Latvijas 39. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

5. klase

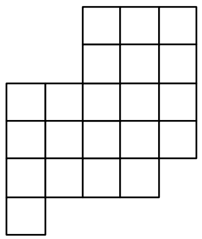
1. Divu naturālu skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari 1, 4, 6 un 9. Vai var gadīties, ka viens skaitlis ir tieši septiņas reizes lielāks nekā otrs skaitlis?

2. Parādi, kā kvadrātu var sadalīt vairākos platleņķa trijstūros. (Trijstūri sauc par platleņķa trijstūri, ja tam ir viens plats leņķis un divi šauri leņķi.)

3. Maisā ir baltas, zaļas un sarkanas pogas (citu krāsu pogu maisā nav). Kādu mazāko skaitu pogu uz labu laimi (tās neredzot) ir jāizņem, lai noteikti būtu paņemtas vai nu 2 baltas, vai 3 zaļas, vai 4 sarkanas pogas.

4. 24-stāvu mājā ir lifts, kuram ir divas pogas. Nospiežot vienu pogu, tas paceļas (ja iespējams) 17 stāvus uz augšu, nospiežot otru – nolaižas 8 stāvus uz leju (ja iespējams). Noskaidro, no kura stāva ar šo liftu var nokļūt uz jebkuru citu stāvu šajā mājā. (Lifts nevar uzbraukt augstāk par 24. stāvu un zemāk par 1. stāvu.)

5. Sadali 1. zīmējumā attēloto figūru trīs vienādās figūrās. (Figūru un tās spoguļattēlu saucam par vienādām figūrām.)



1. zīm.

6. klase

1. Uz tāfeles uzrakstīti desmit skaitļi

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Alfons nodzēš jebkurus divus no tiem (apzīmēsim tos ar a un b) un to vietā uzraksta skaitli, kas vienāds ar $a+b+2$. Šo operāciju viņš atkārto, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis.

Pamato, ka neatkarīgi no secības, kādā Alfons izpilda darbības, beigās tiek iegūts viens un tas pats skaitlis. Kāds tas ir?

2. Sadali kvadrātu divos vienādos **a)** sešstūros, **b)** septiņstūros.

3. Kvadrātā ar izmēriem 8×8 rūtiņas sākumā visas rūtiņas ir baltas. Kāds mazākais skaits rūtiņu šajā kvadrātā jānokrāso zaļas, lai katrā taisnstūrī ar izmēriem 1×3 rūtiņas, ko varētu iezīmēt dotajā kvadrātā (horizontāli vai vertikāli), būtu vismaz viena zaļa rūtiņa?

4. Vai pa apli var uzrakstīt **a)** sešus **b)** septiņus dažādus naturālus skaitļus tā, lai jebkuru divu blakusstāvošu skaitļu summa būtu pirmskaitlis un visi summās iegūtie pirmskaitļi būtu dažādi?

5. Zīmuļi tiek pakoti divu veidu kastītes: pa 7 zīmuļiem kastītē un pa 10 zīmuļiem kastītē. Kāds ir vislielākais zīmuļu skaits, ko nevar **precīzi** sapakot minēto veidu kastītēs (t.i., visām izmantotajām kastītēm jābūt pilnām un neviens zīmulis nedrīkst palikt pāri)?

Latvijas 39. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

7. klase

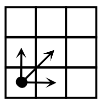
1. Vai var atrast tādus veselus skaitļus a un b, kuriem izpildās vienādība
$$ab(3a+5b)=1234567\ ?$$

2. Doti seši nogriežņi ar garumiem 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm. Cik dažādos veidos no tiem var izvēlēties trīs nogriežņus tā, ka no tiem var izveidot trijstūri (katra trijstūra mala ir viens vesels nogrieznis)?

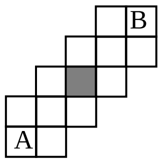
3. No pilsētas A uz pilsētu B vienlaicīgi izbrauca zaļa un sarkana automašīna. Sarkanā automašīna **visu** ceļu veica ar pastāvīgu ātrumu. Zaļā automašīna **tieši pusi** ceļa veica ar pastāvīgu ātrumu 30 km/h. Vai, otro ceļa pusi veicot ar lielāku ātrumu, zaļā automašīna var panākt sarkano automašīnu un pilsētā B ierasties vienlaicīgi ar to, ja sarkanās automašīnas ātrums bija
a) 40 km/h, **b)** 60 km/h?

