

Periodiskas virknes

Teorija un piemēri, gatavojoties Atklātajai matemātikas olimpiādei 2017./2018. mācību gadā

Olimpiādes uzdevumu komplektā katrai klašu grupai tiek iekļauts algebras, ģeometrijas, kombinatorikas un skaitļu teorijas uzdevums. Šogad Atklātajā matemātikas olimpiādē viens uzdevums 5.-8. klasei būs par tēmu "Periodiskas virknes".

Apskatīsim dažus piemērus.

Piemēri

- 1) Jokainajā lauku sētā aitas un cūkas sastājušās garā rindā pēc šāda likuma (ik pēc 3 dzīvniekiem secība atkārtojas):



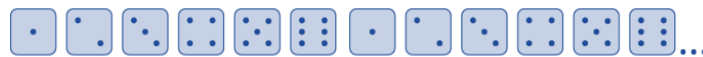
Kas atrodas šīs rindas a) 21. vietā; b) 100. vietā; c) 2018. vietā?

Atrisinājums. a) Pamatosim, ka rindas 21. vietā atrodas cūka. Tā kā secība atkārtojas ik pēc 3 dzīvniekiem, tad tajās rindas vietās, kuru kārtas numurs dalās ar 3, atrodas cūkas.

b) Pamatosim, ka rindas 100. vietā atrodas aita. Tā kā secība atkārtojas ik pēc 3 dzīvniekiem un $100 = 3 \cdot 33 + 1$, tad rindas 100. vietā atrodas tāds pats dzīvnieks, kā rindas 1. vietā, tas ir, aita.

c) Pamatosim, ka rindas 2018. vietā atrodas cūka. Tā kā secība atkārtojas ik pēc 3 dzīvniekiem un $2018 = 3 \cdot 672 + 2$, tad rindas 2018. vietā atrodas tāds pats dzīvnieks, kā rindas 2. vietā, tas ir, cūka.

- 2) Metamie kauliņi novietoti rindā tā, ka ik pēc sešiem kauliņiem redzamo punktiņu secība atkārtojas:



Cik punktiņu būs redzami uz šīs rindas 605. kauliņa?

Atrisinājums. Pamatosim, ka uz 605. kauliņa būs redzami 5 punktiņi. Tā kā secība atkārtojas ik pēc 6 kauliņiem un $605 = 6 \cdot 100 + 5$, tad uz 605. kauliņa būs redzami tikpat punktiņi, cik uz 5. kauliņa, tas ir, 5.

- 3) Rindā bez atstarpēm uzrakstīti vārdi (pirmais vārds ir "matemātikas" un pēc tam atkārtojas vārds "olimpiāde"):

MATEMĀTIKASOLIMPIĀDEOLIMPIĀDEOLIMPIĀDE...

Kāds burts atrodas 500. vietā?

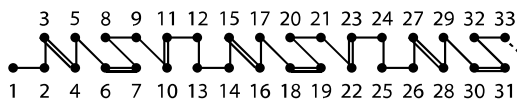
Atrisinājums. Pēdējais pilnais vārds "olimpiāde" pirms 500. vietas beidzas 497. vietā, jo $497 = 11 + 9 \cdot 54$. Tā kā $500 - 497 = 3$, tad 500. burts ir tāds pats, kā vārda "olimpiāde" 3. burts, tas ir, burts "i".

Līdzīgi risināmi ir arī uzdevumi par skaitļu virknēm, kuros jānosaka, kāds skaitlis atrodas kādā no dotās virknes vietām. Šādos uzdevumos parasti ir aprakstīts likums, kā skaitļu virkne tiek veidota, tad pašiem šī virkne ir jāturpina, kamēr iegūst tādu skaitļu grupu, kas atkārtojas, un tad jāizdara līdzīgi spriedumi kā iepriekšējos piemēros.

Skaitļus, kas veido virkni, sauc par **virknes locekļiem**. Piemēram, virknes 5; 10; 15; 20; 25; ... ceturtais loceklis ir 20. Virknes locekļu grupu, kas no kādas vietas virknē sāk visu laiku atkārtoties, sauc par **periodu**. Piemēram, virknē 1; 2; 3; 1; 2; 3; 1; 2; 3; ... periods ir (1; 2; 3) un šī ir **periodiska virkne**.

Uzdevumu piemēri

1. Zīmējumā attēlotais raksts atkārtojas ik pēc 12 punktiem:



Uzzīmē, kāds izskatīsies raksts starp 198. un 202. punktu!

Atrisinājums. Tā kā $198 = 12 \cdot 16 + 6$, tad raksts starp 198. un 202. punktu izskatās tāpat, kā starp 6. un 10. punktu:



2. Skaitļu virknes pirmais loceklis ir 11, bet katrs nākamais ir vienāds ar iepriekšējā skaitļa kvadrāta ciparu summu. Kāds skaitlis šajā virknē ir 2018. vietā?

