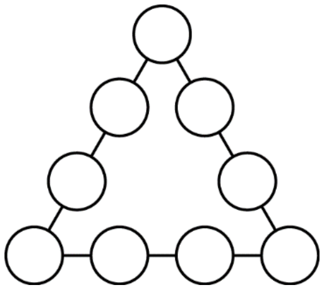
Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

5. klase

1. Velosipēdists Juris plkst. 7:30 izbrauca no Cēsīm uz Madonu, bet velosipēdists Armands plkst. 8:00 izbrauca no Madonas uz Cēsīm. Juris brauca ar ātrumu 20 km/h, bet Armands – ar ātrumu 10 km/h.
a) Cikos katrs braucējs nokļūs galapunktā, ja attālums starp Cēsīm un Madonu ir 90 km?
b) Cikos attālums starp abiem velosipēdistiem būs 30 km?

2. Katrā tukšajā aplītī (skat. 1. att.) ieraksti vienu naturālu skaitli tā, lai aplīšos būtu ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 9 un lai skaitļu summa uz katras trijstūra malas būtu viena un tā pati!



1. att.

3. **a)** Vai var uz lapas atlikt sešus punktus un savienot tos ar nogriežņiem tā, lai tie nekrustojas un katrs punkts ir savienots ar tieši četriem citiem punktiem?
b) Vai var uz lapas atlikt septiņus punktus un savienot tos ar nogriežņiem tā, lai tie nekrustojas un katrs punkts ir savienots ar tieši trim citiem punktiem?

4. Pareizā reizināšanas piemērā $AH \cdot E = UHH$ vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi cipari – ar dažādiem burtiem. Kāds cipars atbilst katram burtam, ja izmantoti tikai cipari 2, 4, 6 un 8? Atrodi visus variantus un pamato, ka citu nav!

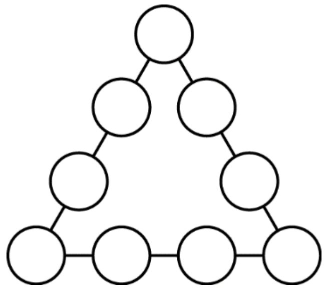
5. Ja mēneša 13. datums ir piektdiena, tad saka, ka tā ir melnā piektdiena.
a) Kāds lielākais skaits melno piektdienu var būt vienā gadā?
b) Vai iespējams, ka gada laikā nav nevienas melnās piektdienas?

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

5. klase

1. Velosipēdists Juris plkst. 7:30 izbrauca no Cēsīm uz Madonu, bet velosipēdists Armands plkst. 8:00 izbrauca no Madonas uz Cēsīm. Juris brauca ar ātrumu 20 km/h, bet Armands – ar ātrumu 10 km/h.
a) Cikos katrs braucējs nokļūs galapunktā, ja attālums starp Cēsīm un Madonu ir 90 km?
b) Cikos attālums starp abiem velosipēdistiem būs 30 km?

2. Katrā tukšajā aplītī (skat. 1. att.) ieraksti vienu naturālu skaitli tā, lai aplīšos būtu ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 9 un lai skaitļu summa uz katras trijstūra malas būtu viena un tā pati!



1. att.

3. **a)** Vai var uz lapas atlikt sešus punktus un savienot tos ar nogriežņiem tā, lai tie nekrustojas un katrs punkts ir savienots ar tieši četriem citiem punktiem?
b) Vai var uz lapas atlikt septiņus punktus un savienot tos ar nogriežņiem tā, lai tie nekrustojas un katrs punkts ir savienots ar tieši trim citiem punktiem?

4. Pareizā reizināšanas piemērā $AH \cdot E = UHH$ vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi cipari – ar dažādiem burtiem. Kāds cipars atbilst katram burtam, ja izmantoti tikai cipari 2, 4, 6 un 8? Atrodi visus variantus un pamato, ka citu nav!

