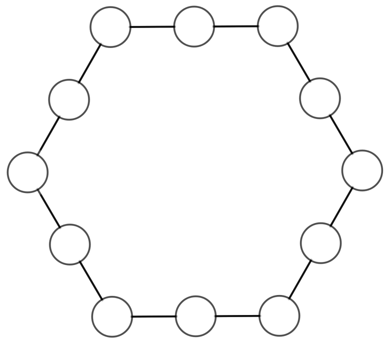
Atklātā matemātikas olimpiāde

Uzdevumi un atrisinājumi

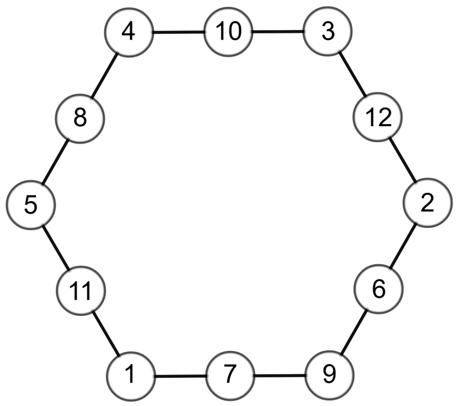
5. klase

5.1. Ieraksti 1. att. aplīšos skaitļus no 1 līdz 12, katrā aplītī citu skaitli, tā, lai uz katras sešstūra malas esošo trīs skaitļu summa būtu viena un tā pati. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.



1. att.

Atrisinājums. To var izdarīt, kā redzams 2. attēlā. Iespējami arī citi varianti.



2. att.

5.2. Ieraksti burtu un zvaigznīšu vietā ciparus tā, lai būtu pareizs reizināšanas piemērs. Vienādu burtu vietā jābūt vienādiem cipariem, bet dažādu burtu vietā jābūt dažādiem. Zvaigznīšu vietā var būt patvaļīgi cipari, var būt arī kādi no tiem, kas ierakstīti burtu vietās. Neviens no cipariem (ne burtu, ne zvaigznīšu vietās) nedrīkst būt 0. Burti "a" un "ā" apzīmē dažādus ciparus. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

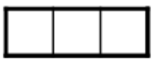
$$\begin{array}{cccc} & & \mathrm{m} & \mathrm{a} \\ & \times & \mathrm{t} & \mathrm{e} \\ \hline & * & * & * \\ * & \mathrm{m} & \bar{\mathrm{a}} & \\ \hline \mathrm{t} & \mathrm{i} & \mathrm{k} & \mathrm{a} \end{array}$$

Atrisinājums. Šis ir vienīgais atrisinājums:

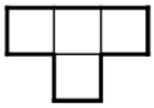
$$\begin{array}{cccc} & & 9 & 8 \\ & \times & 3 & 6 \\ \hline & 5 & 8 & 8 \\ 2 & 9 & 4 & \\ \hline 3 & 5 & 2 & 8 \end{array}$$

5.3. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa sešciparu skaitlim, kas dalās ar 24?
Atrisinājums. Mazākā iespējamā summa ir 3. Šāds skaitlis ir, piemēram, skaitlis 300000, viegli redzēt, ka tas dalās, gan ar 3 (jo tā ciparu summa dalās ar 3), gan ar 8 (jo tā pēdējo 3 ciparu veidotais skaitlis 000 dalās ar 8).
Lai pamatotu, ka mazāka ciparu summa par 3 nav iespējama, atliek ievērot, ka, ja skaitlis dalās ar 24, tad tas dalās arī ar 3, tātad arī tā ciparu summa dalās ar 3. Tātad tā nevar būt mazāka par 3.

5.4. Parādi, kā 5×7 rūtiņu taisnstūri var sagriezt vienā 1×3 rūtiņu taisnstūrī (3. att.) un astoņās "T" veida figūrās (4. att.), abu veidu figūras var būt arī pagrieztas.

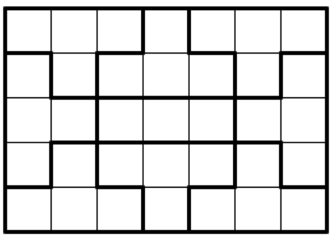


3. att.



4. att.

Atrisinājums. To var izdarīt šādi, kā redzams 5. attēlā.



5. att.

5.5. Sākumā 3×3 rūtiņu tabulā katrā rūtiņā ir ierakstīta nulle. Vienā gājienā Raitis izvēlas jebkuru 2×2 rūtiņu kvadrātu un visiem četriem tajā esošajiem skaitļiem pieskaita 1. Pēc vairākiem šādiem gājieniem viņš rūpīgi aplūkoja iegūtos 9 skaitļus. Vai var gadīties, ka tieši 8 no tiem ir pirmskaitļi? Vai var gadīties, ka visi 9 ir pirmskaitļi?

Atrisinājums. Var gadīties 8 pirmskaitļi, bet nevar gadīties 9 pirmskaitļi.

Ērtības labad apzīmēsim tabulas stūra rūtiņas ar A, B, C, D (skat. 6. att.). Katrs 2×2 kvadrāts noklāj tieši vienu stūra rūtiņu. Sauksim tad arī iespējamos gājienus par A, B, C, D gājieniem atkarībā no tā, kuru stūra rūtiņu tie noklāj.

Iegūt 8 pirmskaitļus var, izdarot A un C gājienus 2 reizes, bet B un D gājienus — 3 reizes. Tad tabulā (7. att.) vienīgi centrālajā rūtiņā nav pirmskaitlis.

A		B
C		D

6. att.

2	5	3
5	10	5
3	5	2

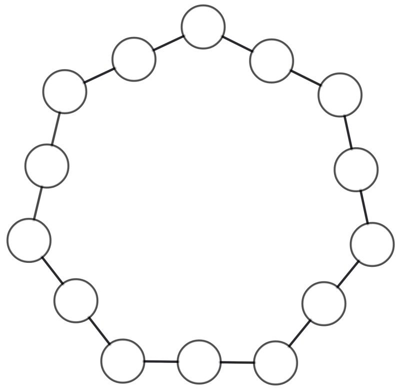
7. att.

A	X	B
	Y	
C	Z	D

8. att.

Atliek pamatot, ka visi 9 skaitļi nevar būt pirmskaitļi. Pieņemsim pretējo, ka visi 9 ir pirmskaitļi. Tad katrs gājiens (A, B, C, D) ir izdarīts vismaz 2 reizes, jo mazākais pirmskaitlis ir 2. Tas nozīmē, ka visās trijās rūtiņās X, Y, Z (8. att.) ir ierakstīti nepāra skaitļi (jo vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2, bet šajās rūtiņās skaitļi ir lielāki vai vienādi par 4). Tā kā rūtiņā X ir nepāra skaitlis, tas nozīmē, ka A un B gājieni kopā ir izdarīti nepāra skaitu reižu. Tā kā rūtiņā Z ir nepāra skaitlis, tas nozīmē, ka C un D gājieni kopā ir izdarīti nepāra skaitu reižu. Bet tas nozīmē, ka visi gājieni A, B, C un D kopā ir izdarīti pāra skaitu reižu, tātad Y rūtiņā ir pāra skaitlis — pretruna.

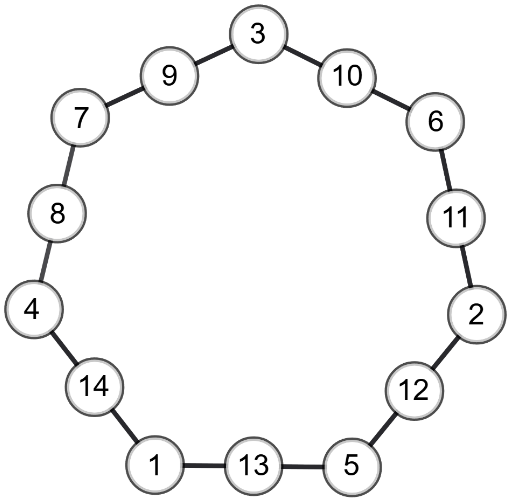
6. klase



9. att.