4. Vai kubu var sagriezt 20 mazākos kubiņos (daži no tiem var būt vienādi, daži atšķirīgi)?

5. Figūriņa *zilonis* var pārvietoties vienu rūtiņu uz augšu, vienu rūtiņu pa labi vai vienu rūtiņu pa diagonāli (skat. 2. zīm.). Cik dažādos veidos *zilonis* no rūtiņas A var nokļūt rūtiņā B (skat. 3. zīm.)? Iekrāsotajā rūtiņā ir šķērslis, tajā *zilonis* nedrīkst iet.



2. zīm.



3. zīm.

8. klase

1. Starp skaitļiem

4 1 5 7,

nemainot to secību, ievieto aritmētisko darbību zīmes („+”, „–”, „·”, „:”) un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu
a) 13,
b) 14.

2. Dots trijstūris ABC un punkts P tā iekšpusē. Pierādi, ka attālumu summa no punkta P līdz dotā trijstūra virsotnēm ir lielāka nekā puse no trijstūra perimetra.

3. Skolas matemātikas olimpiādē piedalījās ne vairāk kā 60 skolēnu. Vidējais punktu skaits, ko ieguva zēni, bija 21,6. Vidējais punktu skaits, ko ieguva meitenes, bija 15. Vidējais punktu skaits, ko ieguva visi skolēni, bija 20. Cik skolēnu piedalījās olimpiādē?

4. Pa apli uzrakstīti 11 veseli skaitļi. Jebkuru trīs pēc kārtas ņemtu skaitļu summa dalās ar 5. Pierādi, ka visi uzrakstītie skaitļi dalās ar 5.

5. Kvadrātveida tabula ar izmēriem 7×7 rūtiņas aizpildīta ar skaitļiem no 1 līdz 7 tā, ka katrā rindā ierakstīti visi skaitļi no 1 līdz 7. Tabula ir simetriska attiecībā pret vienu no diagonālēm. Pierādi, ka šajā diagonālē ierakstīti visi skaitļi no 1 līdz 7.
(Tabulu sauc par simetrisku attiecībā pret diagonāli, ja rūtiņās, kas ir simetriskas pret šo diagonāli ierakstīti vienādi skaitļi.)

Latvijas 39. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

9. klase

1. Atrodi vienu skaitli, kuram ir tieši 12 veseli pozitīvi dalītāji.

2. Trijstūrī ABC $\angle ABC = 90°$, bet punkts P atrodas uz malas AB. Punkti M un N ir attiecīgi nogriežņu AC un PC viduspunkti. Pierādi, ka $\angle BAC = \angle BMN$.

3. Kvadrātvienādojuma $x^2 - 507x + a = 0$ saknes ir p^2 un q, kur p un q ir pirmskaitļi. Aprēķini a skaitlisko vērtību.

4. Uz tāfeles uzrakstītas deviņas zvaigznītes * * * * * * * * *. Jānis ieraksta kādas zvaigznītes vietā jebkuru ciparu no 1 līdz 9. Pēc tam Pēteris jebkuru divu citu zvaigznīšu vietā ieraksta divus ciparus (tie var arī atkārtoties). Pēc tam vēl divas reizes viņi atkārto šo darbību. Pēteris uzvar, ja iegūtais deviņciparu skaitlis dalās ar 37. Vai Pēteris vienmēr var uzvarēt?

5. Dota trapece, kuras pamatu malu garumi ir 3 un 13. Pierādi, ka to nevar sadalīt piecos vienlielos trijstūros.
(Figūras sauc par vienlielām, ja tām ir vienādi laukumi.)