5. Ja mēneša 13. datums ir piektdiena, tad saka, ka tā ir melnā piektdiena.
a) Kāds lielākais skaits melno piektdienu var būt vienā gadā?
b) Vai iespējams, ka gada laikā nav nevienas melnās piektdienas?

2017. gada 23. aprīlis
nms.lu.lv

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

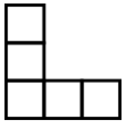
6. klase

1. Vienmērīgi soļojot pie sava drauga, Agris nolēma noteikt attālumu no savas mājas līdz drauga mājai. Pusi ceļa Agris soļus skaitīja pa pāriem, bet otru pusi – pa trijniekiem, turklāt pāru iznāca par 250 vairāk nekā trijnieku. Cik soļu ir starp draugu mājām?

2. Katrā tukšajā rūtiņā (skat. 1. att.) ieraksti vienu naturālu skaitli tā, lai tabulā būtu ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 16 un lai skaitļu summa visās rindās, visās kolonnās un abās diagonālēs būtu viena un tā pati!

	11		5
6	13	12	
		7	
15			10

1. att.



2. att.

3. Kāds mazākais skaits stūrīšu (skat. 2. att.) jāizgriež no 6×6 rūtiņu laukuma, lai no tā vairs nevarētu izgriezt nevienu šādu stūrīti? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu līnijām un stūrīši var būt pagriezti.

4. Ap apaļu galdu apsēdās 13 bērni. Tie nolēma, ka zēni vienmēr melos meitenēm, bet teiks patiesību zēniem, un meitenes vienmēr melos zēniem, bet teiks patiesību meitenēm. Viens no bērniem savam blakussēdētājam, kas sēž no viņa pa kreisi, teica: “Pie šī galda sēž vairāk zēnu nekā meiteņu.” Tad šis blakussēdētājs savam kreisajam blakussēdētājam teica: “Pie šī galda sēž vairāk meiteņu nekā zēnu.” Tā viņi pamīšus turpināja – viens teica, ka zēnu ir vairāk nekā meiteņu, bet nākamais, ka meiteņu ir vairāk nekā zēnu, kamēr pēdējais (trīspadsmitais) bērns teica pirmajam: “Pie šī galda sēž vairāk zēnu nekā meiteņu.” Cik zēnu sēž pie apaļā galda?

5. Atrodi visus tādus naturālus četrciparu skaitļus, kuru cipari ir dažādi un kas dalās ar visiem skaitļiem no 1 līdz 10 bez atlikuma!

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

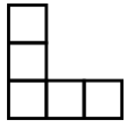
6. klase

1. Vienmērīgi soļojot pie sava drauga, Agris nolēma noteikt attālumu no savas mājas līdz drauga mājai. Pusi ceļa Agris soļus skaitīja pa pāriem, bet otru pusi – pa trijniekiem, turklāt pāru iznāca par 250 vairāk nekā trijnieku. Cik soļu ir starp draugu mājām?

2. Katrā tukšajā rūtiņā (skat. 1. att.) ieraksti vienu naturālu skaitli tā, lai tabulā būtu ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 16 un lai skaitļu summa visās rindās, visās kolonnās un abās diagonālēs būtu viena un tā pati!

	11		5
6	13	12	
		7	
15			10

1. att.



2. att.

3. Kāds mazākais skaits stūrīšu (skat. 2. att.) jāizgriež no 6×6 rūtiņu laukuma, lai no tā vairs nevarētu izgriezt nevienu šādu stūrīti? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu līnijām un stūrīši var būt pagriezti.