6.1. Ieraksti 9. att. aplīšos skaitļus no 1 līdz 14, katrā aplītī citu skaitli, tā, lai uz katras septiņstūra malas esošo trīs skaitļu summa būtu viena un tā pati. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

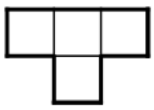
Atrisinājums. To var izdarīt, kā redzams 10 attēlā. Iespējami arī citi varianti.



10. att.

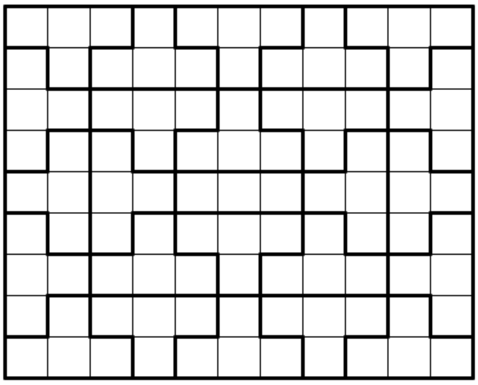
6.2. Parādi, kā 9×11 rūtiņu taisnstūri var sagriezt vienā 1×3 rūtiņu taisnstūrī (11. att.) un 24 ”T” veida figūrās (12. att.). Abu veidu figūras var būt arī pagrieztas.

11. att.



12. att.

Atrisinājums. To var izdarīt tā, kā redzams 13. attēlā.



13. att.

6.3. Ieraksti burtu vietā ciparus tā, lai būtu pareizs saskaitīšanas piemērs, vienādu burtu vietā būtu vienādi cipari, bet dažādu burtu vietā būtu dažādi cipari. Burti ”a” un ”ā” apzīmē dažādus ciparus. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt. Atceries, ka skaitlis nevar sākties ar nulli!

	p	a	s	a	k	a
+		a	s	a	k	a
+			s	a	k	a
+				a	k	a
+					k	a
+						a
g	r	ā	m	a	t	a

Atrisinājums. Šis ir vienīgais atrisinājums:

	9	6	7	6	5	6
+		6	7	6	5	6
+			7	6	5	6
+				6	5	6
+					5	6
+						6
1	0	4	3	6	8	6

6.4. Profesors Cipariņš uz tāfeles uzrakstīja divus septiņciparu skaitļus. Katru ciparu šajos skaitļos viņš aizstāja ar kādu burtu, vienādus ciparus ar vienādiem burtiem, dažādus ciparus ar dažādiem burtiem. Zināms, ka viens no uzrakstītajiem skaitļiem PLATONS dalās ar 45. Pierādi, ka otrs uzrakstītais skaitlis SOKRATS nedalās ar 54.

Atrisinājums. Tā kā PLATONS dalās ar 45, tad tas dalās arī ar 5, tātad $S = 0$ vai $S = 5$. Pirmais gadījums ($S = 0$) nav iespējams, jo skaitlis nevar sākties ar 0, tātad $S = 5$. Tas nozīmē, ka skaitlis SOKRATS ir nepāra skaitlis, tātad tas nevar dalīties ar 54.

6.5. Zināms, ka 2786. gadā no Marsa centrālā pasta tika nosūtīts tieši par 10% telegrammu vairāk nekā 2785. gadā. Arī nākamajos trijos gados (no 2787. līdz 2789. gadam) katru gadu no tā tika nosūtīts tieši par 10% vairāk telegrammu nekā iepriekšējā gadā. Cik telegrammu tika nosūtīts no Marsa centrālā pasta 2789. gadā, ja zināms, ka 2785. gadā no tā tika nosūtīts ne vairāk kā 15000 telegrammu?

Atrisinājums. Katru gadu nosūtīto telegrammu skaits palielinās tieši $\frac{110}{100} = \frac{11}{10}$ reizes. Tātad pa visiem šiem 4 gadiem to skaits ir palielinājies tieši

$$\frac{11}{10} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{14641}{10000}$$

reizes. Tas nozīmē, ka 2785. gadā nosūtīto telegrammu skaits dalījās ar 10000 un, tā kā tas nebija lielāks par 15000, tad tas bija tieši 10000. Tātad 2789. gadā no Marsa centrālā pasta tika nosūtītas tieši 14641 telegrammas.

7. klase

7.1. Kādas ielas vienā pusē rindā stāv piecas mājas. Katrā mājā dzīvo vismaz divi cilvēki. Zināms arī, ka nav tādu divu māju, kurās dzīvotu vienāds skaits cilvēku.
Par cilvēka kaimiņiem sauksim tos cilvēkus, kuri dzīvo vai nu ar viņu vienā mājā, vai arī blakus mājās. Vai iespējams, ka katram cilvēkam ir vai nu tieši 20, vai arī tieši 30 kaimiņi?
Atrisinājums. Jā, tas ir iespējams, ja cilvēku skaits mājās ir, piemēram, šāds:

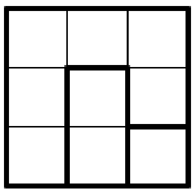
$$16, 5, 10, 6, 15.$$

iespējami arī citi varianti.
Piezīme: pie atrisinājuma var nonākt, piemēram, ar sekojošu spiedumu. Apzīmēsim mājas ar ar A, B, C, D, E. Ievērosim, ka cilvēkam no mājas B ir vairāk kaimiņu nekā cilvēkam no mājas A, jo tam papildus vēl nāk klāt kaimiņi no mājas C. Līdz ar to varam secināt, ka mājās A, B un C kopā dzīvo 31 cilvēks, bet mājās A un B kopā dzīvo 21 cilvēks.

$$\underbrace{\overbrace{A, B}^{21}, C}_{31}, D, E$$

no kurienes redzams, ka mājā C dzīvo tieši 10 cilvēki.
Tālāk varam ievērot, ka cilvēkam no mājas C nevar būt tikpat kaimiņu, kā cilvēkam no mājas B, jo tādā gadījumā mājās A un D būs vienāds cilvēku skaits. Līdz ar to cilvēkam no mājas C ir 20 kaimiņu un tātad mājās B, C, D kopā dzīvo 21 cilvēks. Tālāk piemeklēt skaitļus vairs nav grūti.

7.2. Parādi, kā var 3×3 rūtiņu kvadrātu sagriezt 3 dažādos gabalos (griežot pa rūtiņu līnijām) tā, lai katri divi no iegūtajiem gabaliem (nekur tos nepārvietojot) kopā veidotu simetrisku figūru. Katram gabalam jāpieskaras pie vismaz vienas kvadrāta malas (t.i. gabals nevar sastāvēt tikai no centrālās rūtiņas).
Figūra ir simetriska, ja to var pārlocīt uz pusēm tā, ka abas puses sakrīt. Figūras (gabali) ir dažādas, ja, pārbīdot vai "apmetot otrādi", tās nevar uzlikt vienu uz otras tā, ka tās sakrīt.
Atrisinājums. To var izdarīt šādi, kā redzams 14. attēlā.



14. att.

7.3. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa sešciparu skaitlim, kas dalās ar 99?

Atrisinājums. Mazākā iespējamā ciparu summa šādam sešciparu skaitlim ir 18, tāda tā ir, piemēram, skaitlim 990000.

Pierādīsim, ka mazāka ciparu summa par 18 nav iespējama. Ja skaitlis dalās ar 99, tad tas dalās ar 9 un ar 11. Tā kā tas dalās ar 9, tad arī tā ciparu summa dalās ar 9, tātad tā ciparu summa var būt tikai $9, 18, 27, \ldots$. Tātad atliek pamatot, ka tā nevar būt 9.

