

## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 5. klase

1. Artūrs no marinētu gurķīšu burkas ir apēdis  $\frac{1}{3}$  no visiem gurķīšiem. Rezultātā burkā šķidruma līmenis samazinājās par  $\frac{1}{5}$  no sākotnējā līmeņa. Cik reizes, salīdzinot ar jauno līmeni, samazināsies šķidruma līmenis burkā, ja Artūrs apēdis visus atlikušos gurķīšus? (Artūrs ēda tikai gurķus, šķidrumu nē.)
2. Raimonds veidoja virkni, visu laiku pēc kārtas rakstot skaitļa 2018 ciparus:  
2, 0, 1, 8, 2, 0, 1, 8, 2, 0, 1, 8, ...  
Laine veidoja virkni pēc likuma: virknes pirmais loceklis 20, bet katru nākamo iegūst, no iepriekšējā locekļa ciparu summas atņemot 1 un rezultātu reizinot ar 8.  
Kāds ir 999. loceklis Raimonda virknē un kāds – Laines virknē?
3. Vai kvadrātā ar izmēriem  $8 \times 8$  rūtiņas var iekrāsot 12 rūtiņas tā, lai katrā taisnstūrī ar izmēriem  $2 \times 3$  rūtiņas (tas var būt arī pagriezts vertikāli) būtu vismaz viena iekrāsota rūtiņa?
4. Naturālu pāra skaitli sauksim par *raibu*, ja tam vienlaikus ir spēkā šādas īpašības:
  - 1) tajā neviens cipars nav nulle,
  - 2) tam nav divu vienādu ciparu,
  - 3) nekur blakus neatrodas divi pāra un divi nepāra cipari.Vai ir iespējams, ka
  - a) saskaitot divus piecciparu *raibus* skaitļus, arī summa būs piecciparu *raibs* skaitlis;
  - b) saskaitot divus sešciparu *raibus* skaitļus, arī summa būs sešciparu *raibs* skaitlis?
5. Miķelis ir izgudrojis spēli, kurā nepieciešama spēļu nauda – miķeļi. No 1, 2, 3, 5, 10 un 15 miķeļišū naudaszīmēm Miķelis grib izvēlēties četru veidu naudaszīmes tā, lai jebkuru summu no 1 līdz 30 miķeļišiem varētu izveidot, izmantojot ne vairāk kā četras banknotes. Atrodi vienu šādu četru naudaszīmju komplektu!

## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 5. klase

1. Artūrs no marinētu gurķīšu burkas ir apēdis  $\frac{1}{3}$  no visiem gurķīšiem. Rezultātā burkā šķidruma līmenis samazinājās par  $\frac{1}{5}$  no sākotnējā līmeņa. Cik reizes, salīdzinot ar jauno līmeni, samazināsies šķidruma līmenis burkā, ja Artūrs apēdis visus atlikušos gurķīšus? (Artūrs ēda tikai gurķus, šķidrumu nē.)
2. Raimonds veidoja virkni, visu laiku pēc kārtas rakstot skaitļa 2018 ciparus:  
2, 0, 1, 8, 2, 0, 1, 8, 2, 0, 1, 8, ...  
Laine veidoja virkni pēc likuma: virknes pirmais loceklis 20, bet katru nākamo iegūst, no iepriekšējā locekļa ciparu summas atņemot 1 un rezultātu reizinot ar 8.  
Kāds ir 999. loceklis Raimonda virknē un kāds – Laines virknē?
3. Vai kvadrātā ar izmēriem  $8 \times 8$  rūtiņas var iekrāsot 12 rūtiņas tā, lai katrā taisnstūrī ar izmēriem  $2 \times 3$  rūtiņas (tas var būt arī pagriezts vertikāli) būtu vismaz viena iekrāsota rūtiņa?
4. Naturālu pāra skaitli sauksim par *raibu*, ja tam vienlaikus ir spēkā šādas īpašības:
  - 1) tajā neviens cipars nav nulle,
  - 2) tam nav divu vienādu ciparu,
  - 3) nekur blakus neatrodas divi pāra un divi nepāra cipari.Vai ir iespējams, ka
  - a) saskaitot divus piecciparu *raibus* skaitļus, arī summa būs piecciparu *raibs* skaitlis;
  - b) saskaitot divus sešciparu *raibus* skaitļus, arī summa būs sešciparu *raibs* skaitlis?
5. Miķelis ir izgudrojis spēli, kurā nepieciešama spēļu nauda – miķeļi. No 1, 2, 3, 5, 10 un 15 miķeļišū naudaszīmēm Miķelis grib izvēlēties četru veidu naudaszīmes tā, lai jebkuru summu no 1 līdz 30 miķeļišiem varētu izveidot, izmantojot ne vairāk kā četras banknotes. Atrodi vienu šādu četru naudaszīmju komplektu!

## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 6. klase

1. Sarkanā kvadrāta laukums ir 80% no zilā kvadrāta laukuma, bet zilā kvadrāta laukums ir 125% no zaļā kvadrāta laukuma. Kura kvadrāta mala ir visīsākā? Aprēķināt zaļā kvadrāta malas garumu, ja sarkanā kvadrāta laukums ir  $25 \text{ cm}^2$ .
2. Vilnis veidoja virkni, visu laiku pēc kārtas rakstot skaitļa 29042018 ciparus:  
2; 9; 0; 4; 2; 0; 1; 8; 2; 9; 0; 4; 2; 0; 1; 8; 2; 9; 0; 4; 2; 0; 1; 8; ...  
Armands veidoja virkni pēc likuma: virknes pirmais loceklis 20, bet katru nākamo iegūst, iepriekšējā locekļa ciparu summai pieskaitot 1 un rezultātu reizinot ar 8.  
Kāds ir 1000. loceklis Viļņa virknē un kāds – Armanda virknē?
3. Kvadrātā ar izmēriem  $7 \times 7$  rūtiņas sākotnēji visas rūtiņas ir baltas. Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso melnas, lai no dotā kvadrāta nevarētu izgriezt  $2 \times 3$  rūtiņu taisnstūri, kam visas rūtiņas ir baltas?
4. Parādi vienu piemēru, kādus ciparus var ierakstīt burtu vietā, lai vienādība  $\overline{AC} \cdot C = \overline{AB} \cdot \overline{AB}$  būtu patiesa! Vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, dažādi – dažādus, turklāt  $A$  nav 0.
5. **a)** Laine sāka pierakstīt, cik veidos var iegūt katru summu no 2 līdz 12, metot divus parastos metamos kauliņus: summu 2 var iegūt 1 veidā ( $2 = 1 + 1$ ), summu 3 var iegūt 2 dažādos veidos ( $3 = 1 + 2 = 2 + 1$ ), summu 4 var iegūt 3 dažādos veidos ( $4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$ ). Kādos un cik dažādos veidos var iegūt visas atlikušās summas no 5 līdz 12?  
**b)** Gunārs no diviem kubiem ir izveidojis divus neparastus metamos kauliņus. Vienam no tiem uz skaldnēm ir uzrakstīti skaitļi 1, 3, 4, 5, 6 un 8. Kādi seši skaitļi ir uzrakstīti uz otra neparastā metamā kauliņa skaldnēm, ja zināms, ka, metot šos neparastos kauliņus, katru summu no 2 līdz 12 var iegūt tieši tikpat dažādos veidos, kā metot divus parastos metamos kauliņus! (Parādi vienu piemēru! Uzrakstītie skaitļi var atkārtoties.)

## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

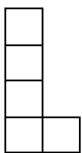
### 6. klase

1. Sarkanā kvadrāta laukums ir 80% no zilā kvadrāta laukuma, bet zilā kvadrāta laukums ir 125% no zaļā kvadrāta laukuma. Kura kvadrāta mala ir visīsākā? Aprēķināt zaļā kvadrāta malas garumu, ja sarkanā kvadrāta laukums ir  $25 \text{ cm}^2$ .
2. Vilnis veidoja virkni, visu laiku pēc kārtas rakstot skaitļa 29042018 ciparus:  
2; 9; 0; 4; 2; 0; 1; 8; 2; 9; 0; 4; 2; 0; 1; 8; 2; 9; 0; 4; 2; 0; 1; 8; ...  
Armands veidoja virkni pēc likuma: virknes pirmais loceklis 20, bet katru nākamo iegūst, iepriekšējā locekļa ciparu summai pieskaitot 1 un rezultātu reizinot ar 8.  
Kāds ir 1000. loceklis Viļņa virknē un kāds – Armanda virknē?
3. Kvadrātā ar izmēriem  $7 \times 7$  rūtiņas sākotnēji visas rūtiņas ir baltas. Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso melnas, lai no dotā kvadrāta nevarētu izgriezt  $2 \times 3$  rūtiņu taisnstūri, kam visas rūtiņas ir baltas?
4. Parādi vienu piemēru, kādus ciparus var ierakstīt burtu vietā, lai vienādība  $\overline{AC} \cdot C = \overline{AB} \cdot \overline{AB}$  būtu patiesa! Vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, dažādi – dažādus, turklāt  $A$  nav 0.
5. **a)** Laine sāka pierakstīt, cik veidos var iegūt katru summu no 2 līdz 12, metot divus parastos metamos kauliņus: summu 2 var iegūt 1 veidā ( $2 = 1 + 1$ ), summu 3 var iegūt 2 dažādos veidos ( $3 = 1 + 2 = 2 + 1$ ), summu 4 var iegūt 3 dažādos veidos ( $4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$ ). Kādos un cik dažādos veidos var iegūt visas atlikušās summas no 5 līdz 12?  
**b)** Gunārs no diviem kubiem ir izveidojis divus neparastus metamos kauliņus. Vienam no tiem uz skaldnēm ir uzrakstīti skaitļi 1, 3, 4, 5, 6 un 8. Kādi seši skaitļi ir uzrakstīti uz otra neparastā metamā kauliņa skaldnēm, ja zināms, ka, metot šos neparastos kauliņus, katru summu no 2 līdz 12 var iegūt tieši tikpat dažādos veidos, kā metot divus parastos metamos kauliņus! (Parādi vienu piemēru! Uzrakstītie skaitļi var atkārtoties.)

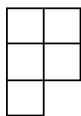
## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 7. klase

1. Cik dažādus naturālus skaitļus, kam visi cipari ir dažādi, var izveidot no cipariem 2, 0, 1, 8?
2. Skaitļu virkne tiek veidota pēc šāda likuma: ja  $x$  ir virknes loceklis, tad nākamo virknes loekli aprēķina pēc formulas  $\frac{1}{1-x}$ . Virknes pirmais loceklis ir 4. Aprēķini iegūtās virknes 2018. loekli un pirmo 2018 locekļu summu!
3. Uz trijstūra  $ABC$  malas  $AB$  izvēlēts patvaļīgs iekšējs punkts  $D$ . Pierādīt, ka  $CD > \frac{1}{2}(CA + CB - AB)$ .
4. Atrast tādu veselu skaitli  $n$ , lai vienādība  $(n - 2021)(n - 2018)(n - 2017)(n - 2016) = 2016$  būtu patiesa!
5. Lauriņa no taisnstūra ar izmēriem  $7 \times 2018$  rūtiņas izgriež 1. att. dotās figūras, bet Pēcītis no tāda paša taisnstūra izgriež 2. att. dotās figūras. Kurš no viņiem var izgriezt vairāk figūru? Figūras var būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.



1. att.

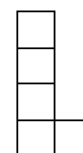


2. att.

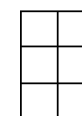
## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 7. klase

1. Cik dažādus naturālus skaitļus, kam visi cipari ir dažādi, var izveidot no cipariem 2, 0, 1, 8?
2. Skaitļu virkne tiek veidota pēc šāda likuma: ja  $x$  ir virknes loceklis, tad nākamo virknes loekli aprēķina pēc formulas  $\frac{1}{1-x}$ . Virknes pirmais loceklis ir 4. Aprēķini iegūtās virknes 2018. loekli un pirmo 2018 locekļu summu!
3. Uz trijstūra  $ABC$  malas  $AB$  izvēlēts patvaļīgs iekšējs punkts  $D$ . Pierādīt, ka  $CD > \frac{1}{2}(CA + CB - AB)$ .
4. Atrast tādu veselu skaitli  $n$ , lai vienādība  $(n - 2021)(n - 2018)(n - 2017)(n - 2016) = 2016$  būtu patiesa!
5. Lauriņa no taisnstūra ar izmēriem  $7 \times 2018$  rūtiņas izgriež 1. att. dotās figūras, bet Pēcītis no tāda paša taisnstūra izgriež 2. att. dotās figūras. Kurš no viņiem var izgriezt vairāk figūru? Figūras var būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.



1. att.



2. att.

## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 8. klase

1. Vienkāršot izteiksmi  $(x^2 - 2x + 1)(x^4 + 1)^2(x^2 + 2x + 1)(x^4 + 2x^2 + 1)$ .
2. Naturālu skaitļu virknes 1; 8; 8; 64; 192; 432; ... katrs loceklis, sākot ar trešo, ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu nulles ciparu reizinājumu. Kāds ir šīs virknes 2018. loceklis?
3. Paralelograma  $ABCD$  malu  $BC$  un  $AD$  viduspunkti ir attiecīgi  $E$  un  $F$ . Aprēķināt četrstūra laukumu, ko ierobežo taisnes  $AE, ED, BF$  un  $FC$ , ja zināms, ka  $ABCD$  laukums ir 100.
4. Par maģisko kvadrātu sauc  $n \times n$  rūtiņu tabulu, kuras rūtiņās ierakstīti skaitļi no 1 līdz  $n^2$  tā, ka visās tabulas rindās, kolonnās un uz abām galvenajām diagonālēm rūtiņās ierakstīto skaitļu summas ir vienādas. (Katrs no skaitļiem ierakstīts tieši vienā rūtiņā.) Vai noteikti maģiskā kvadrāta centrālajā rūtiņā ir ierakstīts skaitlis  $\frac{n^2+1}{2}$ , ja **a)**  $n = 3$ , **b)**  $n = 5$ ?
5. **a)** Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso  $6 \times 6$  rūtiņu kvadrātā, lai katrā šī kvadrāta  $2 \times 3$  rūtiņu taisnstūrī (tas var būt arī pagriezts vertikāli) būtu vismaz viena iekrāsota rūtiņa?  
**b)** Vai noteikti tad, kad ir iekrāsots mazākais rūtiņu skaits, visas četras stūra rūtiņas paliks neiekrāsotas?

## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 8. klase

1. Vienkāršot izteiksmi  $(x^2 - 2x + 1)(x^4 + 1)^2(x^2 + 2x + 1)(x^4 + 2x^2 + 1)$ .
2. Naturālu skaitļu virknes 1; 8; 8; 64; 192; 432; ... katrs loceklis, sākot ar trešo, ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu nulles ciparu reizinājumu. Kāds ir šīs virknes 2018. loceklis?
3. Paralelograma  $ABCD$  malu  $BC$  un  $AD$  viduspunkti ir attiecīgi  $E$  un  $F$ . Aprēķināt četrstūra laukumu, ko ierobežo taisnes  $AE, ED, BF$  un  $FC$ , ja zināms, ka  $ABCD$  laukums ir 100.
4. Par maģisko kvadrātu sauc  $n \times n$  rūtiņu tabulu, kuras rūtiņās ierakstīti skaitļi no 1 līdz  $n^2$  tā, ka visās tabulas rindās, kolonnās un uz abām galvenajām diagonālēm rūtiņās ierakstīto skaitļu summas ir vienādas. (Katrs no skaitļiem ierakstīts tieši vienā rūtiņā.) Vai noteikti maģiskā kvadrāta centrālajā rūtiņā ir ierakstīts skaitlis  $\frac{n^2+1}{2}$ , ja **a)**  $n = 3$ , **b)**  $n = 5$ ?
5. **a)** Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso  $6 \times 6$  rūtiņu kvadrātā, lai katrā šī kvadrāta  $2 \times 3$  rūtiņu taisnstūrī (tas var būt arī pagriezts vertikāli) būtu vismaz viena iekrāsota rūtiņa?  
**b)** Vai noteikti tad, kad ir iekrāsots mazākais rūtiņu skaits, visas četras stūra rūtiņas paliks neiekrāsotas?

## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 9. klase

1. Dots vienādojums  $(a - 3)x^2 + 5x - 2 = 0$ .  
a) Kādām  $a$  vērtībām vienādojumam ir tieši viena sakne?  
b) Kādām  $a$  vērtībām vienādojumam ir divas dažādas reālas saknes?
2. Cik dažādos veidos basketbolā var gūt 18 punktus, izmantojot tikai 1 punkta un 3 punktu metienus? Veidi, kas atšķiras tikai ar 1 punkta un 3 punktu metienu secību, tiek uzskatīti par dažādiem. Piemēram, 4 punktus var iegūt trīs dažādos veidos:  $4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 3 = 3 + 1$ .
3. Ap vienādsānu trijstūri  $ABC$  ( $AB = AC$ ) apvilka riņķa līnija. Caur virsotni  $B$  un loka  $AB$  (kas nesatur  $C$ ) iekšēju punktu  $D$  novilkta taisne, uz kuras atzīmēts punkts  $E$  tā, ka  $AD = AE$ . Pierādīt, ka trijstūri  $ABC$  un  $ADE$  ir līdzīgi!
4. Atrast lielāko naturālo skaitli, kas dalās ar 7, kura ciparu summa ir 100 un kuram neviens cipars nav 0.
5. Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso taisnstūrī ar izmēriem  $5 \times 8$  rūtiņas, lai katrā šī taisnstūra  $2 \times 3$  rūtiņu taisnstūrī (tas var būt arī pagriezts vertikāli) būtu vismaz viena iekrāsota rūtiņa?

## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 9. klase

1. Dots vienādojums  $(a - 3)x^2 + 5x - 2 = 0$ .  
a) Kādām  $a$  vērtībām vienādojumam ir tieši viena sakne?  
b) Kādām  $a$  vērtībām vienādojumam ir divas dažādas reālas saknes?
2. Cik dažādos veidos basketbolā var gūt 18 punktus, izmantojot tikai 1 punkta un 3 punktu metienus? Veidi, kas atšķiras tikai ar 1 punkta un 3 punktu metienu secību, tiek uzskatīti par dažādiem. Piemēram, 4 punktus var iegūt trīs dažādos veidos:  $4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 3 = 3 + 1$ .
3. Ap vienādsānu trijstūri  $ABC$  ( $AB = AC$ ) apvilka riņķa līnija. Caur virsotni  $B$  un loka  $AB$  (kas nesatur  $C$ ) iekšēju punktu  $D$  novilkta taisne, uz kuras atzīmēts punkts  $E$  tā, ka  $AD = AE$ . Pierādīt, ka trijstūri  $ABC$  un  $ADE$  ir līdzīgi!
4. Atrast lielāko naturālo skaitli, kas dalās ar 7, kura ciparu summa ir 100 un kuram neviens cipars nav 0.
5. Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso taisnstūrī ar izmēriem  $5 \times 8$  rūtiņas, lai katrā šī taisnstūra  $2 \times 3$  rūtiņu taisnstūrī (tas var būt arī pagriezts vertikāli) būtu vismaz viena iekrāsota rūtiņa?

## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 10. klase

1. Pierādīt, ka trijstūra, kura malu garumi ir  $\sqrt{40}, \sqrt{53}, \sqrt{145}$ , laukums ir naturāls skaitlis!
2. Uz koordinātu ass koordinātu sākumpunktā sēž blusa. Ar vienu lēcieni tā var aizlēkt vai nu 1, vai 2, vai 5 vienības pa labi. Cik dažādos veidos blusa var nokļūt punktā, kura koordināta ir 15? (Veidus uzskata par atšķirīgiem, ja atšķiras izdarīto lēcieni secība.)
3. Dots trijstūris  $ABC$ . No virsotnes  $C$  novilkta perpendikuli  $CM$  un  $CN$  attiecīgi pret leņķa  $A$  un leņķa  $B$  ārējo leņķu bisektrisēm. Pierādīt, ka  $MN$  garums ir vienāds ar pusi no trijstūra  $ABC$  perimetra!
4. Pierādīt, ja  $x$  – naturāls skaitlis, tad  $x^8 - x^2$  dalās ar 252.
5. Miķelis ir izgudrojis spēli, kurā nepieciešama spēļu nauda – miķeliši. No 1, 2, 3, 5, 10, 20, 25 un 50 miķelišu naudaszīmēm Miķelis grib izvēlēties četru veidu naudaszīmes tā, lai jebkuru summu no 1 līdz 70 miķelišiem varētu izveidot, izmantojot ne vairāk kā sešas banknotes. Atrast vienu šādu četru naudaszīmju komplektu!

## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 10. klase

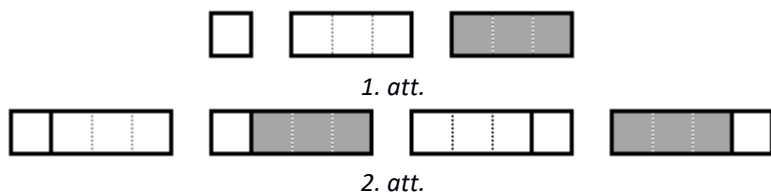
1. Pierādīt, ka trijstūra, kura malu garumi ir  $\sqrt{40}, \sqrt{53}, \sqrt{145}$ , laukums ir naturāls skaitlis!
2. Uz koordinātu ass koordinātu sākumpunktā sēž blusa. Ar vienu lēcieni tā var aizlēkt vai nu 1, vai 2, vai 5 vienības pa labi. Cik dažādos veidos blusa var nokļūt punktā, kura koordināta ir 15? (Veidus uzskata par atšķirīgiem, ja atšķiras izdarīto lēcieni secība.)
3. Dots trijstūris  $ABC$ . No virsotnes  $C$  novilkta perpendikuli  $CM$  un  $CN$  attiecīgi pret leņķa  $A$  un leņķa  $B$  ārējo leņķu bisektrisēm. Pierādīt, ka  $MN$  garums ir vienāds ar pusi no trijstūra  $ABC$  perimetra!
4. Pierādīt, ja  $x$  – naturāls skaitlis, tad  $x^8 - x^2$  dalās ar 252.
5. Miķelis ir izgudrojis spēli, kurā nepieciešama spēļu nauda – miķeliši. No 1, 2, 3, 5, 10, 20, 25 un 50 miķelišu naudaszīmēm Miķelis grib izvēlēties četru veidu naudaszīmes tā, lai jebkuru summu no 1 līdz 70 miķelišiem varētu izveidot, izmantojot ne vairāk kā sešas banknotes. Atrast vienu šādu četru naudaszīmju komplektu!

## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 11. klase

- Pierādīt, ka visām naturālām  $n$  vērtībām izpildās  

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$
- Cik dažādus taisnstūrus ar izmēriem  $1 \times 12$  var izveidot no 1. att. dotajām figūriņām? Taisnstūri, kas atšķiras ar figūriņu secību vai krāsu, ir dažādi, piemēram, 2. att. izveidoti četri dažādi taisnstūri ar izmēriem  $1 \times 4$ .



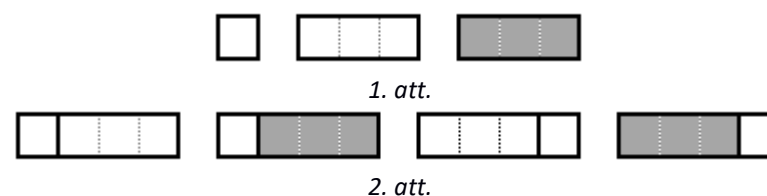
- Riņķa līnija  $\omega_1$  iekšēji pieskaras riņķa līnijai  $\omega_2$  punktā  $A$ . No punkta  $P$ , kas atrodas uz  $\omega_2$ , novilkta hordas  $PQ$  un  $PR$ , kas pieskaras  $\omega_1$  attiecīgi punktos  $X$  un  $Y$ . Pierādīt, ka  $\sphericalangle QAR = 2\sphericalangle XAY$ .
- Vai eksistē tādi naturāli skaitļi  $m$  un  $n$ , ka  $m^2 - n^2 = 2mn$ ?
- Vienādojuma  $x^3 - 44x^2 + 623x - 2860 = 0$  saknes ir trijstūra malu garumi. Aprēķināt šī trijstūra laukumu!

## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 11. klase

- Pierādīt, ka visām naturālām  $n$  vērtībām izpildās  

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$
- Cik dažādus taisnstūrus ar izmēriem  $1 \times 12$  var izveidot no 1. att. dotajām figūriņām? Taisnstūri, kas atšķiras ar figūriņu secību vai krāsu, ir dažādi, piemēram, 2. att. izveidoti četri dažādi taisnstūri ar izmēriem  $1 \times 4$ .



- Riņķa līnija  $\omega_1$  iekšēji pieskaras riņķa līnijai  $\omega_2$  punktā  $A$ . No punkta  $P$ , kas atrodas uz  $\omega_2$ , novilkta hordas  $PQ$  un  $PR$ , kas pieskaras  $\omega_1$  attiecīgi punktos  $X$  un  $Y$ . Pierādīt, ka  $\sphericalangle QAR = 2\sphericalangle XAY$ .
- Vai eksistē tādi naturāli skaitļi  $m$  un  $n$ , ka  $m^2 - n^2 = 2mn$ ?
- Vienādojuma  $x^3 - 44x^2 + 623x - 2860 = 0$  saknes ir trijstūra malu garumi. Aprēķināt šī trijstūra laukumu!