4. Ap apaļu galdu apsēdās 13 bērni. Tie nolēma, ka zēni vienmēr melos meitenēm, bet teiks patiesību zēniem, un meitenes vienmēr melos zēniem, bet teiks patiesību meitenēm. Viens no bērniem savam blakussēdētājam, kas sēž no viņa pa kreisi, teica: “Pie šī galda sēž vairāk zēnu nekā meiteņu.” Tad šis blakussēdētājs savam kreisajam blakussēdētājam teica: “Pie šī galda sēž vairāk meiteņu nekā zēnu.” Tā viņi pamīšus turpināja – viens teica, ka zēnu ir vairāk nekā meiteņu, bet nākamais, ka meiteņu ir vairāk nekā zēnu, kamēr pēdējais (trīspadsmitais) bērns teica pirmajam: “Pie šī galda sēž vairāk zēnu nekā meiteņu.” Cik zēnu sēž pie apaļā galda?

5. Atrodi visus tādus naturālus četrciparu skaitļus, kuru cipari ir dažādi un kas dalās ar visiem skaitļiem no 1 līdz 10 bez atlikuma!

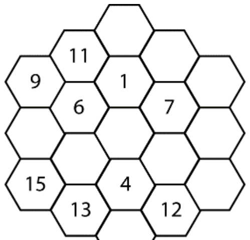
2017. gada 23. aprīlis
nms.lu.lv

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

7. klase

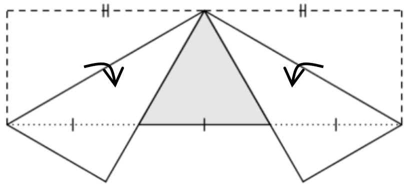
1. Automašīna 2 stundās nobrauca tikpat, cik velosipēdists 5 stundās un 20 minūtēs. Kāds ir katra transporta līdzekļa ātrums, ja velosipēdists brauc par 45 km/h lēnāk nekā automašīna un abi transporta līdzekļi pārvietojas ar nemainīgu ātrumu?

2. Katrā tukšajā lodziņā (skat. 1. att.) ieraksti vienu naturālu skaitli tā, lai figūrā būtu ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 19 un lai skaitļu summa visās joslās būtu viena un tā pati!
Piezīme. Visas iespējamās joslas skat. 2. att., tās var būt pagrieztas.



1. att.

2. att.



3. att.

3. Divus taisnstūra lapas stūrus nolocīja tā, kā parādīts 3. att. Izrādījās, ka lapas apakšējā mala tika sadalīta trīs vienāda garuma nogriežņos un augšējā mala – divos vienāda garuma nogriežņos. Pierādīt, ka iekrāsotais trijstūris ir vienādmalu!

4. Uz galda stāv divas kastes A un B. Sākumā kastē A ir melnas un baltas bumbiņas, bet kastē B ir tikai melnas bumbiņas. Bumbiņu skaits abās kastēs ir vienāds. Anna no kastes A uz labu laimi izņem divas bumbiņas:

- ja tās ir vienādā krāsā, tad tās abas ieliek kastē B, un vienu melnu bumbiņu no kastes B ieliek kastē A;
- ja tās ir dažādās krāsās, tad balto bumbiņu ieliek atpakaļ kastē A, bet melno – kastē B.

Tā turpina, kamēr kastē A paliek tieši viena bumbiņa. Kādā krāsā būs pēdējā bumbiņa, kas palikusi kastē A, ja sākumā kastē A ir **a)** 2017 baltas un 2017 melnas bumbiņas; **b)** 2016 baltas un 2018 melnas bumbiņas?

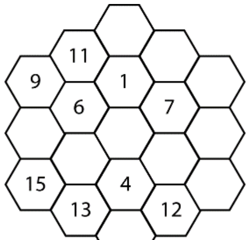
5. Cik ir tādu naturālu divciparu skaitļu, kuriem ciparu reizinājums ir tieši divas reizes mazāks nekā pats skaitlis?

