz AC 1cm attālumā no O). Viens no šiem krustpunktiem ir M, kurā krustojas perpendikuli DE un BF.



18. zīm.

Aplūkosim trijstūri ABD. DE un BF ir šī trijstūra augstumi, kuri krustojas punktā M. Tātad arī AO, kas vilkts no trešās virsotnes un iet caur augstumu krustpunktu, ir augstums.

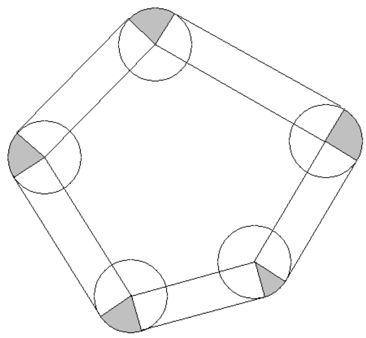
Tas nozīmē, ka paralelograma ABCD diagonāles ir perpendikulāras un ABCD ir rombs. Romba visas malas ir vienādas, līdz ar to AB=AD un ABD – vienādsānu trijstūris. Trijstūri AOD un DOM ir līdzīgi, jo abi ir taisnleņķa trijstūri, un šaurais leņķis ∠FAO = ∠MAE (jo DAB – vienādsānu) = ∠ODE (kā leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām).

Malu garumus saista attiecība: $\frac{OD}{OM}=\frac{OA}{OD}$. OM = 1cm, bet $\frac{OA}{OD}=\frac{7}{4}$. Tātad OD=$\frac{7}{4}$ cm, BD=$\frac{7}{2}$ cm, OA=$\frac{49}{16}$ cm un AC=$\frac{49}{8}$ cm. Romba ABCD laukums L=$\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{7\cdot 49}{2\cdot 2\cdot 8}=\frac{343}{32}$ cm^2.

10.4. Pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi veido aritmētisku progresiju ar diferenci 1. Tās *n* pēc kārtas ņemtu locekļu *a*, *a*+1,…, *a*+*n*-1 summa ir $\frac{(a+a+n-1)\cdot n}{2}=\frac{(2a+n-1)\cdot n}{2}$. Tātad nepieciešams atrast visas tādas *n* vērtības, kurām *n*>1 un $\frac{(2a+n-1)\cdot n}{2}=2010$ jeb $(2a+n-1)\cdot n=4020$. Ievērosim, ka reizinātājs 2*a*+*n*+1 vienmēr ir lielāks par otro reizinātāju *n* un tiem ir atšķirīga paritāte.
Sadalīsim 4020 pirmreizinātājos: 4020=$2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$. Izveidosim tabulu, kurā, ņemot vērā augstāk minētos secinājumus, attēlosim visas iespējamās reizinātāju *n* un 2*a*+*n*-1, kā arī virknes pirmā locekļa *a* vērtības; pavisam skaitli 2010 kā vairāku pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu var izteikt septiņos dažādos veidos.

n	2*a*+*n*-1	*a*
3	1340	669
4	1005	501
5	804	400
12	335	162
15	268	127
20	201	91
60	67	4

10.5. Pieņemsim, ka privātmājas žogs veido patvaļīgu izliektu daudzstūri (skat. 19. zīm.). Platība, kas sētniekam jānotīra, sastāv no taisnstūriem, kuru viena mala sakrīt ar daudzstūra malu, bet otra mala ir 1 m gara, un riņķa sektoriem, kuru rādiuss ir 1 m. Izliektam daudzstūrim katras virsotnes iekšējā leņķa lielums nepārsniedz 180˚, tāpēc ārējā leņķa lielums ir lielāks nekā 180˚, tātad pie katras daudzstūra virsotnē šāds riņķa sektors būs.


19. zīm.