Atrisinājums. Pamatosim, ka virknes 2018. vietā ir skaitlis 13. Aprēķinām dažus nākamos virknes locekļus:

- virknes 2. loceklis ir 4, jo $11^2 = 121$ un $1 + 2 + 1 = 4$;
- virknes 3. loceklis ir 7, jo $4^2 = 16$ un $1 + 6 = 7$;
- virknes 4. loceklis ir 13, jo $7^2 = 49$ un $4 + 9 = 13$;
- virknes 5. loceklis ir 16, jo $13^2 = 169$ un $1 + 6 + 9 = 16$;
- virknes 6. loceklis ir 13, jo $16^2 = 256$ un $2 + 5 + 6 = 13$.

Līdz ar to virknes sākums ir 11; 4; 7; **13; 16; 13; 16;** ... Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tad, līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš bijis skaitlis, izveidojas periods. Redzam, ka, sākot ar ceturto locekli, virkne ir periodiska: pāra vietās visi locekļi ir 13, bet nepāra – 16. Tā kā 2018 ir pāra skaitlis, tad šajā vietā virknē ir skaitlis 13.

3. Virknē 1; 7; 8; 5; 3; 8; ... katrs skaitlis, sākot ar trešo, ir divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars. Vai šajā virknē var pēc kārtas būt skaitļi 2; 4; 6?

Atrisinājums. Pamatosim, ka tas nav iespējams. Pāra skaitļus virknē apzīmējam ar p , nepāra – ar n . Ja diviem iepriekšējiem virknes locekļiem ir vienāda paritāte (abi ir pāra skaitļi vai abi ir nepāra skaitļi), tad nākamais virknes loceklis būs pāra skaitlis, savukārt, ja diviem iepriekšējiem virknes locekļiem ir atšķirīgas paritātes, tad nākamais virknes loceklis būs nepāra skaitlis. Tad iegūstam virkni $n; n; p; n; n; p; n; \dots$, bet skaitļiem 2; 4; 6 atbilst secība $p; p; p$, tātad tas nav iespējams.

Tālāk dotie uzdevumi vairāk paredzēti 7.-8. klašu skolēniem

4. Naturālu skaitļu virknes 7; 14; 17; ... katrs nākamais loceklis tiek iegūts, iepriekšējā locekļa kvadrāta ciparu summai pieskaitot skaitli 1. Kāds ir šīs virknes 1002. loceklis?

Atrisinājums. Pamatosim, ka virknes 1002. loceklis ir 8. Aprēķinām dažus nākamos virknes locekļus:

- virknes 4. loceklis ir 20, jo $17^2 = 289$ un $2 + 8 + 9 + 1 = 20$;
- virknes 5. loceklis ir 5, jo $20^2 = 400$ un $4 + 0 + 0 + 1 = 5$;
- virknes 6. loceklis ir 8, jo $5^2 = 25$ un $2 + 5 + 1 = 8$;
- virknes 7. loceklis ir 11, jo $8^2 = 64$ un $6 + 4 + 1 = 11$;
- virknes 8. loceklis ir 5, jo $11^2 = 121$ un $1 + 2 + 1 + 1 = 5$.

Līdz ar to virknes sākums ir 7; 14; 17; 20; **5; 8; 11; 5; 8; 11;** ... Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tad, līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš bijis skaitlis, izveidojas periods. Ievērojām, ka virknē skaitļu grupa (5, 8, 11) atkārtojas tikai sākot ar 5. locekli. Tāpēc pēdējais pilnais periods pirms 1002. virknes locekļa beidzas pie 1000. virknes locekļa, jo $4 + 3 \cdot 332 = 1000$. Tā kā $1002 - 1000 = 2$, tad 1002. loceklis ir periodā otrais, tātad tas ir 8.

5. Dota skaitļu virkne 1; 1; 2; 5; 9; 6; Tā tiek veidota pēc likuma: virknes pirmie divi locekļi ir 1, bet katrs nākamais ir vienāds ar divu iepriekšējo virknes locekļu kvadrātu summas pēdējo ciparu. **a)** Noteikt, vai šīs virknes 2018. loceklis ir pāra vai nepāra skaitlis! **b)** Aprēķināt virknes 2018. locekli!

Atrisinājums. a) Pāra skaitļus virknē apzīmējam ar p , nepāra – ar n . Ja diviem iepriekšējiem virknes locekļiem ir vienāda paritāte (abi ir pāra skaitļi vai abi ir nepāra skaitļi), tad nākamais virknes loceklis būs pāra skaitlis, savukārt, ja diviem iepriekšējiem virknes locekļiem ir atšķirīgas paritātes, tad nākamais virknes loceklis būs nepāra skaitlis. Līdz ar to iegūstam virkni $n; n; p; n; n; p; n; \dots$ Redzams, ka šī virkne ir periodiska ar perioda garumu 3. Tāpēc tikai tie virknes locekļi, kuru kārtas numurs dalās ar 3, ir pāra. Tā kā 2018 ar 3 nedalās, tad 2018. loceklis ir nepāra.