10. klase

1. Pierādi: ja p un $14p^2+1$ ir pirmskaitļi, tad $14p^2-1$ ir naturāla skaitļa kubs.

2 Dots izliekts četrstūris $ABCD$, leņķi DAB un BCD ir plati. Pierādi, ka $BD > AC$.

3. Dots, ka x_1 ir vienādojuma $x^2 + px + q = 0$ sakne, bet x_2 ir vienādojuma $-x^2 + px + q = 0$ sakne. Pierādi, ka vienādojumam $\frac{1}{3}x^2 + px + q = 0$ noteikti ir sakne x_3, kas atrodas starp x_1 un x_2 (t.i., $x_1 \le x_3 \le x_2$ vai $x_2 \le x_3 \le x_1$).

4. Vienā un tajā pašā riņķa līnijā ievilkts regulārs 9-stūris un regulārs 10-stūris. To virsotnes sadala riņķa līniju 19 lokos. Pierādi, ka ir loks, kurš nepārsniedz 2°.

5. Dotas divas paralēlas taisnes. Uz vienas no tām atzīmēti 10 zaļi punkti, uz otras – 10 sarkani punkti. Kādu lielāko skaitu nogriežņu, kuriem viens galapunkts ir zaļš, bet otrs – sarkans, var novilkt tā, lai tie nekrustotos?
(Saka, ka nogriežņi krustojas, ja tiem ir kopīgs iekšējais punkts, t.i., ja tiem ir kopīgs tikai galapunkts, tie nekrustojas.)

Latvijas 39. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

11. klase

1. Pierādi, ka nav tāda naturāla skaitļa n, ka skaitlis n^2-3n-1 dalās ar 169.

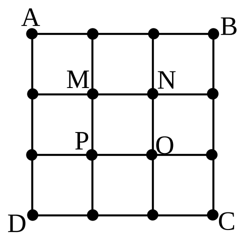
2. Punkti A, B, C atrodas uz vienas taisnes, bet A_1, B_1, C_1 – uz citas taisnes. Pierādi: ja AB_1 paralēls A_1B un AC_1 paralēls A_1C, tad BC_1 paralēls B_1C.

3. Atrisini vienādojumu:

$$\frac{1}{\sqrt{x-2012}+\sqrt{x-2010}}+\frac{1}{\sqrt{x-2010}+\sqrt{x-2008}}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+2010}+\sqrt{x+2012}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4. Pierādi, ka izliektu 2012-stūri nevar sadalīt 200 izliektos 12-stūros.

5. Plaknē doti 16 punkti, kas izvietoti kvadrātiska režģa veidā kā parādīts 4. zīm. Taisnstūri sauksim par *labu*, ja tā virsotnes atrodas režģa punktos, malas ir paralēlas režģa līnijām un **nav tā**, ka starp taisnstūra virsotnēm ir gan viens no četriem režģa stūriem (punkti A, B, C, D), gan viens no četriem režģa punktiem, kas atrodas režģa iekšienē (punkti M, N, O, P).



4. zīm.

Kāds ir lielākais režģa punktu skaits, ko var atzīmēt tā, lai nebūtu *laba* taisnstūra, kuram visas virsotnes ir atzīmētie punkti?

12. klase

1. Skaitļi A un B ir divi dažādi 7-ciparu skaitļi, kuri katrs satur visus ciparus no 1 līdz 7. Pierādi, ka A nedalās ar B.

2. Caur trijstūra ABC malas AB iekšēju punktu P novilkta taisne, kas ir paralēla BC un krusto ΔABC apvilkto riņķa līniju punktos M un N (A, M un B atrodas uz riņķa līnijas tieši šādā secībā). MC krusto AB punktā Q. Pierādi, ka NQ iet caur trijstūriem AMQ un APN apvilkto riņķa līniju krustpunktu.

3. Atrisini vienādojumu $\lg x \cdot \lg(4-x)=\frac{1}{4}$.

4. Vai telpā var izvietot **a)** 6 punktus, **b)** 7 punktus tā, lai jebkuri trīs no tiem būtu vienādsānu trijstūra virsotnēs un nekādi pieci no tiem neatrastos vienā plaknē?

5. Klasē ir 17 skolēni. Katru dienu daži no viņiem (vismaz viens) tiek izsaukti pie tāfeles. Kāds ir mazākais dienu skaits, pēc kurām ir iespējams, ka katriem diviem klases skolniekiem ir bijusi diena, kad viens no viņiem ir izsaukts pie tāfeles, bet otrs nē?