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

7. klase

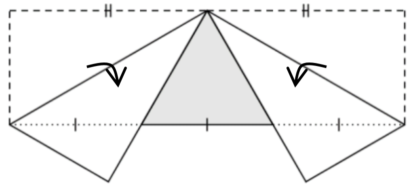
1. Automašīna 2 stundās nobrauca tikpat, cik velosipēdists 5 stundās un 20 minūtēs. Kāds ir katra transporta līdzekļa ātrums, ja velosipēdists brauc par 45 km/h lēnāk nekā automašīna un abi transporta līdzekļi pārvietojas ar nemainīgu ātrumu?

2. Katrā tukšajā lodziņā (skat. 1. att.) ieraksti vienu naturālu skaitli tā, lai figūrā būtu ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 19 un lai skaitļu summa visās joslās būtu viena un tā pati!
Piezīme. Visas iespējamās joslas skat. 2. att., tās var būt pagrieztas.



1. att.

2. att.



3. att.

3. Divus taisnstūra lapas stūrus nolocīja tā, kā parādīts 3. att. Izrādījās, ka lapas apakšējā mala tika sadalīta trīs vienāda garuma nogriežņos un augšējā mala – divos vienāda garuma nogriežņos. Pierādīt, ka iekrāsotais trijstūris ir vienādmalu!

4. Uz galda stāv divas kastes A un B. Sākumā kastē A ir melnas un baltas bumbiņas, bet kastē B ir tikai melnas bumbiņas. Bumbiņu skaits abās kastēs ir vienāds. Anna no kastes A uz labu laimi izņem divas bumbiņas:

- ja tās ir vienādā krāsā, tad tās abas ieliek kastē B, un vienu melnu bumbiņu no kastes B ieliek kastē A;
- ja tās ir dažādās krāsās, tad balto bumbiņu ieliek atpakaļ kastē A, bet melno – kastē B.

Tā turpina, kamēr kastē A paliek tieši viena bumbiņa. Kādā krāsā būs pēdējā bumbiņa, kas palikusi kastē A, ja sākumā kastē A ir a) 2017 baltas un 2017 melnas bumbiņas; b) 2016 baltas un 2018 melnas bumbiņas?

5. Cik ir tādu naturālu divciparu skaitļu, kuriem ciparu reizinājums ir tieši divas reizes mazāks nekā pats skaitlis?

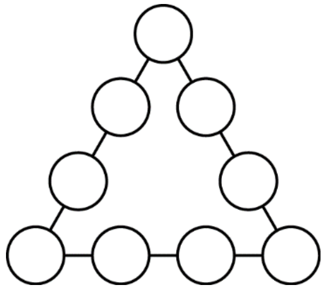
2017. gada 23. aprīlis
nms.lu.lv

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

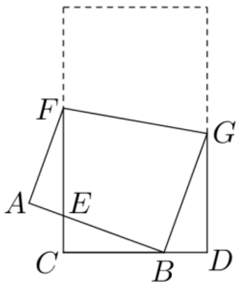
8. klase

1. Vai uz taisnes $y = 72 - 5x$ ir punkts, kura **a)** abscisa un ordināta ir vienādas; **b)** ordināta ir divas reizes lielāka nekā abscisa?

2. Vai katrā tukšajā aplītī (skat. 1. att.) var ierakstīt vienu naturālu skaitli tā, lai aplīšos būtu ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 9 un lai skaitļu summa uz katras trijstūra malas būtu **a)** 22; **b)** 23?



1. att.



2. att.

3. Taisnstūrveida papīra lapu pārlocīja tā, ka pārlocītais lapas stūris atrodas uz pretējās malas (skat. 2. att.). Trijstūri AFE un CBE ir vienādi un $CB = 7$ cm, bet $BD = 3$ cm. Kādi ir sākotnējās papīra lapas malu garumi?

