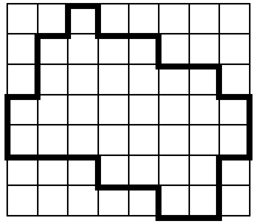
Latvijas 37. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

5. klase

1. Rindā pēc kārtas uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 20, neievērojot atstarpes starp tiem. Pēc tam šajā rindā izsvītroja 26 ciparus un apskatīja atlikušo ciparu veidoto naturālo skaitli (ciparu secību mainīt nedrīkst!).
Kāds varēja būt **a)** mazākais iegūtais skaitlis;
b) lielākais iegūtais skaitlis?
(Naturāla skaitļa pieraksts nedrīkst sākties ar 0.)


1. zīm.

2. Sagriez 1. zīmējumā attēloto figūru trīs vienādās daļās! Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.

3. Dotās 3×3 rūtiņu tabulas katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto trīs skaitļu summas būtu vienādas. Ir zināmi trīs rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 2. zīm.). Aizpildi pārējās tabulas rūtiņas!

	19	
17		25

2. zīm.

4. Vairāki domino kauliņi ir salikti rindā viens aiz otra tā, ka katri divi viens otram sekojoši kauliņi saskaras ar pusēm, uz kurām attēlots vienāds punktu skaits.
3. zīmējumā parādītā rūtiņu virkne attēlo iegūtās domino kauliņu rindas fragmentu: katra rūtiņa atbilst domino kauliņa vienai pusei, bet nav iezīmētas kauliņu robežas.

...			A				B	C				**...**

3. zīm.

Nosaki, vai punktu skaits rūtiņā „A" var būt vienāds ar punktu skaitu **a)** rūtiņā „B", **b)** rūtiņā „C"!
(Domino kauliņu komplekts sastāv no 28 kauliņiem. Katrs kauliņš sastāv no divām kvadrātveida pusēm, uz kurām attēloti punkti – uz katras puses attēloto punktu skaits ir no 0 līdz 6. Katram iespējamam punktu daudzumu pārim komplektā ir tieši viens kauliņš.)

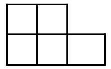
5. Taisnstūris sastāv no 3×5 rūtiņām. Divas rūtiņas sauc par kaimiņiem, ja tām ir kopēja mala vai kopējs stūris. Tieši 6 rūtiņas nokrāsotas melnas; pārējās ir baltas.
Vai var gadīties, ka vienai melnai rūtiņai ir tieši 1 balts kaimiņš, vienai melnai rūtiņai – tieši 2 balti kaimiņi, ... , vienai melnai rūtiņai – tieši 6 balti kaimiņi?

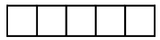
6. klase

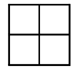
1. Doti vairāki pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Zināms, ka pāra skaitļu starp tiem ir par 25% vairāk nekā nepāra un lielākais skaitlis ir 2 reizes lielāks par mazāko. Atrodi šos skaitļus!

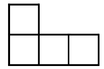
2. Atrodi tādu naturālu sešciparu skaitli, kas sastāv no trīs dažādiem pāra cipariem un trīs dažādiem nepāra cipariem un kas dalās ar katru no saviem cipariem!

3. **a)** Dots, ka taisnstūri ar izmēriem $m \times n$ rūtiņas var sagriezt tādās figūrās, kāda redzama 4. zīm. Pierādīt: šo taisnstūri var sagriezt arī tādās figūrās, kāda redzama 5. zīm.
b) Vai taisnība, ka jebkuru taisnstūri, kam gan garums, gan platums ir vismaz 4 rūtiņas un kuru var sagriezt 6. zīm. redzamās figūrās, var sagriezt arī 7. zīm. redzamās figūrās?


4. zīm.


5. zīm.


6. zīm.


7. zīm.

Figūras var būt arī pagrieztas vai apgrieztas „uz mutes".

4. 8. zīmējumā dota 3×3 rūtiņu tabula, kurā ierakstīti veseli skaitļi. Vienā gājienā atļauts izvēlēties divas dažādas tabulas rūtiņas – apzīmēsim tajās ierakstītos skaitļus attiecīgi ar x un y, nodzēst šos divus skaitļus un to vietā ierakstīt: x vietā – skaitli $3 \cdot x - 2 \cdot y$, bet y vietā – skaitli $3 \cdot y - 2 \cdot x$.
Vai, vairākkārt veicot šādus gājienus, var iegūt tabulu, kāda attēlota 9. zīm.?