Apzīmēsim skaitļa ciparus ar $\overline{abcdef}$ un pieņemsim pretējo, t.i., ka $a+b+c+d+e+f=9$. Apzīmēsim nepāra pozīcijās esošo ciparu summu ar $a+c+e=A$, bet pāra vietās esošo ciparu summu ar $b+d+f=B$. Tā kā skaitļa ciparu summa ir 9, tad $A+B=9$, tātad skaitļiem A un B ir dažādas paritātes. Tā kā šis skaitlis dalās ar 11 , tad $A-B$ dalās ar 11. Tā kā A un B ir dažādas paritātes, tad šī starpība nevar būt nulle. Tas nozīmē, ka vai nu $A-B \geq 11$, vai arī $A-B \leq -11$. Bet, ja $A-B \geq 11$, tad $A \geq 11$, tas nozīmē, ka skaitļa ciparu summa ir vismaz 11 — pretruna. Līdzīgi otrā gadījumā, ja $A-B \leq -11$, tad $B \geq 11$ un iegūstam tādu pašu pretrunu.

7.4. Sākumā vienā rindā uz galda ir novietotas 12 glāzes ar limonādi. Indriķis un Oto pēc kārtas izdara gājienus, Indriķis sāk. Vienā gājienā var vai nu izdzert jebkuru vienu glāzi, vai arī izdzert divas blakusstāvošas glāzes. Pēc izdzeršanas tukšās glāzes (glāze) tiek noliktas atpakaļ vietā. Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena visas glāzes ir tukšas. Kurš no spēlētājiem, Indriķis vai Oto, vienmēr var uzvarēt, pareizi spēlējot?

Atrisinājums. Indriķis vienmēr var uzvarēt. Lai to izdarītu viņam pirmajā gājienā jāizdzer 6. un 7. glāze, tādējādi atliks divi pilnu glāžu piecinieki. Tālāk Indriķis var spēlēt simetriski, piemēram, ja Oto izdzer vienā pieciniekā 3. un 4. glāzi, tad Indriķis var izdzert otrā pieciniekā 3. un 4. glāzi. Redzams, ka Indriķim pēc Oto gājiena vienmēr vēl būs iespēja izdarīt savu gājienu, tāpēc viņš arī izdarīs pēdējo gājienu.

7.5. Zināms, ka 3546. gadā no Saturna kosmiskās stacijas startēja tieši par 5% starpplanētu lidojumu vairāk nekā 3545. gadā. Arī nākamajos četros gados (no 3547. līdz 3550. gadam) starpplanētu lidojumu skaits no tās ar katru gadu pieauga. Precīzs šī pieauguma lielums procentos (attiecībā pret iepriekšējo gadu) par aplūkojamo piecu gadu periodu (no 3546. līdz 3550. gadam) redzams 1. tabulā. Cik starpplanētu lidojumu no Saturna kosmiskās stacijas startēja 3550. gadā, ja zināms, ka 3545. gadā to bija ne vairāk kā miljons?

Gads	Pieaugums pret iepriekšējo gadu
3546	5%
3547	5%
3548	10%
3549	10%
3550	5%

1. tabula

Atrisinājums. Pieaugums par 5% vai 10% nozīmē, ka lidojumu skaits palielinājās attiecīgi $\frac{105}{100}=\frac{21}{20}$ vai $\frac{110}{100}=\frac{11}{10}$ reizes. Tātad pa visiem šiem 5 gadiem to skaits ir palielinājies

$$\frac{21}{20} \cdot \frac{21}{20} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{21}{20} = \frac{21^3 \cdot 11^2}{800000}$$

reizes. Tas nozīmē, ka 3545. gadā lidojumu skaits dalījās ar 800000 un, tā kā tas nebija lielāks par 1000000, tad tas bija tieši 800000. Tātad 3550. gadā no Saturna kosmiskās stacijas startēja tieši $21^3 \cdot 11^2 = 1120581$ starpplanētu lidojumi.

8. klase

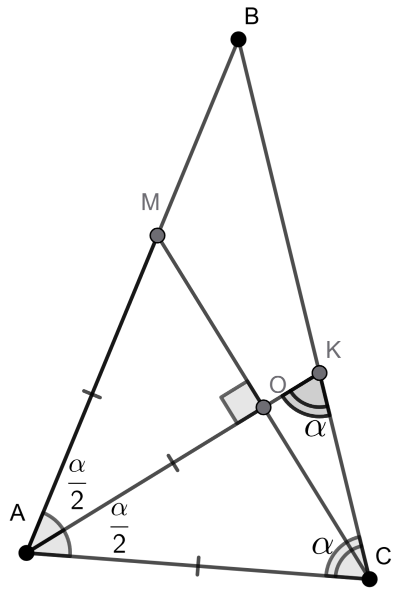
8.1. Parādi, kā skaitli 2025 var izteikt ar 9 vieniniekiem, pēc vajadzības lietojot aritmētisko darbību zīmes, kāpināšanu un iekavas. Drīkst starp vieniniekiem nelikt arī nekādas zīmes (tādā veidā iegūstot skaitļus 11, 111 utt.). Ja neizdodas ar 9 vieniniekiem, tad parādi ar pēc iespējas mazāku vieninieku skaitu, ar kādu izdodas.

Atrisinājums.

$$2025 = (1+1)^{11} - 11 - 11 - 1$$
$$2025 = (11 \cdot (1+1+1+1)+1)^{1+1}$$

8.2. Uz vienādsānu trijstūra ABC sānu malām AB un BC izvēlēti attiecīgi punkti M un K tā, ka nogriežņi AK un MC ir perpendikulāri un $AM = AK = AC$. Aprēķini trijstūra ABC leņķus.

Atrisinājums.



15. att.

Apzīmēsim trijstūra ABC pamata pieleņķus $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \alpha$, tad virsotnes leņķis $\sphericalangle ABC = 180° - 2\alpha$. Nogriežņu AK un MC krustpunktu apzīmēsim ar O.

Trijstūris MAC ir vienādsānu (jo $AM = AC$) un, tā kā AO ir tā augstums pret pamatu, tad AO ir arī tā bisektrise. Tas nozīmē, ka $\sphericalangle KAC = \alpha/2$.

No tā, ka trijstūris AKC ir vienādsānu (jo $AK = AC$), mēs varam secināt, ka $\sphericalangle AKC = \sphericalangle ACK = \alpha$. Tātad trijstūra AKC leņķi ir $\frac{\alpha}{2}, \alpha, \alpha$. Tā kā trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°, tad iegūstam vienādojumu

$$\frac{\alpha}{2} + \alpha + \alpha = 180°$$

no kurienes iegūstam, ka $\alpha = 72°$. Tātad trijstūra ABC leņķi ir $72°, 72°, 36°$.

8.3. Bezgalīgā naturālu skaitļu virknē katru locekli, sākot no otrā, iegūst, pieskaitot iepriekšējam loceklim tā lielāko ciparu. Piemēram, ja virknes pirmais loceklis ir 13, tad virkne ir $13, 16, 22, 24, 28, 36, \ldots$. Vai eksistē tāda virknes pirmā locekļa vērtība, ka visi virknes locekļi ir **a)** pāra skaitļi; **b)** nepāra skaitļi?