b) Turpinot virkni tālāk, iegūsim, ka tā ir 1; **1; 2**; 5; 9; 6; 7; 5; 4; 1; 7; 0; 9; **1; 2**; 5; ... Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs no diviem iepriekšējiem virknes locekļiem, tad, līdzko parādās divi jau iepriekš bijuši skaitļi, izveidojas periods. Tā kā virknes otrais un trešais loceklis ir 1 un 2, un 14. un 15. loceklis arī ir 1 un 2, tad virkne, sākot ar 2. locekli, ir periodiska. Tāpēc pēdējais pilnais periods pirms 2018. virknes locekļa beidzas pie 2017. virknes locekļa, jo $1 + 12 \cdot 168 = 2017$. Tā kā $2018 - 2017 = 1$, tad 2018. loceklis ir periodā pirmais, tātad tas ir 1.

Piezīme. Pietiek atrisināt tikai b) gadījumu un no tā secināt par skaitļa paritāti, tas ir, sniegt atbildi a) gadījumam.

6. Virknes pirmais loceklis ir 6. Katru nākamo locekli iegūst tā:
- iepriekšējo virknes locekli dala ar 2, ja tas ir pāra skaitlis;
 - iepriekšējo virknes locekli reizina ar 5 un atņem 1, ja tas ir nepāra skaitlis.

Kāds virknes locekļa kārtas numurs ir vienāds ar šajā vietā esošo virknes locekli?

Atrisinājums. Pamatosim, ka 13. un 16. virknes loceklis sakrīt ar tā kārtas numuru virknē. Turpinot virkni tālāk, iegūsim

6	3	14	7	34	17	84	42	21	104	52	26	13	64	32	16	8	4	2	1	4	2	1	...
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	...

Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tad, līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš bijis skaitlis, izveidojas periods. Kā redzams, sākot ar 18. virknes locekli, virknē atkārtojas skaitļu grupa (4; 2; 1), tāpēc tālāk uz priekšu neviens virknes locekļa kārtas numurs nebūs vienāds ar pašu virknes locekli. Līdz ar to vienīgie virknes locekļi, kam prasītais izpildās, ir 13 un 16.

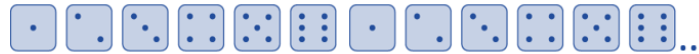
Periodiskas virknes – uzdevumi

- 1) Jokainajā lauku sētā aitas un cūkas sastājušās garā rindā pēc šāda likuma (ik pēc 3 dzīvniekiem secība atkārtojas):



Kas atrodas šīs rindas a) 21. vietā; b) 100. vietā; c) 2018. vietā?

- 2) Metamie kauliņi novietoti rindā tā, ka ik pēc sešiem kauliņiem redzamo punktiņu secība atkārtojas:



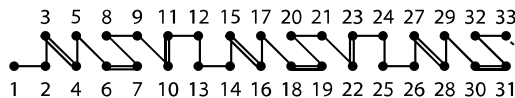
Cik punktiņu būs redzami uz šīs rindas 605. kauliņa?

- 3) Rindā bez atstarpēm uzrakstīti vārdi (pirmais vārds ir “matemātikas” un pēc tam atkārtojas vārds “olimpiāde”):

MATEMĀTIKASOLIMPIĀDEOLIMPIĀDEOLIMPIĀDE...

Kāds burts atrodas 500. vietā?

1. Zīmējumā attēlotais raksts atkārtojas ik pēc 12 punktiem:



Uzzīmē, kāds izskatīsies raksts starp 198. un 202. punktu!

2. Skaitļu virknes pirmais loceklis ir 11, bet katrs nākamais ir vienāds ar iepriekšējā skaitļa kvadrāta ciparu summu. Kāds skaitlis šajā virknē ir 2018. vietā?
3. Virknē 1; 7; 8; 5; 3; 8; ... katrs skaitlis, sākot ar trešo, ir divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars. Vai šajā virknē var pēc kārtas būt skaitļi 2; 4; 6?
4. Naturālu skaitļu virknes 7; 14; 17; ... katrs nākamais loceklis tiek iegūts, iepriekšējā locekļa kvadrāta ciparu summai pieskaitot skaitli 1. Kāds ir šīs virknes 1002. loceklis?
5. Dota skaitļu virkne 1; 1; 2; 5; 9; 6; Tā tiek veidota pēc likuma: virknes pirmie divi locekļi ir 1, bet katrs nākamais ir vienāds ar divu iepriekšējo virknes locekļu kvadrātu summas pēdējo ciparu. **a)** Noteikt, vai šīs virknes 2018. loceklis ir pāra vai nepāra skaitlis! **b)** Aprēķināt virknes 2018. locekli!
6. Virknes pirmais loceklis ir 6. Katru nākamo locekli iegūst tā:
- o iepriekšējo virknes locekli dala ar 2, ja tas ir pāra skaitlis;
 - o iepriekšējo virknes locekli reizina ar 5 un atņem 1, ja tas ir nepāra skaitlis.
- Kāds virknes locekļa kārtas numurs ir vienāds ar šajā vietā esošo virknes locekli?