1	3	11
-1	5	-7
4	-4	0

8. zīm.

2	-4	0
3	-9	5
4	11	-2

9. zīm.

5. Puķu dobe sadalīta n rindās pa n stādiem katrā rindā. Šajā dobē ir jāiestāda trīs veidu puķes: narcises, hiacintes un tulpes tā, lai izpildītos sekojoši nosacījumi:
1) katrā rindā ir iestādīts nepāra skaits katra veida stādu;
2) nav iespējams atrast divas tādas rindas, kurās gan narcišu, gan hiacinšu, gan tulpju daudzumi sakristu.
Nosaki, kāda ir mazākā iespējamā n vērtība, pie kuras iespējams to izdarīt!

Latvijas 37. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

7. klase

1. Uz tāfeles uzrakstīti pieci dažādi pirmskaitļi, kas nepārsniedz 100. Par tiem zināms, ka
- pirmais ir 7;
- trešais ir par 4 lielāks nekā piektais;
- skaitlim, kuru iegūst, ceturto sareizinot ar piekto, visi cipari ir vienādi;
- pirmais un ceturtais summā dod pieckāršotu otro.

Atrodi visus šos skaitļus!

2. Caur trijstūra ABC virsotni A novilktā taisne *t* sadala trijstūri divos vienādos trijstūros.
Vai var gadīties, ka AB>AC?

3. Ieraksti tabulas ar izmēriem 4×4 rūtiņas katrā rūtiņā vienu naturālu skaitli tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas divas īpašības:
1) visi ierakstītie skaitļi ir dažādi;
2) jebkuru četru skaitļu, nekādi divi no kuriem neatrodas ne vienā rindā, nedz vienā kolonnā, summa ir 2010.

Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt.

4. Vairākiem bērniem visiem ir vienāds skaits konfekšu. Brīdi pa brīdim kāds no bērniem paņem daļu savu konfekšu un sadala to pārējiem vienādās daļās. Pēc kāda laika izrādījās, ka vienam no bērniem ir 4 konfektes, bet citam – 23 konfektes. Cik pavisam ir bērnu? (Konfektes netiek dalītas daļās, apēstas vai izmestas.)

5. Rindā stāv 2010 rūķīši. Katrs no viņiem vai nu vienmēr saka patiesību (ir *patiesis*), vai arī vienmēr melo (ir *melis*). Uz jautājumu:

“*Vai pa labi no jums esošo patiešu skaits ir lielāks nekā pa kreisi no jums esošo patiešu skaits?*”

ar “jā” atbildēja tieši 100 rūķīši.
Kāds lielākais un kāds – mazākais skaits *patiešu* var būt starp visiem rūķīšiem?

8. klase

1. Starp skaitļiem

$$6 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 4,$$

nemainot to secību, ievieto aritmētisko darbību zīmes („+”, „–”, „·”, „:”) un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu
a) 25,
b) 24.
Vai to var izdarīt?

2. Andris un Juris katrs izvēlas trīs secīgus naturālus skaitļus tā, ka visi seši skaitļi ir atšķirīgi. Katru Andra skaitli sareizināja ar katru Jura skaitli, ieguva deviņus reizinājumus. Pierādi, ka starp iegūtajiem deviņiem skaitļiem vismaz astoņi būs savā starpā atšķirīgi!

3. Astoņstūrī ABCDEFGH visi iekšējie leņķi ir vienādi. Zināms arī, ka ACEG ir kvadrāts. Pierādi, ka BDFH arī ir kvadrāts!

4. Namdarim Mārim ir nepieciešami 3 m, 4 m un 5 m gari baļķīši. Vai Māris var iegūt pa 13 katra veida baļķīšiem, ja viņam ir pieejami tikai:
a) 16 baļķi, kur katra baļķa garums ir 10 m;
b) 12 baļķi, kur katra baļķa garums ir 13 m?

