Latvijas 38. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

5. klase

1. Reizināšanas piemērā ciparus aizstāja ar burtiem un ieguva izteiksmi

$$AB \cdot CD = EEE\ .$$

Atjauno sākotnējo reizināšanas piemēru, ja zināms, ka vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, bet dažādi burti – dažādus ciparus, pie tam ne *A*, ne *C* nav 0. Atrodi visus iespējamos atrisinājumus!

2. Dotās 3×3 rūtiņu tabulas katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto trīs skaitļu summas būtu vienādas. Ir zināmi trīs rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 1. zīm.). Aizpildi pārējās tabulas rūtiņas!

	15	
	11	
		18

1. zīm.

3. Parādi, kā kvadrātu var sadalīt vairākos platleņķa trijstūros!

4. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 12, katru izmantojot tieši vienu reizi, var uzrakstīt pa apli tādā secībā, ka jebkuru divu blakus esošu skaitļu starpība ir

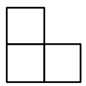
a) 2 vai 3;

b) 3 vai 4?

5. Kvadrātā ar izmēriem 7×7 rūtiņas jāizvieto *n* „*stūrīšus*" (2. zīm. attēlotās figūras) tā, lai tajā vairāk nevarētu ievietot nevienu citu šādu „*stūrīti*". (*Stūrīšu* malām jāiet pa rūtiņu malām. *Stūrīši* var arī būt pagriezti citādāk.)
Parādi, kā to var izdarīt, ja

a) n=9;

b) n=8.



2. zīm.

6. klase

1. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi *a* un *b*, kuriem izpildās vienādība

$$a \cdot b \cdot (a+b) = 20102011?$$

2. Sešdesmit pensionāri katru dienu *sociālajā tīklā* sarakstās savā starpā. Katrs kungs sarakstās ar tieši 17 dāmām, bet katra kundze sarakstās ar tieši 13 kungiem. Cik starp šiem pensionāriem ir kungu un cik – kundžu?

3. Kvadrātā ar izmēriem 8×8 rūtiņas sākotnēji visas rūtiņas ir baltas. Kāds mazākais skaits rūtiņu šajā kvadrātā jānokrāso zaļas, lai tajā nevarētu atrast nevienu pilnībā baltu taisnstūri ar izmēriem 1×3 rūtiņas (novietotu horizontāli vai vertikāli)?

4. 3. zīmējumā dota 3×3 rūtiņu tabula, kurā ierakstīti veseli skaitļi. Vienā gājienā atļauts izvēlēties divas dažādas tabulas rūtiņas – apzīmēsim tajās ierakstītos skaitļus attiecīgi ar *a* un *b*, nodzēst šos divus skaitļus un to vietā ierakstīt: *a* vietā – skaitli $5 \cdot a - 2 \cdot b$, bet *b* vietā – skaitli $5 \cdot b - 2 \cdot a$.
Vai, vairākkārt veicot šādus gājienus, var iegūt tabulu, kāda attēlota 4. zīm.?

0	1	1
-1	1	2
1	0	-1

3. zīm.

2	3	1
-5	3	8
1	7	-5

4. zīm.

5. Betai bija 50 konfektes, bet Almai un Danai bija vienāds konfekšu skaits. Beta pazaudēja vienu konfekti un noskuma. Almai kļuva Betas žēl, un viņa atdeva māsai pusi no savām konfektēm. Beta nomierinājās un nolēma, ka viņai tagad konfekšu ir par daudz un atdeva pusi no savām Danai. Arī Dana izlēma padalīties ar Almu un atdeva pusi no savām konfektēm Almai. Tagad Almai un Betai ir vienāds konfekšu skaits. Cik konfekšu sākumā bija katrai no māsām?

Latvijas 38. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

7. klase

1. Uz tāfeles augošā secībā uzrakstīti seši dažādi pirmskaitļi, kas nepārsniedz 100. Par tiem zināms, ka
- visu skaitļu pēdējie cipari ir atšķirīgi;
- sestais skaitlis ir par 14 lielāks nekā trešais;
- ceturtā skaitļa pirmais cipars ir vienāds ar otrā skaitļa pēdējo ciparu;
- piektā un sestā skaitļa pirmie cipari ir vienādi.

Atrodi visus šos skaitļus!