Atrisinājums. Pierādīsim, ka tas (ne **a)** ne **b)** gadījumi) nav iespējams. Aplūkosim virknes locekļu desmitu ciparu (t.i. otro no labās puses). Katrā solī tas vai nu nemainās, vai arī palielinās par vienu (vai arī no 9 mainās uz 0), jo katrā solī virknei tiek pieskaitīts kāds skaitlis, kas ir mazāks par 10. Tas nozīmē, ka kādā brīdī šis te desmitu cipars būs vienāds ar 9. Tajā brīdī tas būs lielākais šī skaitļa cipars, un, tā kā 9 ir nepāra skaitlis, tad, to pieskaitot, nākamajam skaitlim mainīsies paritāte. Tātad, neatkarīgi no a_1 vērtības, šajā virknē noteikti būs, gan pāra, gan nepāra skaitļi.

8.4. Ilmārs grib uznest augšā uz dzīvokli 150 kg ķirbju. Zināms, ka katrs ķirbis sver ne vairāk kā 10 kg. Vienā reizē viņš var uznest patvaļīgu daudzumu ķirbju, kas kopā sver ne vairāk kā 30 kg. Kāds ir mazākais reižu skaits, ar kuru Ilmārs noteikti var uznest visus ķirbjus (neatkarīgi no to svara)? Griezt gabalos ķirbjus nedrīkst!

Atrisinājums. Mazākais skaits ir 7 reizes.

Vispirms parādīsim, ka ar 7 reizēm noteikti pietiek. Katrā no pirmajām 6 reizēm Ilmārs var ņemt ķirbjus līdz to svars pārsniedz (vai sakrīt) ar 20kg. Tā ar 6 piegājieniem viņš būs uznesis vismaz 120kg. Tad pēdējā 7. reizē viņam atliek uznest visus atlikušos, kas ir ne vairāk kā $150 - 120 = 30kg$.

Bet ar 6 reizēm var nepietikt, piemēram, ja ir 19 ķirbji, kuri visi sver vienādi, t.i. katrs sver $\frac{150}{19} = 7\frac{17}{19}kg$. Tad, ja tos varētu uznes ar 6 reizēm, pēc Dirihlē principa būtu tāda reize, kad būtu jānes vismaz 4 ķirbji, kas ir vairāk nekā 30kg.

Piezīme: 9.5. uzdevuma atrisinājumā ir parādīta metode, kas ļauj katrā reizē uznest vismaz 22,5kg ķirbju.

8.5. LAPSA un SPALS ir divi piecciparu skaitļi, kuros cipari aizstāti ar burtiem, vienādi cipari ar vienādiem burtiem, bet dažādi cipari — ar dažādiem. Zināms, ka abi šie skaitļi dalās ar 9. Pierādi, ka tieši viens no tiem dalās ar 15. Kurš tas ir?

Atrisinājums. Atbilde: LAPSA dalās ar 15, bet SPALS nedalās.

Lai skaitlis dalītos ar 15, tam jādalās ar 3 un ar 5. Tā kā abi šie skaitļi dalās ar 9, tad tie abi dalās ar 3. Tātad atliek noskaidrot, kurš no skaitļiem dalās ar 5.

Tā kā abi šie skaitļi dalās ar 9, tad to ciparu summas dalās ar 9, tātad arī to ciparu summu starpība dalās ar 9, tātad $|A - S|$ dalās ar 9. Tas ir iespējams tikai tad, ja viens no šiem cipariem (A un S) ir 9, bet otrs ir 0. Tā kā S nevar būt 0 (jo skaitlis nevar sākties ar 0), tad $S = 9$ un $A = 0$. Tas nozīmē, ka skaitlis SPALS nedalās ar 5 (jo tā pēdējais cipars ir 9), bet LAPSA dalās ar 5 (jo tā pēdējais cipars ir 0).

9. klase

9.1. Atrodiet divus dažādus naturālu skaitļu trijniekus (a, b, c), kuriem $a < b < c$ un

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{2025}.$$

Atrisinājums. Šādu trijnieku ir ļoti daudz, te daži no tiem:

$$\frac{1}{1296} + \frac{1}{1600} + \frac{1}{1728} = \frac{4}{2025}$$
$$\frac{1}{810} + \frac{1}{2025} + \frac{1}{4500} = \frac{4}{2025}.$$

Atrastu šādus trijniekus var palīdzēt šāds novērojums: ja mēs atrodam kādu skaitļu trijnieku (a', b', c'), kuram

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} = \frac{4}{n},$$

kur n ir kāds skaitļa 2025 dalītājs, tad, pareizinot visus trīs skaitļus a', b', c' ar $\frac{2025}{n}$, mēs iegūsim prasīto trijnieku (a, b, c). Tas nozīmē, ka sākotnēji var meklēt šādus trijniekus, kur 2025 vietā ir kāds mazāks skaitlis n, kas ir 2025 dalītājs.
Piemēram, paņemsim $n = 5$, tad mums jāatrod skaitļi a', b', c', kuriem

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} = \frac{4}{5}.$$

Šeit der, piemēram $a' = 2, b' = 5, c' = 10$, jo

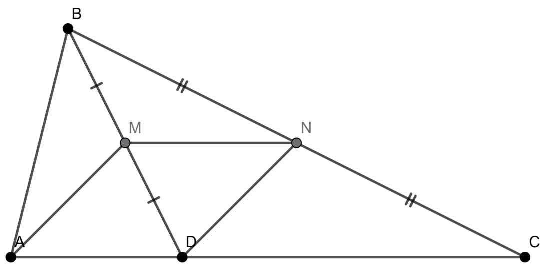
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Pareizinot a', b', c' ar $2025/5 = 405$ iegūsim prasīto trijnieku (a, b, c):

$$a = 2 \cdot 405 = 810$$
$$b = 5 \cdot 405 = 2025$$
$$c = 10 \cdot 405 = 4500$$
$$\frac{1}{810} + \frac{1}{2025} + \frac{1}{4500} = \frac{4}{5 \cdot 405} = \frac{4}{2025}.$$

9.2. Uz trijstūra ABC malas AC izvēlēts tāds punkts D, ka trijstūra ABD mediāna AM ir paralēla trijstūra DBC mediānai DN. Aprēķiniet attiecību $\frac{AD}{DC}$.

Atrisinājums. Novilksim nogriezni MN, kas ir trijstūra DBC viduslīnija (jo M un N ir malu vidus-



16. att.

punkti). Tātad $DC = 2MN$ pēc viduslīnijas īpašības.

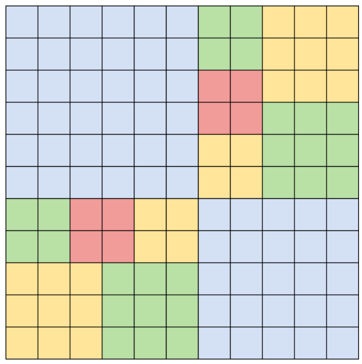
Ievērosim, ka $AMND$ ir paralelograms, jo $AM \parallel DN$ pēc dotā, bet $MN \parallel AD$, jo trijstūra viduslīnija ir paralēla trijstūra malai, kuru tā nekrusto. Tā kā paralelograma pretējās malas ir vienādas, tad $AD = MN$.

Tātad

$$\frac{AD}{DC} = \frac{MN}{2MN} = \frac{1}{2}.$$

9.3. Vai eksistē pirmskaitlis p, kuram $p \times p$ rūtiņu kvadrātu, griežot pa rūtiņu līnijām, var sagriezt tādos mazākos kvadrātos, ka katram no tiem mala ir vismaz 2 rūtiņas gara?

Atrisinājums. Mazākais šāds pirmskaitlis ir 11.



9.4. Bezgalīgā veselu skaitļu virknē $1, 2, 3, 6, 1, \ldots$ katrs loceklis, sākot ar ceturto, ir iepriekšējo 3 locekļu summas kvadrāta pēdējais cipars. Aprēķiniet šīs virknes 2025. locekli.