Daudzstūra iekšējo leņķu summa ir 180˚·(*n*-2), kur *n* – daudzstūra virsotņu skaits. Pie katras no daudzstūra virsotnēm pilnais leņķis tiek sadalīts četros leņķos: daudzstūra iekšējā leņķī, divos taisnajos leņķos un riņķa sektora leņķī. Tātad visiem riņķa sektoriem piederošo leņķu summa ir 360˚·*n* - 2·90˚·*n* - 180˚·(*n*-2) = 360˚. Tātad, neatkarīgi no daudzstūra malu skaita un iekšējo leņķu lielumiem, visu sektoru leņķu summa ir 360˚, t.i., šie sektori kopā veido pilnu riņķi, un to laukumu summa vienādat ar pilna riņķa laukumu πR^2. Tā kā šajā gadījumā R=1 m, tad šis laukums ir π m^2.

Visu taisnstūru laukumu summa ir 2010 m·1 m=2010 m^2. Tātad kopējais laukums, kāds sētniekam ir jānotīra, ir **2010+π** m^2 liels.

11.1. a) Noskaidrosim, kādi skaitļi vienlaicīgi pieder pirmajām divām progresijām (1) un (2).
Tie ir skaitļi, kas vienlaicīgi izsakāmi gan formā 8+11*k*, gan 8+13*m*, (*k*, *m* – veseli nenegatīvi skaitļi), tātad jābūt 11*k*=13*m*. Tā kā 11 un 13 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad *k*=13*p*

un m=11p un virknēm (1) un (2) vienlaicīgi piederēs tie un tikai skaitļi, kas izsakāmi formā 8+143p (p – k vesels nenegatīvs skaitlis).

Atliek noskaidrot, kuri no šiem skaitļiem vienlaicīgi pieder arī virknei (3). Progresijas (3) vispārīgā locekļa formula ir 4+17r. Ja skaitlis pieder visām trim dotajām virknēm, tad 8+143p dalot ar 17, atlikums ir 4. Atlikums, 8+143p dalot ar 17, ir vienāds ar atlikumu, ko iegūst (8+143p)-136p=8+7p, dalot ar 17. Aplūkosim šos atlikumus atkarībā no tā, kādu atlikumu, dalot ar 17, dod p.

atlikums, *p*, dalot ar 17	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	**14**	15	16
atlikums, 8+7*p*, dalot ar 17	8	15	5	12	2	9	16	6	13	3	10	0	7	14	**4**	11	1

Redzam, ka vienīgā derīgā p atlikuma, dalot ar 17, vērtība ir 14. Tātad mazākais skaitlis, kas pieder visām trim dotajām virknēm, ir 8+143·14=**2010** (2010=8+11·182=8+13·154=4+17·118).

b) Aplūkosim skaitļus, kas izsakāmi formā 2010+11·13·17s (s – nenegatīvs vesels skaitlis). Šos skaitļus var izteikt gan kā 8+11(182+13·17s), gan 8+13(154+11·17s), gan 4+17(118+11·13s), tātad visām veselām nenegatīvām s vērtībām tie vienlaicīgi pieder visām trim dotajām virknēm. Tā kā s var pieņemt bezgalīgi daudz dažādas vērtības, tādu skaitļu, kas pieder visām trim dotajām virknēm vienlaicīgi, ir bezgalīgi daudz.

11.2. Skaidrs, ka $4a-3\geq 0$, $4b-3\geq 0$, $4c-3\geq 0$. Sareizinot visas nevienādības, iegūstam

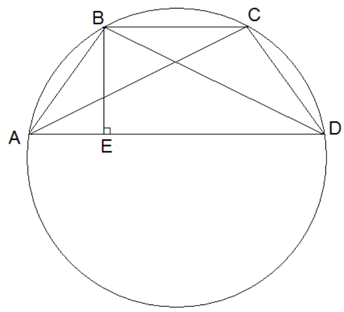
$$a^4b^4c^4 \leq (4a-3)(4b-3)(4c-3) \qquad (1)$$

Katram x ir spēkā $x^4+3=(x^4+1)+2\geq 2x^2+2\geq 4x$, tāpēc $x^4\geq 4x-3$ un vienādība pastāv *ttt* $x=1$.