4. Doti pieci pēc izskata vienādi atsvari. Katra atsvara masa izsakāma veselā skaitā gramu, turklāt šie skaitļi ir pēc kārtas esoši naturāli skaitļi. Atsvaru masu salīdzināšanai atļauts izmantot sviru svarus, kur katrā svaru kausā drīkst likt tieši divus atsvarus. Vai iespējams **a)** noteikt visvieglāko un vissmagāko no atsvariem; **b)** sarindot visus atsvarus pēc kārtas no smagākā līdz vieglākajam?
Piezīme. Ar sviru svariem nevar noteikt, tieši par cik gramiem viens svaru kauss ir smagāks nekā otrs.

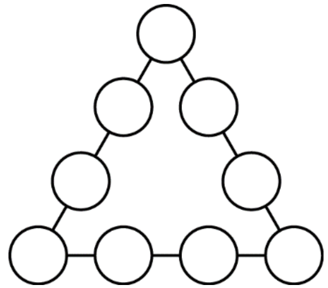
5. Vai var atrast tādu desmitciparu skaitli, kas ir vienāds ar visu savu ciparu reizinājumu?

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

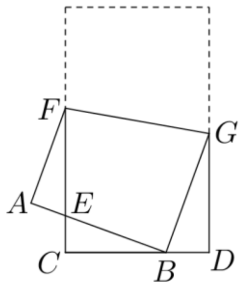
8. klase

1. Vai uz taisnes $y = 72 - 5x$ ir punkts, kura a) abscisa un ordināta ir vienādas; b) ordināta ir divas reizes lielāka nekā abscisa?

2. Vai katrā tukšajā aplītī (skat. 1. att.) var ierakstīt vienu naturālu skaitli tā, lai aplīšos būtu ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 9 un lai skaitļu summa uz katras trijstūra malas būtu a) 22; b) 23?



1. att.



2. att.

3. Taisnstūrveida papīra lapu pārlocīja tā, ka pārlocītais lapas stūris atrodas uz pretējās malas (skat. 2. att.). Trijstūri AFE un CBE ir vienādi un $CB = 7$ cm, bet $BD = 3$ cm. Kādi ir sākotnējās papīra lapas malu garumi?

4. Doti pieci pēc izskata vienādi atsvari. Katra atsvara masa izsakāma veselā skaitā gramu, turklāt šie skaitļi ir pēc kārtas esoši naturāli skaitļi. Atsvaru masu salīdzināšanai atļauts izmantot sviru svarus, kur katrā svaru kausā drīkst likt tieši divus atsvarus. Vai iespējams a) noteikt visvieglāko un vissmagāko no atsvariem; b) sarindot visus atsvarus pēc kārtas no smagākā līdz vieglākajam?
Piezīme. Ar sviru svariem nevar noteikt, tieši par cik gramiem viens svaru kauss ir smagāks nekā otrs.

5. Vai var atrast tādu desmitciparu skaitli, kas ir vienāds ar visu savu ciparu reizinājumu?

2017. gada 23. aprīlis
nms.lu.lv

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

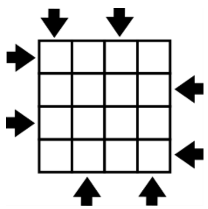
9. klase

1. Vai uz parabolas $y = x^2 + 6x + 6$ ir punkts, kura **a)** abscisa un ordināta ir vienādas; **b)** ordināta ir trīs reizes lielāka nekā abscisa?

2. Pierādīt, ka $x^6 + y^6 + \frac{2}{x^3y^3} - 4 \geq 0$, ja $x > 0$ un $y > 0$.

3. Dots trijstūris ABC, kuram $AB > AC > BC$. Virsotnes A blakusleņķa bisektrise krusto malas BC pagarinājumu punktā D, bet virsotnes C blakusleņķa bisektrise krusto malas AB pagarinājumu punktā E. Zināms, ka $AD = AC = CE$. Aprēķināt trijstūra ABC leņķus!