Atrisinājums. Uzrakstot virknes pirmos locekļus

$$1, 2, 3, 6, 1, 0, 9, 0, 1, 0, 1, 4, 5, 0, 1, 6, 9, 6, 1, 6, 9, 6, 1, 6, 9, 6, \ldots$$

varam ievērot, ka, sākot ar 15. locekli, virkne ieciklojas ar periodu 4 (tā ieciklojas sākot no vietas, kurā divas reizes parādās viens un tas pats trijnieks $1, 6, 9$), tāpēc sākot no 15. locekļa $a_n = a_{n+4}$. Tāpēc virknes 2025. loceklis ir vienāds ar $2025 - 502 \cdot 4 = 17$. locekli, tātad tas ir 9.

9.5. Ilmārs grib uznest augšā uz dzīvokli 255 kg ķirbju. Zināms, ka katrs ķirbis sver ne vairāk kā 10 kg. Vienā reizē viņš var uznest patvaļīgu daudzumu ķirbju, kas kopā sver ne vairāk kā 30 kg. Kāds ir mazākais reižu skaits, ar kuru Ilmārs noteikti var uznest visus ķirbjus (neatkarīgi no to svara)? Ķirbjus griezt gabalos nedrīkst!

Atrisinājums. Mazākais skaits ir 11 reizes.

Vispirms parādīsim, ka ar 11 reizēm noteikti pietiek. Katrā no pirmajām 10 reizēm Ilmārs var noteikti paņemt vismaz 22,5kg ķirbju. Lai to izdarītu, viņš var sakārtot ķirbjus pēc to svara dilstošā secībā un tad ņemt pēc kārtas, līdz vairāk nevar (paņemot nākamo kopējais svars pārsniegs 30kg). Pamatosim, ka šādā veidā Ilmārs katrā reizē noteikti paņems vismaz 22,5 kg ķirbju.

Pieņemsim pretējo, ka Ilmārs ir paņēmis mazāk par 22,5kg. Tas nozīmē, ka šis te "nākamais" ķirbis sver vairāk par 7,5kg (jo, paņemot to, kopējais svars pārsniegs 30kg). Bet tādā gadījumā arī visi līdz šim paņemtie ķirbji katrs sver vismaz 7,5kg (jo tos ņem pēc svara dilstošā secībā). Bet tā kā Ilmārs ir paņēmis vismaz 3 ķirbjus (jo neviens ķirbis nav smagāks par 10kg), tad kopā viņš ir paņēmis vismaz $3 \cdot 7{,}5 = 22{,}5$kg – pretruna.

Šādā veidā pirmajās 10 reizēs Ilmārs kopā var uznest vismaz $22{,}5 \cdot 10 = 225$kg ķirbju. Tad pēdējā 11. reizē tam atliek ne vairāk par $255 - 225 = 30$kg.

Tagad pamatosim, ka ar 10 reizēm var nepietikt. Aplūkosim gadījumu, kad Ilmāram ir 31 ķirbis un tie visi sver vienādi, t.i. katrs ķirbis sver $\frac{255}{31} = 8\frac{7}{31}kg$. Ja tos varētu uznest ar 10 reizēm, tad pēc Dirihlē principa būtu tāda reize, kad būtu jānes vismaz 4 ķirbji, bet tas ir vairāk nekā 30kg.

10. klase

10.1. Doti divi dažādi naturāli skaitļi a un b. Pierādīt, ka

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2+\frac{1}{ab}.$$

Atrisinājums. Pārnesot divnieku uz kreiso pusi un pareizinot abas puses ar ab (kas ir pozitīvs skaitlis), iegūstam ekvivalentu nevienādību pierādāmajai:

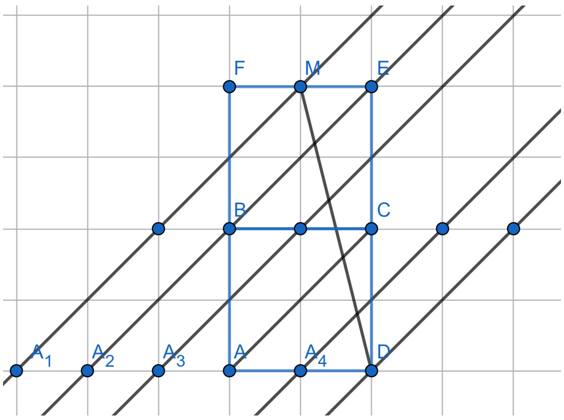
$$a^2+b^2-2ab\geq 1$$

jeb

$$(a-b)^2\geq 1,$$

kas ir acīmredzami pareiza, ja a un b ir dažādi naturāli skaitļi (jo tādā gadījumā to starpības modulis ir vismaz 1).

10.2. Doti kvadrāti $ABCD$ un $BCEF$ (BC tiem ir kopīga mala), punkts M ir malas EF viduspunkts. Kādā garumu attiecībā taisne AC sadala nogriezni MD?
Atrisinājums. Attēlosim dotos kvadrātus uz kvadrātveida rūtiņu režģa kā redzams zīmējumā. Caur



17. att.

punktiem A_1, A_2, A_3, A, A_4, D novilksim taisnes, kas paralēlas taisnei AC. Pēc Talesa teorēmas tās dala nogriezni MD piecās vienādās daļās. Tas nozīmē, ka taisne AC to dala attiecībā $3:2$.

10.3. Bezgalīgā naturālu skaitļu virknē $24, 69, 21, 18, \ldots$ katru skaitli, sākot no trešā, var iegūt, saskaitot divu iepriekšējo skaitļu ciparu summas. Aprēķināt šīs virknes 2025. locekli.
Atrisinājums. Atbilde: virknes 2025. loceklis ir 15.
Turpinot virkni

$$24, 69, 21, 18, 12, 12, 6, 9, 15, 15, 12, 9, 12, 12, 6, 9$$

redzam, ka tajā skaitļu pāris $(12, 12)$ atkārtojas 5. un 6., kā arī 13. un 14. pozīcijā, līdz ar to (tā kā katrs loceklis ir atkarīgs no diviem iepriekšējiem) varam secināt, ka šī virkne sākot no 5. locekļa ir periodiska ar garumu 8 un tās periods ir $(12, 12, 6, 9, 15, 15, 12, 9)$.
Līdz ar to tās 2025. loceklis ir tas pats, kas $2025-8\cdot 252=9$. loceklis, tātad tas ir 15.

10.4. Uz tāfeles uzrakstīti 2025 dažādi naturāli skaitļi. Reizi minūtē Elīna izvēlas jebkurus divus no tiem, apzīmēsim tos ar a un b, tos nodzēš un to vietā uzraksta skaitļus $\mathrm{LKD}(a,b)$ un $\mathrm{MKD}(a,b)$. Pierādīt, ka noteikti (neatkarīgi no tā, kurus skaitļus Elīna izvēlas) pienāks tāds brīdis, kad viņa uzrakstīs uz tāfeles tos pašus skaitļus, ko nodzēsusi (tajā pašā gājienā).
Piezīme: ar $\mathrm{LKD}(x,y)$ un $\mathrm{MKD}(x,y)$ apzīmē attiecīgi skaitļu x un y lielāko kopīgo dalītāju un mazāko kopīgo dalāmo.
1. atrisinājums. Pierādīsim, ka jebkuriem naturāliem skaitļiem a un b ir spēkā

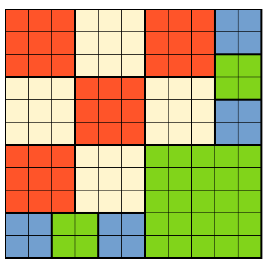
$$\mathrm{LKD}(a,b)\cdot\mathrm{MKD}(a,b)=ab.$$