5. Dambretes turnīrā piedalās 7 spēlētāji; katrs ar katru citu spēlē tieši 1 reizi. Par uzvaru spēlētājs saņem 1 punktu, par neizšķirtu $\frac{1}{2}$ punkta, par zaudējumu 0 punktus. Turnīru beidzot, izrādījās, ka nekādiem diviem spēlētājiem nav vienāds punktu daudzums. Kāds ir mazākais iespējamais uzvarētāja iegūtais punktu daudzums? (Par uzvarētāju uzskata to spēlētāju, kam turnīra noslēgumā ir visvairāk punktu.)

Latvijas 37. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

9. klase

1. Naturālus skaitļus no 1 līdz 2N jāsadala N pāros tā, lai katra pāra skaitļu summa būtu pirmskaitlis, pie tam šīm N summām jābūt dažādām. Vai to iespējams izdarīt, ja
a) N = 5;
b) N = 10?

2. Četri atšķirīgi punkti A, B, C un D atrodas uz parabolas $y = x^2$. Nogriežņi AB un CD krustojas punktā E. Pierādi, ka E nevar būt vienlaicīgi gan AB, gan CD viduspunkts!

3. Naturāla skaitļa *n* pozitīvo dalītāju skaitu apzīmējam ar d(*n*). Piemēram, d(1)=1; d(6)=4 utt. Sauksim skaitli n par *apaļīgu*, ja tas dalās ar d(*n*).
a) atrodi piecus *apaļīgus* pāra skaitļus,
b) pierādi, ka *apaļīgu* pāra skaitļu ir bezgalīgi daudz.

4. 2010×2010 rūtiņas lielā kvadrātā, sākot ar apakšējo kreiso rūtiņu, pēc kārtas tiek ierakstīti naturālie skaitļi kā parādīts 10. zīmējumā (katrā rūtiņā ierakstīts viens skaitlis).
Piemēram, skaitlis 19 ierakstīts ceturtajā rindā, trešajā kolonnā.
a) Kurš skaitlis ierakstīts 20. rindā, 10. kolonnā?
b) Kurā rindā un kurā kolonnā atrodas rūtiņa, kurā ierakstīts skaitlis 2010?

...	…						
7.	22	…					
6.	21	…					
5.	11	20	…				
4.	10	12	19	…			
3.	4	9	13	18	…		
2.	3	5	8	14	17	…	
1.	1	2	6	7	15	16	…
	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**...**

10. zīm.

5. Dota tabula ar izmēriem 7×8 rūtiņas (7 rindiņas, 8 kolonnas), tabulas apakšējā labajā stūra rūtiņā atrodas figūriņa *sienāzis*. 11. zīmējumā attēloti *sienāža* iespējamie gājieni. No jebkuras rūtiņas, kurā sienāzis kādā brīdī atrodas, viņš var pārvietoties tādā pašā virzienā par tādu pašu attālumu kā no A uz jebkuru rūtiņu X pie nosacījuma, ka viņš paliek tabulas iekšpusē.
Kurās no pārējām trijām tabulas stūra rūtiņām *sienāzis* var nonākt un kurās – nevar, izpildot tikai atļautos gājienus?

X			
		X	
	A		
X			X

11. zīm.

10. klase

1. Dots, ka x_1, x_2, x_3, x_4 – pozitīvi skaitļi. Pierādi, ka

$$\frac{x_1 + x_3}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 + x_4}{x_2 + x_3} + \frac{x_3 + x_1}{x_3 + x_4} + \frac{x_4 + x_2}{x_4 + x_1} \geq 4\,.$$

2. Kāds ir lielākais punktu skaits, ko var izvēlēties uz riņķa līnijas ar rādiusu 1 tā, lai nebūtu trīs tādu izvēlētu punktu A, B, C, ka visi attālumi AB, AC un BC ir mazāki par 1?

3. Paralelograma ABCD leņķis ABC ir plats. Ja no virsotnēm B un D velk perpendikulus pret paralelograma savstarpēji paralēlajām malām (AD un BC vai CD un AB), tad, neatkarīgi no tā, kurš malu pāris izvēlēts, attālums starp šo perpendikulu krustpunktiem ar diagonāli AC ir 2 centimetri. Aprēķiniet ABCD laukumu, ja zināms, ka diagonāļu AC un BD garumu attiecība ir 7:4.