Tāpēc
$$a^4b^4c^4 \geq (4a-3)(4b-3)(4c-3) \quad (2)$$

No (1) un (2) seko $a^4b^4c^4=(4a-3)(4b-3)(4c-3) \quad\Rightarrow\quad a=b=c=1$.

11.3. Tā kā ∠BAC=∠CAD, tad BC=CD kā hordas, kas savelk vienādus lokus (skat. 20. zīm.). Līdzīgi, no leņķu ∠ADB un ∠CDB vienādības seko, ka AB=BC, tātad AB=BC=CD. No tā, ka ◡CD=◡AB, seko, ka ∠CBD=∠BDA Tie ir šķērsleņķi pie taisnēm BC un AD, kuras krusto taisne BD, tātad BC||AD un ABCD ir vienādsānu trapece.



20. zīm.

Novilksim augstumu BE. Tā kā BC=a un AD=2a, tad $AE=\frac{2a-a}{2}=\frac{a}{2}$, $BE=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Tātad trapeces ABCD laukums $L=\frac{1}{2}(a+2a)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

11.4. Nosauksim skaitli N par *sliktu*, ja N ir nepāra skaitlis vai $N=2^{2i+1}$, kur i – vesels nenegatīvs skaitlis. Nosauksim visus pārējos naturālos skaitļus par *labiem*.

Pierādīsim šādus 2 apgalvojumus:

a) Ja uz tāfeles uzrakstīts *labs* skaitlis N, tad var izvēlēties tādu d>1, ka d<N, d ir N dalītājs un N-d ir *slikts* skaitlis.

b) Ja uz tāfeles uzrakstīts *slikts* skaitlis N, tad izvēloties tādu d>1, ka d ir N dalītājs, vai nu d=N vai arī N-d ir *labs* skaitlis.

Lai pierādītu **a)**, apskatīsim 2 gadījumus.

1) Ja *labam* skaitlim N (pāra skaitlis, kas nav izsakāms formā 2^{2i+1}) ir nepāra dalītājs d>1, tad N-d ir nepāra skaitlis, tātad – *slikts* skaitlis.

2) Ja skaitlim N nav nepāra dalītāju d>1, tad $N=2^{2k}$, (jo divnieka nepāra pakāpes ir *slikti* skaitļi). Izvēloties $d=2^{2k-1}$, iegūstam $N-d=2^{2k-1}$, kas ir *slikts* skaitlis.

b) Ja N ir nepāra skaitlis, tad visi N dalītāji d arī ir nepāra skaitļi un N-d vienmēr būs pāra skaitlis. Vienīgie *sliktie* pāra skaitļi ir divnieka pakāpes 2^{2i+1}. N-d nevar būt divnieka pakāpe, jo $N-d=\left(\frac{N}{d}-1\right)d$, tāpēc N-d dalās ar nepāra skaitli $d>1$; tātad N-d ir *labs* skaitlis.

Ja $N=2^{2i+1}$, tad visi N dalītāji $d>1$ ir pāra skaitļi un N-d ir pāra skaitlis. Ja $d<N$, tad $d\le 2^{2i}$ un $N-d\ge 2^{2i}$. Tādejādi, $2^{2i}\le N-d<2^{2i+1}$, t.i., N-d nevar būt *slikts* skaitlis.

No apgalvojumiem **a)** un **b)** seko, ka, ja uz tāfeles sākotnēji uzrakstīts *labs* skaitlis, tad pirmais spēlētājs vienmēr var izdarīt gājienu tā, lai pēc viņa gājiena uz tāfeles būtu *slikts* skaitlis, bet pēc otrā spēlētāja atbildes gājiena uz tāfeles noteikti būs *labs* skaitlis vai 0. Tā kā *labiem* skaitļiem N vienmēr ir tāds dalītājs d, ka $1<d<N$, tad 1. spēlētājs vienmēr varēs izdarīt gājienu. Tātad, ja uz tāfeles sākumā uzrakstīts labs skaitlis, pirmais spēlētājs vienmēr var uzvarēt.