Aplūkosim divus patvaļīgus naturālus skaitļus a un b, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir d. Tādā gadījumā mēs varam izteikt, ka $a=dx$ un $b=dy$ kaut kādiem x un y, kuriem $\mathrm{LKD}(x,y)=1$. Skaitļu x un y mazākais kopīgais dalāmais tātad ir xy, savukārt skaitļu $a=dx$ un $b=dy$ mazākais kopīgais dalāmais ir dxy. No tā seko prasītais (šis ir labi zināms fakts).
No tā seko, ka Elīnas nodzēsto skaitļu a un b reizinājums ir vienāds ar viņas uzrakstīto skaitļu $\mathrm{LKD}(a,b)$ un $\mathrm{MKD}(a,b)$ reizinājumu, kas nozīmē, ka visu uz tāfeles uzrakstīto skaitļu reizinājums nemainās.
Aplūkosim tagad, kā mainās uzrakstīto skaitļu summa (lietosim tos pašus apzīmējumus $a=dx$ un $b=dy$). Tā pieaug par

$$dxy+d-dx-dy=d(x-1)(y-1)\geq 0,$$

pie tam vienādība izpildās tikai tad, ja $x=1$ vai $y=1$.
No šejienes varam secināt, ka visu uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa nekad nesamazinās, un paliek tāda pati kā bija tikai tad, ja $x=1$ vai $y=1$, t.i., tajā gadījumā, ja viens no skaitļiem dalās ar otru. Šajā gadījumā (pieņemsim, ka $x=1$, tad skaitļi ir $a=d$ un $b=dy$) Elīna uzrakstīs uz tāfeles tos pašus skaitļus, ko nodzēsusi, jo $\mathrm{LKD}(d,dy)=d$, bet $\mathrm{MKD}(d,dy)=dy$.
Tā kā skaitļu summa nevar bezgalīgi pieaugt, ja to reizinājums nemainās, tad noteikti pienāks tāds brīdis, kad summa paliks tāda pati, un šajā brīdī Elīna uzrakstīs uz tāfeles tos pašus skaitļus, ko nodzēsusi.
2. atrisinājums. Vienkāršības labad pieņemsim, ka $a\leq b$. Ievērosim, ka tādā gadījumā $\mathrm{LKD}(a,b)\leq a$, pie tam vienādība izpildās tikai tad, ja $\mathrm{LKD}(a,b)=a$ un $\mathrm{MKD}(a,b)=b$ t.i. tad, ja Elīna uzraksta tos pašus skaitļus, ko nodzēsusi.
Pieņemsim pretējo, ka Elīna darbojas bezgalīgi ilgi un nekad neuzraksta tos pašus skaitļus, ko tikko nodzēsusi. Tādā gadījumā viņa katrā solī uzraksta skaitli ($\mathrm{LKD}(a,b)$), kas ir mazāks, par abiem viņas nodzēstajiem skaitļiem.
Aplūkosim vismazāko skaitli, kas šajā bezgalīgajā procesā parādās uz tāfeles. Pēc tā uzrakstīšanas, Elīna to vairs neizvēlas (jo uz tāfeles neparādās par to mazāks skaitlis), tāpēc viņa tālāk viņa darbojas tikai ar atlikušajiem 2024 skaitļiem.
Pēc tam aplūkosim mazāko skaitli no atlikušajiem, kas šajā bezgalīgajā procesā parādās uz tāfeles. Pēc tā uzrakstīšanas (arī tad, ja tas tur jau bija no sākuma) Elīna to vairs neizvēlas (jo uz tāfeles neparādās par to mazāks skaitlis), tāpēc viņai tālāk darbojas tikai ar atlikušajiem 2023 skaitļiem.
Atkārtojot šo spriedumu vēl 2022 reizes mēs nonāksim situācijā, kad ir jau 2024 skaitļi, ko Elīna vairs neizvēlas un tātad atlicis tikai viens, ko viņa drīkst nodzēst — pretruna.

10.5. Vai eksistē pirmskaitlis p, kuram $p\times p$ rūtiņu kvadrātu, griežot pa rūtiņu līnijām, var sagriezt tādos mazākos kvadrātos, ka jebkuram no tiem malas garums (rūtiņās) arī ir pirmskaitlis?
Atrisinājums. Mazākais šāds pirmskaitlis ir 11.

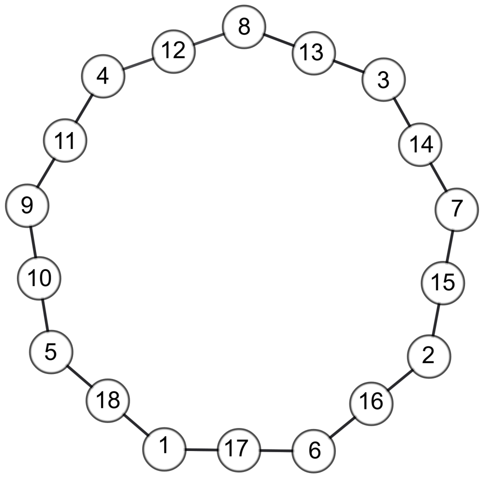


11. klase

11.1. Pierādīt, ka jebkuram naturālam skaitlim k var atrast tādus naturālus skaitļus a un b, ka $a!$ dalās ar b, $b!$ dalās ar a un $a-b=k$.
Piezīme: naturāla skaitļa n faktoriāls $n!$ ir visu naturālo skaitļu no 1 līdz n ieskaitot reizinājums: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Piemēram, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Atrisinājums. Vispirms ievērosim, ka, tā kā $a > b$ (jo $a - b = k > 0$), tad nosacījums $a!$ dalās ar b vienmēr izpildās. Tāpēc aplūkosim tikai otru nosacījumu. Parādīsim, kā katram naturālam k atrast šādus skaitļus a un b, ka $a-b=k$ un $b!$ dalās ar a.

- Ja $k=1$, tad var ņemt $a=6$ un $b=5$, redzams, ka $5! = 120$ dalās ar 6.
- Ja $k=2$, tad var ņemt $a=6$ un $b=4$, redzams, ka $4! = 24$ dalās ar 6.
- Jebkuram citam $k \geq 3$ ņemsim $a=2k$ un $b=k$, tad redzams, ka $k! = (k-1)! \cdot k$ dalās ar $2k$, jo skaitlis $(k-1)!$ dalās ar 2.

11.2. Regulāra 9-stūra virsotnēs un malu viduspunktos ierakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 18 (katrs skaitlis izmantots tieši vienu reizi) tā, ka skaitļu summa uz katras tā malas ir viena un tā pati (uz katras malas atrodas 3 skaitļi, divi virsotnēs un viens tās viduspunktā). Kāda ir mazākā iespējamā šīs summas vērtība?
Atrisinājums. Atbilde: mazākā iespējamā vērtība ir 24. Vispirms parādīsim, ka vērtība $k=24$ ir



18. att.

iespējama. To var izdarīt, kā redzams 18. att.
Atliek pamatot, ka mazāka summa nav iespējama. Apzīmēsim uz katras malas uzrakstīto skaitļu summu ar k un aplūkosim visu šo malu summu summu. No vienas puses tās vērtība ir $9k$, jo mums ir 9 malas un uz katras malas skaitļu summa ir k. No otras puses, šādā veidā mēs katru no 18 skaitļiem esam ieskaitījuši vienu vai divas reizes: virsotnēs ierakstītos skaitļus katru divas reizes (jo tie pieder divām malām), bet malu viduspunktos ierakstītos skaitļus katru vienu reizi. Līdz ar to mēs varam uzrakstīt vienādojumu

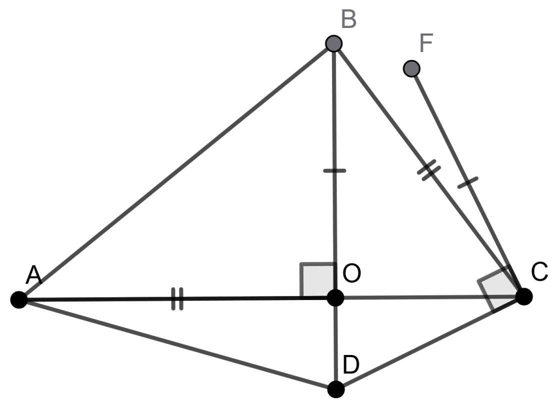
$$9k = S + S_v$$

kur $S = \frac{18 \cdot 19}{2} = 171$ ir visu 18 skaitļu summa, bet S_v ir virsotnēs ierakstīto skaitļu summa. Tā kā $S_v \leq 1+2+\cdots+9 = 45$ (šādu mazāko summu mēs iegūstam, ja virsotnēs ir ierakstīti mazākie iespējamie skaitļi), tad iegūstam nevienādību

$$9k \leq 171 + 45$$

no kurienes $k \leq 24$.