4. Cik dažādos veidos skaitli 2010 var izteikt kā vismaz divu pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu? Saskaitāmo secība nav svarīga.

5. Sētnieka Bernharda pienākumos ietilpst notīrīt sniegu apkārt privātmājas žogam. Žogs veido izliektu daudzstūri un tā kopgarums ir 2010 metri. Sniegam jābūt notīrītam visos tajos un tikai tajos punktos, kas atrodas ne tālāk kā 1 metru uz ārpusi no žoga.
a) Pierādi, ka teritorijas, kas Bernhardam jānotīra, laukums nav atkarīgs no žoga formas!
b) Cik m^2 liela ir teritorija, kas sētniekam jānotīra?

Latvijas 37. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

11. klase

1. Dotas trīs aritmētiskas progresijas:

(1) 8, 19, 30, 41, 52, …
(2) 8, 21, 34, 47, 60, …
(3) 4, 21, 38, 55, 72, …

a) Atrodi mazāko skaitli, kas pieder visām trim dotajām virknēm!

b) Pierādi, ka ir bezgalīgi daudz tādu skaitļu, kas pieder visām trim dotajām virknēm!

2. Atrisini nevienādību sistēmu

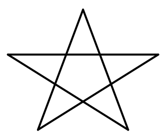
$$\begin{cases} a^2b^2+3\le 4c \\ b^2c^2+3\le 4a \\ c^2a^2+3\le 4b \end{cases}$$

reālos skaitļos.

3. Četrstūris ABCD ievilkts riņķa līnijā. Tā diagonāles AC un BD vienlaikus ir attiecīgi leņķu BAD un CDA bisektrises. BC garums ir a, bet AD garums ir $2a$. Nosaki ABCD laukumu!

4. Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 2010. Divi spēlētāji spēlē sekojošu spēli. Vienā gājienā jāizvēlas vienu no pašlaik uz tāfeles uzrakstītā skaitļa N dalītājiem $d>1$, jāatņem to no N, jānodzēš no tāfeles N un tā vietā jāraksta iegūtā starpība N-d. Gājienus izdara pēc kārtas. Zaudē tas, kurš iegūst 0. Kurš no spēlētājiem, pareizi spēlējot, uzvarēs – tas, kurš sāk, vai tas, kurš izdara otro gājienu?

5. Naturālu skaitli n sauksim par *sakarīgu*, ja eksistē slēgta lauzta līnija ar n posmiem, kura katru savu posmu krusto tieši 2 reizes. Tā piemēram, 5 ir *sakarīgs* skaitlis, skat. 12. zīm. Noskaidro, kādiem naturāliem k skaitlis 2^k ir *sakarīgs*!


12. zīm.

12. klase

1. Atrodi izteiksmes $\sin^{2010}x+\cos^{2010}x$ vislielāko un vismazāko vērtību!

2. Trijstūrī ABC uz malas BC atlikts punkts K, uz malas AC – punkts M. Caur šiem punktiem novilktas taisnes paralēli trijstūra malām: KL||AC un ML||BC. KL krusto malu AB punktā P, ML krusto malu AB punktā Q. Zināms, ka $AQ^2+PB^2=PQ^2$ $\mathbf{AQ^2+PB^2=PQ^2}$
Pierādi, ka $AC\cdot BC=2MC\cdot KC$!

3. Atrodi visus tādus naturālus skaitļus n, ka skaitļi n, $d(n)$ un $d(d(n))$ veido dilstošu aritmētisku progresiju. ($d(x)$ ir skaitļa x naturālo dalītāju skaits.)

4. a, b, c ir trijstūra malu garumi; h_a, h_b, h_c – augstumi atbilstoši pret malām a, b, c šajā trijstūrī. Pierādi:

$$2(ah_a+bh_b+ch_c)\le(ah_b+ah_c+bh_a+bh_c+ch_a+ch_b)!$$

5. Uz galda atrodas n cepumi, kur n – naturāls skaitlis. Divi spēlētāji pamīšus ēd pa x^3 cepumiem, kur x – naturāls skaitlis (dažādiem gājieniem x var būt atšķirīgs). Tas, kam nav ko ēst, zaudē. Pierādi: ir bezgalīgi daudz tādu n, ka, pareizi spēlējot, otrais spēlētājs uzvar!