2. No pilsētas A uz pilsētu B vienlaicīgi izbrauca zaļa un sarkana automašīna. Sarkanā automašīna **visu** ceļu veica ar pastāvīgu ātrumu. Zaļā automašīna **tieši pusi** ceļa veica ar pastāvīgu ātrumu 30 km/h. Vai, otro ceļa pusi veicot ar lielāku ātrumu, zaļā automašīna var panākt sarkano automašīnu un pilsētā B ierasties vienlaicīgi ar to, ja sarkanās automašīnas ātrums bija
a) 40 km/h, **b)** 60 km/h?

3. Atrodi naturālu skaitli, kuru, dalot ar 2010, atlikumā iegūst 13, bet, dalot ar 2011, atlikumā iegūst 3.

4. Kvadrāts sadalīts piecos taisnstūros tā, ka šo taisnstūru malu garumi centimetros ir visi naturālie skaitļi no 1 līdz 10. Parādi vienu piemēru, kā to var izdarīt!

5. Taisne nokrāsota 10 dažādās krāsās. Pierādi, ka uz tās var atrast divus vienas krāsas punktus, starp kuriem attālums centimetros ir vesels skaitlis.

8. klase

1. Starp skaitļiem

$$8\ \ 3\ \ 5\ \ 2,$$

nemainot to secību, ievieto aritmētisko darbību zīmes („+”, „–”, „·”, „:”) un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu
a) 15,
b) 16.

2. Kvadrāta iekšpusē izvēlēts patvaļīgs punkts M, bet K, L, P, R ir kvadrāta malu viduspunkti. Pierādi, ka četrstūris, ko veido nogriežņu MK, ML, MP un MR viduspunkti, ir kvadrāts.

3. Kuba šķautņu viduspunktos ierakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 12, katrs tieši vienu reizi, tā, ka katrā skaldnē ierakstīto četru skaitļu summas būtu vienādas. Nosaki visas iespējamās šo summu vērtības.

4. Leonards izvēlējās patvaļīgu trīsciparu skaitli, pareizināja to ar 2 un tam galā pierakstīja sākotnējo skaitli. Vai viņa jauniegūtais skaitlis noteikti dalās ar **a)** 17; **b)** 23?

5. Jānis un Anna spēlē šādu spēli. Uz tāfeles ir uzrakstīts naturāls skaitlis. Spēlētāji pēc kārtas veic gājienu: no uzrakstītā skaitļa atņem kādu šī skaitļa ciparu (izņemot 0), nodzēš uz tāfeles esošo skaitli un tā vietā uzraksta iegūto starpību. Uzvar tas, kurš pēc sava gājiena iegūst nulli.
Sākumā ir uzrakstīts skaitlis 2011, pirmo gājienu izdara Anna. Kurš no spēlētājiem, pareizi spēlējot, uzvarēs? Apraksti, kā uzvarētājam jārīkojas!

Latvijas 38. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

9. klase

1. Atrodi visus naturālu skaitļu pārus (x, y) tādus, ka $x \neq y$ un

$$\frac{1}{x^2+24}+\frac{1}{y^2+24}=\frac{2}{xy+24}.$$

2. Trijstūrī ABC $\angle ABC = 90°$, bet punkts P atrodas uz malas AB. M un N ir attiecīgi AC un PC viduspunkti. Pierādi, ka $\angle BAC = \angle BMN$.

3. Dots vienādojums $\# x^2 - \# x + \# = 0$. Divi rūķīši spēlē spēli – pirmais nosauc trīs dažādus skaitļus, bet otrais tos kaut kādā secībā saliek „#" vietās. Vai pirmais rūķītis vienmēr var panākt, lai vienādojumam būtu vismaz viena racionāla sakne?

4. Kāds lielākais skaits pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu var būt ar īpašību, ka katrs no tiem ir izsakāms kā divu naturālu skaitļu kvadrātu starpība?

5. Kvadrāta ar izmēriem 8×8 rūtiņas apakšējā labajā stūra rūtiņā atrodas figūriņa *sienāzis*. 5. zīmējumā attēloti *sienāža* iespējamie gājieni. No jebkuras rūtiņas, kurā sienāzis kādā brīdī atrodas, viņš var pārvietoties tādā pašā virzienā par tādu pašu attālumu kā no A uz jebkuru rūtiņu X pie nosacījuma, ka viņš paliek kvadrāta iekšpusē.

			X
	X		
		A	
X			X

5. zīm.

Kurās no pārējām trijām kvadrāta stūra rūtiņām *sienāzis* var nonākt un kurās – nevar, izpildot tikai atļautos gājienus?

10. klase

1. Cik dažādos veidos skaitli 2011 var izteikt kā vismaz divu pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu? Saskaitāmo secība nav svarīga.