11.3. Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāles ir perpendikulāras un krustojas punktā O. Zināms, ka $BC = AO$. Punkts F izvēlēts tā, ka $CF = BO$ un $CF \perp CD$. Pierādīt, ka trijstūris ADF ir vienādsānu.
Atrisinājums.



19. att.

Pierādīsim, ka $AD = DF$. Pēc Pitagora teorēmas $AD^2 = AO^2 + OD^2 = BC^2 + OD^2$ (jo $AO = BC$). Arī pēc Pitagora teorēmas $DF^2 = CD^2 + CF^2 = CD^2 + BO^2$. Tā kā $CD^2 = OD^2 + OC^2$ (atkal pēc Pitagora teorēmas), tad

$$DF^2 = CD^2 + BO^2 = OD^2 + OC^2 + OB^2 = OD^2 + BC^2,$$

(pēdējā vienādībā izmantota Pitagora teorēma trijstūrī OBC). No šejienes redzams, ka $AD^2 = BC^2 + OD^2 = DF^2$.
Piezīme: punktam F ir iespējami divi dažādi novietojumi, bet tas neietekmē risinājuma gaitu.

11.4. Cik dažādos veidos skaitli 12 var izteikt kā vieninieku, divnieku un četrinieku summu? Veidi, kas atšķiras ar saskaitāmo secību, ir uzskatāmi par dažādiem. Piemēram, skaitli 4 var izteikt sešos dažādos veidos: $1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2 = 4$.

Atrisinājums. Atbilde: 520 veidos.

Apzīmēsim ar a_n to, cik dažādos veidos skaitli n var izteikt kā vieninieku, divnieku un četrinieku summu. Tādā gadījumā $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ (jo $2 = 1+1 = 2$), $a_3 = 3$ (jo $3 = 1+1+1 = 1+2 = 2+1$) un $a_4 = 6$ (kā uzdevumā dotajā piemērā). Visiem pārējiem $n \geq 5$ izteiksim a_n rekurenti no iepriekšējām vērtībām. Visus dažādos veidus kā skaitli n var izteikt kā vieninieku divnieku un četrinieku summu var sadalīt 3 grupās:

- tie, kas sākas ar 1. Tādā gadījumā visi pārējie summas locekļi summā dod $n-1$, tātad šādu veidu ir tieši a_{n-1}.
- tie, kas sākas ar 2. Tādā gadījumā visi pārējie summas locekļi summā dod $n-2$, tātad šādu veidu ir tieši a_{n-2}.
- tie, kas sākas ar 4. Tādā gadījumā visi pārējie summas locekļi summā dod $n-4$, tātad šādu veidu ir tieši a_{n-4}.

No tā mēs varam secināt, ka visiem $n \geq 5$ ir spēkā $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-4}$. Izmantojot šo, varam aprēķināt prasīto vērtību:

$$\begin{aligned}
a_5 &= a_4 + a_3 + a_1 = 6+3+1 = 10\\
a_6 &= a_5 + a_4 + a_2 = 10+6+2 = 18\\
a_7 &= a_6 + a_5 + a_3 = 18+10+3 = 31\\
a_8 &= a_7 + a_6 + a_4 = 31+18+6 = 55\\
a_9 &= a_8 + a_7 + a_5 = 55+31+10 = 96\\
a_{10} &= a_9 + a_8 + a_6 = 96+55+18 = 169\\
a_{11} &= a_{10} + a_9 + a_7 = 169+96+31 = 296\\
a_{12} &= a_{11} + a_{10} + a_8 = 296+169+55 = 520
\end{aligned}$$

11.5. Katrs no 7 votivapām zina dažus pantiņus no votivapu himnas. Zināms, ka jebkuri 3 votivapas kopā var to nodziedāt (tie kopā zina visus pantiņus). Vai noteikti var atrast divus votivapas, kas divatā var nodziedāt votivapu himnu, ja tajā ir **a)** 20 **b)** 21 pantiņi?

Atrisinājums. **a)** Jā. Pieņemsim pretējo, ka šādu divu votivapu nav. Tādā gadījumā katriem 2 votivapām ir pantiņš, kuru neviens no viņiem nezina. Kopā no 7 votivapām var izveidot 21 votivapu pāri, pēc Dirihlē principa (tā kā pantiņu ir tikai 20) mums būs divi votivapu pāri, kas nezina vienu un to pašu pantiņu. Bet šajos abos pāros kopā ir vismaz 3 votivapas, tā ir pretruna ar to, ka jebkuri 3 votivapas kopā var nodziedāt himnu.

b) Nē. Tagad mums ir 21 pantiņš un 21 votivapu pāris. Piekārtosim katram pantiņam votivapu pāri, kas to nezina, un pieņemsim, ka pārējie 5 votivapas (kas nav šajā pārī) šo pantiņu zina. Šādā veidā neviens votivapu pāris nevar nodziedāt himnu (jo katram pārim ir pantiņš, kuru viņi nezina), bet katrs votivapu trijnieks var (jo katram pantiņam ir tikai 2 votivapas, kas to nezina, līdz ar to no 3 votivapām vismaz viens to zina).

12. klase

12.1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu

$$x \cdot \left(5^{\sqrt{x^2-1}} + 7^{\sqrt{x+1}}\right) = -2.$$

Atrisinājums. $x = -1$.
Acīmredzami, ka x nevar būt pozitīvs, jo tādā gadījumā vienādojuma kreisā puse būs pozitīva. Acīmredzami arī, ka $x = 0$ neder. Līdz ar to atliek aplūkot gadījumu, kad $x < 0$.
Lai būtu definēta otrā kvadrātsakne, mums ir nepieciešams lai $x + 1 \geq 0$, t.i. $x \geq -1$. Bet, lai būtu definēta pirmā kvadrātsakne, mums ir nepieciešams, lai $x^2 - 1 \geq 0$. Tā kā x ir negatīvs, tad tas ir iespējams tikai, ka $x \leq -1$. Tātad abas kvadrātsaknes ir definētas tikai tad, ja $x = -1$. Pārbaudot konstatējam, ka šī x vērtība der kā atrisinājums.