Skaitlis 2010 ir *labs* skaitlis, tātad, pareizi spēlējot, pirmais spēlētājs uzvarēs.

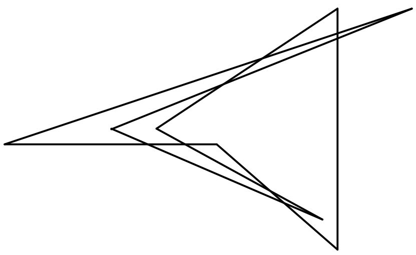
11.5. Acīmredzot skaitlis $2^1 = 2$ nav *sakarīgs*.

Tālāk pieņemsim, ka eksistē attiecīga lauzta līnija ar $2^2 = 4$ posmiem. Apskatīsim kādu tās posmu P. Tam ir kopīgi galapunkti ar diviem citiem posmiem P_1 un P_2, kas P nekrusto; P krustot var tikai vēl kāds cits posms P_3. Tātad posmu P krusto ne vairāk kā viens cits šīs lauztās līnijas posms – pretruna. Tāpēc skaitlis 4 nav *sakarīgs*.

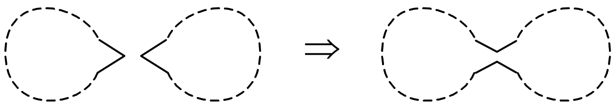
Skaitlis 2^3 ir *sakarīgs*, skat., piem., 21. zīm.

Ja skaitlis a ir sakarīgs, tad arī $2a$ ir sakarīgs, jo uzzīmējot divas slēgtas lauztas līnijas ar a posmiem un "sabīdot" tās kopā, kā parādīts 22. zīm., veidosies lauzta līnija ar $2a$ posmiem, kas katru savu posmu krusto 2 reizes.

Tādējādi, ja k ir naturāls skaitlis, skaitlis 2^k ir sakarīgs tad un tikai tad, ja $k \ge 3$.



21. zīm.



22. zīm.

12.1. 1. Vislielākā dotās izteiksmes vērtība ir 1, jo

$$\sin^{2010} x+\cos^{2010} x\le \sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

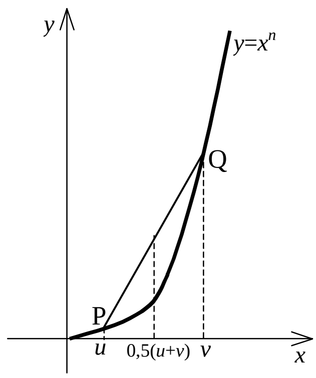
Dotās izteiksmes vērtība ir 1, piemēram, ja $x = 0$.

2. Vismazākā dotās izteiksmes vērtība ir 2^{-1004}, ko tā sasniedz, piemēram, ja $x=\frac{\pi}{4}$.

Pamatosim nevienādību

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^n\le\frac{1}{2}\left(u^n+v^n\right),\ n\in N,\, u,v\in[0,+\infty).$$

Apskatīsim funkcijas $y=x^n$ grafiku un hordu PQ, kas savieno divus grafika punktus P(u; u^n) un Q(v; v^n) (pieņemsim, ka $u\le v$) (skat. 23. zīm.). Tad $\left(\frac{u+v}{2}\right)^n$ izsaka ordinātu funkcijas $y=x^n$ grafika punktam, kura abscisa sakrīt ar hordas viduspunkta abscisu, savukārt $\frac{1}{2}\left(u^n+v^n\right)$ izsaka hordas PQ viduspunkta ordinātu. Tā



23. zīm.

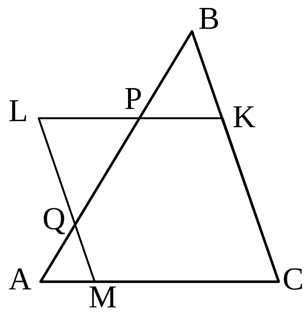
kā funkcija $y=x^n$ pie $x\in[0; +\infty)$ ir izliekta, visiem x, kur $u<x<v$, funkcijas grafiks atrodas zem hordas PQ, tātad $\left(\frac{u+v}{2}\right)^n \le \frac{1}{2}\left(u^n+v^n\right)$, pie tam vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja $u=v$.