4. **a)** Pierādīt, ka dotajā 4×4 rūtiņu laukumā (skat. 1. att.) nevar ierakstīt 16 dažādus naturālus skaitļus tā, lai katrā rūtiņā būtu ierakstīts viens skaitlis un katrā rindā un katrā kolonnā skaitļi pieaugtu bultiņas norādītajā virzienā.
b) Kāds mazākais bultiņu skaits jāapvērš pretējā virzienā, lai skaitļus varētu izvietot saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem?



1. att.

5. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^3 + (x+1)^3 = (x+3)^3 + 1$.

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

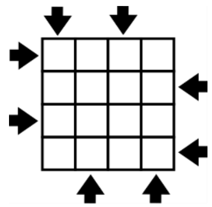
9. klase

1. Vai uz parabolas $y = x^2 + 6x + 6$ ir punkts, kura **a)** abscisa un ordināta ir vienādas; **b)** ordināta ir trīs reizes lielāka nekā abscisa?

2. Pierādīt, ka $x^6 + y^6 + \frac{2}{x^3y^3} - 4 \geq 0$, ja > 0 un $y > 0$.

3. Dots trijstūris ABC, kuram $AB > AC > BC$. Virsotnes A blakusleņķa bisektrise krusto malas BC pagarinājumu punktā D, bet virsotnes C blakusleņķa bisektrise krusto malas AB pagarinājumu punktā E. Zināms, ka $AD = AC = CE$. Aprēķināt trijstūra ABC leņķus!

4. **a)** Pierādīt, ka dotajā 4×4 rūtiņu laukumā (skat. 1. att.) nevar ierakstīt 16 dažādus naturālus skaitļus tā, lai katrā rūtiņā būtu ierakstīts viens skaitlis un katrā rindā un katrā kolonnā skaitļi pieaugtu bultiņas norādītajā virzienā.
b) Kāds mazākais bultiņu skaits jāapvērš pretējā virzienā, lai skaitļus varētu izvietot saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem?



1. att.

5. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^3 + (x+1)^3 = (x+3)^3 + 1$.

2017. gada 23. aprīlis
nms.lu.lv

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

10. klase

1. Noteikt tās parametra a vērtības, ar kurām vienādojumam

$$(x-2a)(x^2-(a+1)x+a)=0$$

ir trīs dažādas saknes, kuras ir aritmētiskās progresijas trīs pēc kārtas ņemti locekļi!

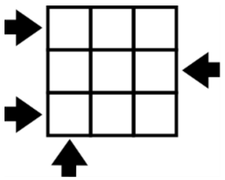
2. Pierādīt, ka visiem pozitīviem skaitļiem a un b izpildās

$$\left(\frac{3a}{b}+1\right)\left(\frac{3b}{a}+1\right)\geq 16$$

3. Taisnstūrī $ABCD$ caur virsotni A novilkta riņķa līnija, kas nogriežņus AB, AC un AD krusto attiecīgi punktos P, Q un R. Pierādīt, ka

$$AB\cdot AP+AD\cdot AR=AC\cdot AQ!$$

4. Dotajā 3×3 rūtiņu tabulā (skat. 1. att.) ierakstīti deviņi dažādi naturāli skaitļi tā, ka katrā rūtiņā ir ierakstīts viens skaitlis un katrā rindā un katrā kolonnā skaitļi vai nu pieaug, vai dilst. Bultiņas norāda skaitļu pieaugšanas virzienu atbilstošajā rindā vai kolonnā. Pierādīt, ka arī divām atlikušajām vertikālajām bultiņām, kas nav iezīmētas, jābūt vērstām uz augšu!



1. att.

5. Pierādīt, ja no trim naturāliem skaitļiem n; $n+11$ un $n+22$ divi ir pirmskaitļi, tad trešais skaitlis dalās ar 6.

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

10. klase

1. Noteikt tās parametra a vērtības, ar kurām vienādojumam

$$(x-2a)(x^2-(a+1)x+a)=0$$

ir trīs dažādas saknes, kuras ir aritmētiskās progresijas trīs pēc kārtas ņemti locekļi!