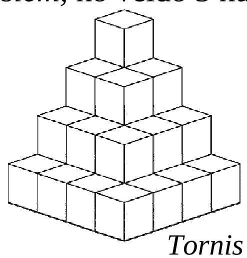
2 Nogriežņa AB garums ir 10 cm. Uz tā kā uz hipotenūzas konstruēti divi taisnleņķa trijstūri ABC un ABD tā, ka C un D atrodas dažādās pusēs no taisnes AB. CD ir leņķa ACB bisektrise. Aprēķini trijstūra ABD laukumu!

3. Atrisini doto vienādojumu sistēmu reālos skaitļos!

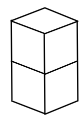
$$\begin{cases}(x-y)^2=(z-2)^2\\(y-z)^2=(x-4)^2\\(z-x)^2=(y-6)^2\end{cases}$$

4. Riņķī ievilkti regulārs 9-stūris un regulārs 10-stūris. To virsotnes sadala riņķa līniju 19 lokos. Pierādīt, ka ir loks, kurš nepārsniedz 2°.

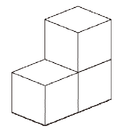
5. *Tornis* ir salikts no vienādiem kubiņiem, kur katra kubiņa izmērs ir $1\times1\times1$: apakšējā slānī ir 16 kubiņi, otrajā slānī ir 9 kubiņi, trešajā slānī 4 kubiņi un augšā – viens kubiņš (skat. 6. zīm.).
Vai šo *torni* var salikt no
a) *klucīšiem* ar izmēru $1\times1\times2$ (skat. 7. zīm.)?
b) *stūrīšiem,* ko veido 3 kubiņi (skat. 8. zīm.)?



Tornis
6. zīm.



Klucītis
7. zīm.



Stūrītis
8. zīm.

Latvijas 38. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

11. klase

1. Dotas trīs aritmētiskas progresijas:

(1) 1, 15, 29, 43, 57, 71,…
(2) 2, 17, 32, 47, 62, 77, …
(3) 3, 19, 35, 51, 67, 83,…

a) Atrodi mazāko skaitli, kas pieder visām trim dotajām virknēm!
b) Pierādi, ka ir bezgalīgi daudz tādu skaitļu, kas pieder visām trim dotajām virknēm!

2. Ap kvadrātu ABCD ir apvilkta riņķa līnija, uz kuras mazākā loka AB ir izvēlēts patvaļīgs punkts P. PC krusto AB un BD attiecīgi punktos M un X; PD krusto AB un AC attiecīgi punktos N un Y. MY un NX krustojas punktā Q; AC un BD krustojas punktā O.
Pierādīt, ka QXOY ir taisnstūris.

3. Cik veidos taisnstūri ar izmēriem 3×12 rūtiņas var sadalīt taisnstūros ar izmēriem 1×3 rūtiņas? (Dalījuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, taisnstūri var būt novietoti gan horizontāli, gan vertikāli.)

4. Atrisināt vienādojumu:

$$\frac{1}{\sqrt{x-2011}+\sqrt{x-2009}}+\frac{1}{\sqrt{x-2009}+\sqrt{x-2007}}+\ldots$$
$$+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+2009}+\sqrt{x+2011}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

5. Vai pa riņķa līniju var izvietot 2011 dažādus naturālus skaitļus tā, ka jebkuriem diviem blakus esošiem skaitļiem lielākā skaitļa attiecība pret mazāko ir pirmskaitlis?

12. klase

1. Naturālie skaitļi no 1 līdz 9 sadalīti trīs grupās pa trim skaitļiem un katrā grupā aprēķināta tajā ietilpstošo skaitļu summa. Vai var būt, ka
a) visas summas ir pirmskaitļi?
b) visas summas ir atšķirīgi pirmskaitļi?

2. Atrodi izteiksmes $\sin^{38} x+\cos^{38} x$ vislielāko un vismazāko vērtību!

3. Uz riņķa līnijas ir izvēlētas divas hordas AC un BD, kas krustojas punktā O, $AO > BO$. MO ir ΔAOB bisektrise, pie tam $AM = DO$. Pierādīt, ka $BM = CO$.

4. Vai telpā var izvietot 6 punktus tā, lai jebkuri trīs no tiem būtu vienādsānu trijstūra virsotnēs un nekādi pieci no tiem neatrastos vienā plaknē?

5. Pierādīt, ka eksistē tādi pozitīvi skaitļi x un y, ka

$$x^y+y^x+x+y<1+\frac{1}{2011}.$$