Ņemot $u=\sin^2 x,\ v=\cos^2 x,\ n=1005,$ iegūstam

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1005} \le \frac{1}{2}\left((\sin^2 x)^{1005}+(\cos^2 x)^{1005}\right)=\frac{1}{2}\left(\sin^{2010} x+\cos^{2010} x\right).$$

12.2. $\Delta AQM \sim \Delta PQL \sim \Delta PBK$ (ll) (skat. 24. zīm.).

Līdzīgu trijstūru laukumu attiecība ir vienāda ar atbilstošo malu garumu attiecības kvadrātu. AQ, PQ un PB ir atbilstošās malas šajos līdzīgajos trijstūros, tāpēc no dotās vienādības $AQ^2+PB^2=PQ^2$, seko, ka $L_{AQM}+L_{PBK}=L_{PQL}$.



24. zīm.

$L_{ABC}=L_{MCKL}$, jo daļa CKPQM tiem ir kopēja, un $L_{AQM}+L_{PBK}=L_{PQL}$.

$L_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin(\angle ACB)$, $L_{MCKL}=MC\cdot KC\cdot\sin(\angle ACB)$.

Tā kā $\angle ACB\ne 0$, tad arī $\sin(\angle ACB)\ne 0$, tātad jābūt $\frac{1}{2}AC\cdot BC=MC\cdot KC$ jeb $AC\cdot BC=2MC\cdot KC$, k.b.j.

12.3. Viegli pamatot, ka katram naturālam n $d(n)\le 2\sqrt{n}$. Tad, ja n, $d(n)$ un $d(d(n))$ veido aritmētisku progresiju, tad $d(n)=\frac{n+d(d(n))}{2}>\frac{n}{2}$ un $d(n)\le 2\sqrt{n}$. Tāpēc $2\sqrt{n}>\frac{n}{2}$ un $\sqrt{n}<4$, jeb $n<16$. n nevar būt pirmskaitlis vai 1. Pārbaudot visus saliktos skaitļus, kas nepārsniedz 15, atrodam, ka der tikai vērtība $\boldsymbol{n=4}$, tad $d(n)=3$ un $d(d(n))=2$.

12.4. $2\left(ah_a+bh_b+ch_c\right)\le\left(ah_b+ah_c+bh_a+bh_c+ch_a+ch_b\right)$

$a(h_a-h_b)+a(h_a-h_c)+b(h_b-h_a)+b(h_b-h_c)+c(h_c-h_a)-c(h_c-h_b)\le 0$

$(a-b)(h_a-h_b)+(a-c)(h_a-h_c)+(b-c)(h_b-h_c)\le 0$

Tā kā trijstūrī pret garāku malu ir īsāks augstums (seko no trijstūra laukuma formulas $L=\frac{1}{2}ah_a$), tad katrs no saskaitāmajiem ir negatīvs skaitlis vai 0, tāpēc iegūtā nevienādība ir patiesa. Vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja dotais trijstūris ir regulārs.

12.5. Pieņemsim no pretējā, ka n ir **lielākais** cepumu skaits sākuma pozīcijā, pie kura otrajam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija. (Tādi n vispār eksistē, piem., $n=2$.) Pieņemsim, ka uz galda atrodas n^3+n+1 cepums. Pierādīsim, ka otrais spēlētājs var uzvarēt. Tā būs pretruna ar pieņēmumu, un uzdevums būs atrisināts.

Pirmais spēlētājs ar savu pirmo gājienu nevar apēst vairāk par n^3 cepumiem, jo $(n+1)^3>n^3+n+1$. Tāpēc pēc šī gājiena uz galda paliek $\ge n+1$ cepums. Saskaņā ar pieņēmumu šajā situācijā uzvar tas, kas sāk, t.i., otrais spēlētājs. Vajadzīgā pretruna iegūta.