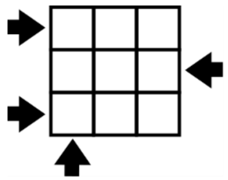
2. Pierādīt, ka visiem pozitīviem skaitļiem a un b izpildās

$$\left(\frac{3a}{b}+1\right)\left(\frac{3b}{a}+1\right)\geq 16$$

3. Taisnstūrī $ABCD$ caur virsotni A novilkta riņķa līnija, kas nogriežņus AB, AC un AD krusto attiecīgi punktos P, Q un R. Pierādīt, ka

$$AB\cdot AP+AD\cdot AR=AC\cdot AQ!$$

4. Dotajā 3×3 rūtiņu tabulā (skat. 1. att.) ierakstīti deviņi dažādi naturāli skaitļi tā, ka katrā rūtiņā ir ierakstīts viens skaitlis un katrā rindā un katrā kolonnā skaitļi vai nu pieaug, vai dilst. Bultiņas norāda skaitļu pieaugšanas virzienu atbilstošajā rindā vai kolonnā. Pierādīt, ka arī divām atlikušajām vertikālajām bultiņām, kas nav iezīmētas, jābūt vērstām uz augšu!



1. att.

5. Pierādīt, ja no trim naturāliem skaitļiem n; $n+11$ un $n+22$ divi ir pirmskaitļi, tad trešais skaitlis dalās ar 6.

2017. gada 23. aprīlis
nms.lu.lv

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

11. klase

1. Atrisināt nevienādību $2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0$.

2. Doti tādi četri pozitīvi skaitļi a_1, a_2, a_3 un a_4, ka $a_1 a_3 = a_2 a_4 = 2017$. Kāda ir mazākā iespējamā izteiksmes $(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)$ vērtība?

3. Taisnleņķa trijstūrī ABC, kura taisnais leņķis ir B, uz hipotenūzas AC izvēlēts patvaļīgs punkts D, kas nav tās viduspunkts. Leņķa ADB bisektrise krusto malas AB vidusperpendikulu punktā P, leņķa BDC bisektrise krusto malas BC vidusperpendikulu punktā Q. Pierādīt, ka punkti P, B un Q atrodas uz vienas taisnes!

4. Doti pieci pēc izskata vienādi atsvari, bet ar dažādām masām. Doti arī tādi sviras svari, kuru katrā kausā drīkst likt tieši divus atsvarus. Vai ar patvaļīgi daudzām svēršanām vienmēr iespējams noteikt, kurš atsvars ir vissmagākais?

5. Doti naturāli skaitļi k un n, $k \le n$.
a) Vai noteikti C_n^k dalās ar n, ja k un n ir savstarpēji pirmskaitļi?
b) Vai k un n noteikti ir savstarpēji pirmskaitļi, ja C_n^k dalās ar n?
Piezīme. Ar C_n^k apzīmēts kombināciju skaits no n elementiem pa k elementiem.

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

11. klase

1. Atrisināt nevienādību $2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0$.

2. Doti tādi četri pozitīvi skaitļi a_1, a_2, a_3 un a_4, ka $a_1 a_3 = a_2 a_4 = 2017$. Kāda ir mazākā iespējamā izteiksmes $(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)$ vērtība?

3. Taisnleņķa trijstūrī ABC, kura taisnais leņķis ir B, uz hipotenūzas AC izvēlēts patvaļīgs punkts D, kas nav tās viduspunkts. Leņķa ADB bisektrise krusto malas AB vidusperpendikulu punktā P, leņķa BDC bisektrise krusto malas BC vidusperpendikulu punktā Q. Pierādīt, ka punkti P, B un Q atrodas uz vienas taisnes!