12.2. Cik ir tādu sešciparu skaitļu, kas nesatur nevienu no cipariem $5, 6, 7, 8, 9, 0$ un kuros nekur blakus neatrodas divi cipari 4?
Atrisinājums. Atbilde: ir 3105 šādi skaitļi.
Apzīmēsim ar a_n tādu n-ciparu skaitļu skaitu, kas sastāv tikai no cipariem $1, 2, 3, 4$ un kuros divi četrinieki neatrodas blakus. Viegli ievērot, ka $a_1 = 4$ (vienciparu skaitļi 1, 2, 3, 4) un $a_2 = 15$ (der visi divciparu skaitļi izņemot 44). Mūsu uzdevums ir atrast a_6 vērtību. Izteiksim šīs virknes n-to locekli rekurenti.
Sadalīsim visus n-ciparu skaitļus, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, divās grupās:

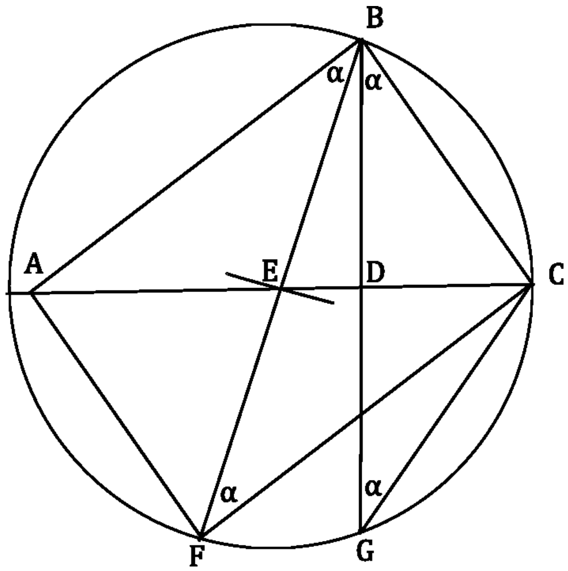
- skaitļi, kas sākas ar 1, 2 vai 3. Šādu skaitļu kopā ir $3a_{n-1}$, jo katram no šiem trim pirmajiem cipariem atlikušo $n-1$ ciparu skaitļu ir tieši a_{n-1}.
- skaitļi, kas sākas ar 4. Šādiem skaitļiem otrais cipars var būt tikai 1, 2 vai 3 un atlikušo $n-2$ ciparu skaitļu skaits katrā no šiem gadījumiem ir tieši a_{n-2}. Tāpēc šādu skaitļu kopā ir $3a_{n-2}$.

No šejienes varam iegūt rekurentu sakarību $a_n = 3a_{n-1} + 3a_{n-2}$. Pēc tās aprēķinot virknes locekļus iegūstam

$$\begin{aligned}
a_1 &= 4 \\
a_2 &= 15 \\
a_3 &= 3 \cdot (a_1 + a_2) = 3 \cdot (4 + 15) = 57 \\
a_4 &= 3 \cdot (a_2 + a_3) = 3 \cdot (15 + 57) = 216 \\
a_5 &= 3 \cdot (a_3 + a_4) = 3 \cdot (57 + 216) = 819 \\
a_6 &= 3 \cdot (a_4 + a_5) = 3 \cdot (216 + 819) = 3105
\end{aligned}$$

12.3. Trijstūrī ABC novilkts augstums BD un mediāna BE, zināms, ka punkts D atrodas starp C un E. Zināms arī, ka $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBD = 23°$. Aprēķināt $\sphericalangle DBE$ lielumu grādos!

Atrisinājums. Pagarināsim BE aiz E tā, ka $EF = BE$. Tad $ABCF$ ir paralelograms (jo tā diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm) un $\sphericalangle ABF = \sphericalangle CFB = \alpha = 23°$. Pagarināsim BD aiz D tā, ka $DG = BD$. Tā kā $BD \perp AC$, tad BCG ir vienādsānu trijstūris (jo tajā CD ir gan augstums, gan mediāna) un tātad $\sphericalangle CGD = \sphericalangle CBD = \alpha$.



20. att.

Aplūkosim četrstūri $BCGF$. Divi vienādi lieli leņķi $\sphericalangle CFB$ un $\sphericalangle CGD$ balstās uz BC. Tas nozīmē, ka ap četrstūri $BCGF$ var apvilkt riņķa līniju. Šīs riņķa līnijas centrs atrodas BG un BF vidusperpendikulu krustpunktā. Tā kā BG vidusperpendikuls ir AC, kas iet caur punktu E, un arī BF vidusperpendikuls iet caur punktu E, tad E arī ir ap četrstūri $BCGF$ apvilktās riņķa līnijas centrs.

Tā kā šīs riņķa līnijas rādiuss ir $CE = AE$, tad AC ir šīs riņķa līnijas diametrs un $\sphericalangle ABC = 90°$. Tātad $\sphericalangle DBE = 90° - 2\alpha = 44°$.

12.4. Katrs no 7 šillišallām zina dažus pantiņus no šillišallu himnas. Zināms, ka jebkuri 4 no viņiem kopā var to nodziedāt (tie kopā zina visus pantiņus). Vai noteikti var atrast trīs šillišallas, kas kopā var nodziedāt šillišallu himnu, ja tajā ir **a)** 34 **b)** 35 pantiņi?

Atrisinājums. a) Jā. Pieņemsim pretējo, ka šādu divu šillišallu nav. Tādā gadījumā katram šillišallu trijniekam ir pantiņš, kuru neviens no viņiem nezina. Kopā no 7 šillišallām var izveidot $C_7^3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 35$ šillišallu trijniekus, pēc Dirihlē principa mums būs divi šillišallu trijnieki, kas nezina vienu un to pašu pantiņu. Bet šajos abos trijniekos kopā ir vismaz 4 šillišallas, tā ir pretruna ar to, ka jebkuri 4 šillišallas kopā var nodziedāt himnu.

b) Nē. Tagad mums ir 35 pantiņi un 35 šillišallu trijnieki, piekārtosim katram pantiņam šillišallu trijnieku, kas to nezina un pieņemsim, ka pārējie 4 šillišallas (kas nav šajā trijniekā) šo pantiņu zina. Šādā veidā neviens šillišallu trijnieks nevar nodziedāt himnu (jo katram trijniekam ir pantiņš, kuru viņi nezina), bet katri četri šillišallas var (jo katram pantiņam ir tikai 3 šillišallas, kas to nezina, līdz ar to no 4 šillišallām vismaz viens to zina).

12.5. Doti tādi naturāli skaitļi x un y, ka $x+2y+1$ ir pirmskaitlis. Pierādīt, ka $x^2+2xy-2y$ nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

Atrisinājums. Apzīmēsim $p = x+2y+1$ un ievērosim, ka $p \geq x+3$ (jo $y \geq 1$). Ievērosim arī, ka $x \geq 2$ (x jābūt pāra skaitlim, pretējā gadījumā $x+2y+1$ būs pāra skaitlis, tātad nebūs pirmskaitlis).
Pārveidosim doto izteiksmi, izmantojot to, ka $p = x+2y+1$:

$$x^2+2xy-2y = (x^2+2xy+x)-(x+2y+1)+1 = px-p+1.$$

Pieņemsim pretējo, ka tas ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts un apzīmēsim to ar n^2. Tādā gadījumā

$$\begin{aligned} px-p &= n^2-1 \\ p(x-1) &= (n-1)(n+1) \end{aligned}$$

Tātad vai nu $n-1$, vai $n+1$ dalās ar p. Aplūkosim šos gadījumus.

1. $n-1$ dalās ar p. Tādā gadījumā $x-1$ dalās ar $n+1$. Tātad $n-1 \geq p$ un $x-1 \geq n+1$ (šeit ir svarīgi, ka $x \geq 2$), jeb $x-3 \geq n-1$.
   Saliekot abas šīs nevienādības kopā iegūstam, ka $x-3 \geq n-1 \geq p$, kas ir pretruna ar to, ka $p \geq x+3$.
2. $n+1$ dalās ar p. Tādā gadījumā $x-1$ dalās ar $n-1$. Tātad $n+1 \geq p$ un $x-1 \geq n-1$, jeb $x+1 \geq n+1$.
   Saliekot abas šīs nevienādības kopā iegūstam, ka $x+1 \geq n+1 \geq p$, kas ir pretruna ar to, ka $p \geq x+3$.