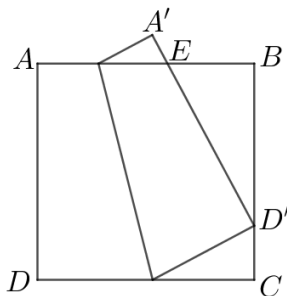
## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 12. klase

1. Pierādīt, ka

$$\log_{81} 96 = \frac{14 - \log_{48} 54}{16 \log_{48} 54 - 4}$$

2. Cik veidos rindā var iestādīt septiņus kokus – liepas, ozolus, priedes un egles – tā, lai nekur blakus neatrastos divi skuju koki? (Nav obligāti jāizmanto visas koku sugas. Veidi, kas atšķiras ar koku secību rindā, ir dažādi.)
3. Kvadrāta  $ABCD$  mala  $AD$  pārlocīta tā, ka pēc pārlocīšanas punkts  $D$  sakrīt ar kādu  $BC$  iekšēju punktu  $D'$ , bet punkts  $A$  nonāk punktā  $A'$ . Nogrieznis  $A'D'$  krusto  $AB$  punktā  $E$  (skat. 1. att.). Pierādīt, ka  $A'E$  garums ir vienāds ar trijstūrī  $EBD'$  ievilktais riņķa līnijas rādiusu!



1. att.

4. Naturāls skaitlis  $B$  ir iegūts no naturāla skaitļa  $A$ , samainot vietām tā ciparus. Zināms, ka  $A + B = 10^{45}$ . Pierādīt, ka gan  $A$ , gan  $B$  dalās ar 5.
5. Katras divas regulāra sešstūra virsotnes savieno vai nu ar sarkanu, vai zilu nogriezni. Aplūkosim visus trijstūrus, kuru virsotnes ir dotā sešstūra virsotnes.  
**a)** Pierādīt, ka starp tiem ir vismaz viens vienkrāsas trijstūris! **b)** Vai var gadīties, ka starp tiem ir tieši viens vienkrāsas trijstūris?  
 Trijstūri sauc par vienkrāsas, ja tam visas malas ir nokrāsotas vienā krāsā.

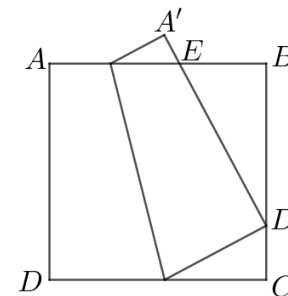
## Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

### 12. klase

1. Pierādīt, ka

$$\log_{81} 96 = \frac{14 - \log_{48} 54}{16 \log_{48} 54 - 4}$$

2. Cik veidos rindā var iestādīt septiņus kokus – liepas, ozolus, priedes un egles – tā, lai nekur blakus neatrastos divi skuju koki? (Nav obligāti jāizmanto visas koku sugas. Veidi, kas atšķiras ar koku secību rindā, ir dažādi.)
3. Kvadrāta  $ABCD$  mala  $AD$  pārlocīta tā, ka pēc pārlocīšanas punkts  $D$  sakrīt ar kādu  $BC$  iekšēju punktu  $D'$ , bet punkts  $A$  nonāk punktā  $A'$ . Nogrieznis  $A'D'$  krusto  $AB$  punktā  $E$  (skat. 1. att.). Pierādīt, ka  $A'E$  garums ir vienāds ar trijstūrī  $EBD'$  ievilktais riņķa līnijas rādiusu!



1. att.

4. Naturāls skaitlis  $B$  ir iegūts no naturāla skaitļa  $A$ , samainot vietām tā ciparus. Zināms, ka  $A + B = 10^{45}$ . Pierādīt, ka gan  $A$ , gan  $B$  dalās ar 5.
5. Katras divas regulāra sešstūra virsotnes savieno vai nu ar sarkanu, vai zilu nogriezni. Aplūkosim visus trijstūrus, kuru virsotnes ir dotā sešstūra virsotnes.  
**a)** Pierādīt, ka starp tiem ir vismaz viens vienkrāsas trijstūris! **b)** Vai var gadīties, ka starp tiem ir tieši viens vienkrāsas trijstūris?  
 Trijstūri sauc par vienkrāsas, ja tam visas malas ir nokrāsotas vienā krāsā.