4. Doti pieci pēc izskata vienādi atsvari, bet ar dažādām masām. Doti arī tādi sviras svari, kuru katrā kausā drīkst likt tieši divus atsvarus. Vai ar patvaļīgi daudzām svēršanām vienmēr iespējams noteikt, kurš atsvars ir vissmagākais?

5. Doti naturāli skaitļi k un n, $k \le n$.
a) Vai noteikti C_n^k dalās ar n, ja k un n ir savstarpēji pirmskaitļi?
b) Vai k un n noteikti ir savstarpēji pirmskaitļi, ja C_n^k dalās ar n?
Piezīme. Ar C_n^k apzīmēts kombināciju skaits no n elementiem pa k elementiem.

2017. gada 23. aprīlis
nms.lu.lv

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

12. klase

1. Vai eksistē tāda reāla parametra a vērtība, ka vienādojumam $\cos x = ax^2$ ir tieši 2017 dažādas reālas saknes?

2. Pierādīt, ka $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{16}{c} \geq \frac{49}{a+b+c}$, ja a, b, c ir pozitīvi skaitļi!

3. Šaurleņķu trijstūrī ABC taisne, kas vilkta paralēli malai BC krusto malu AB punktā F, bet malu AC – punktā E. Pierādīt, ka riņķa līniju, kas konstruētas uz nogriežņiem BE un CF kā diametriem, krustpunkti atrodas uz trijstūra augstuma (vai tā pagarinājuma), kas no A vilkts pret malu BC.

4. Astoņi tenisisti piedalās turnīrā, kurā katram ar katru paredzēts izspēlēt vienu spēli. Turnīra laikā ir iestājies tāds brīdis, kad katrs tenisists ir nospēlējis tieši trīs spēles. Pierādīt, ka visus astoņus tenisistus var sadalīt četros pāros tā, ka nevienā pārī tenisisti vēl nav savā starpā nospēlējuši turnīrā paredzēto spēli!

5. **a)** Doti naturāli skaitļi no 1 līdz 11. Izvēlieties deviņus no tiem un ierakstiet tos 3×3 rūtiņu tabulā tā, lai katrā rindā, katrā kolonā un abās galvenajās diagonālēs ierakstīto skaitļu summa dalās ar 7. **b)** Vai to pašu ir iespējams izdarīt, ja doti naturāli skaitļi no 1 līdz 10?

Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

12. klase

1. Vai eksistē tāda reāla parametra a vērtība, ka vienādojumam $\cos x = ax^2$ ir tieši 2017 dažādas reālas saknes?

2. Pierādīt, ka $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{16}{c} \geq \frac{49}{a+b+c}$, ja a, b, c ir pozitīvi skaitļi!

3. Šaurleņķu trijstūrī ABC taisne, kas vilkta paralēli malai BC krusto malu AB punktā F, bet malu AC – punktā E. Pierādīt, ka riņķa līniju, kas konstruētas uz nogriežņiem BE un CF kā diametriem, krustpunkti atrodas uz trijstūra augstuma (vai tā pagarinājuma), kas no A vilkts pret malu BC.

4. Astoņi tenisisti piedalās turnīrā, kurā katram ar katru paredzēts izspēlēt vienu spēli. Turnīra laikā ir iestājies tāds brīdis, kad katrs tenisists ir nospēlējis tieši trīs spēles. Pierādīt, ka visus astoņus tenisistus var sadalīt četros pāros tā, ka nevienā pārī tenisisti vēl nav savā starpā nospēlējuši turnīrā paredzēto spēli!

5. **a)** Doti naturāli skaitļi no 1 līdz 11. Izvēlieties deviņus no tiem un ierakstiet tos 3×3 rūtiņu tabulā tā, lai katrā rindā, katrā kolonā un abās galvenajās diagonālēs ierakstīto skaitļu summa dalās ar 7. **b)** Vai to pašu ir iespējams izdarīt, ja doti naturāli skaitļi no 1 līdz 10?

2017. gada 23. aprīlis
nms.lu.lv